

华东师范大学期末试卷(B): 2010—2010 学年第 2 学期

课程名称: 复 变 函 数

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: 2008 级

课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

一、(共 12 分) 请简要叙述以下概念或定理(设 $f(z)$ 是解析函数):

- (1) Cauchy 导数公式;
- (2) Cauchy 积分不等式;
- (3) 非孤立奇点;
- (4) 解析函数零点孤立性定理.

二、(12 分)

- (1) 求函数 $f(z) = \frac{2z+1}{3z+1}$ 在 $z = 0$ 的 Taylor 展开, 并求级数的收敛半径;
- (2) 假设 $z = 0$ 是解析函数 $f(z)$ 的 m 级零点. 证明: $z = 0$ 是导函数 $f'(z)$ 的 $(m-1)$ 级零点;
- (3) 沿从 $z = -1$ 到 $z = i$ 的线段 C 直接计算积分 $\int_C \bar{z} dz$

三、(共 16 分) 分别求 $f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)}$ 在以下圆环内的 Laurent 级数.

- (1) $0 < |z| < 1$, 关于 $z = 0$ 展开;
- (2) $1 < |z| < +\infty$, 关于 $z = \infty$ 展开;
- (3) $0 < |z+1| < 1$, 关于 $z = -1$ 展开.

四、(16 分) 设 $f(z) = \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z}$,

- (1) 求 $f(z)$ 全部奇点, 请简要说明: 哪些是非孤立奇点, 可去奇点, 极点(确定重数), 本性奇点;
- (2) 求出 $f(z)$ 的所有极点的残数;
- (3) 证明: $z = \infty$ 是 $g(z) = \frac{\cos \frac{1}{z}}{z}$ 的可去奇点; 并求 $z = \infty$ 处的残数.

五、(共 24 分)

利用残数定理或残数总和定理, 分别计算以下积分

(1)

$$\int_{|z-2|=\frac{1}{2}} \frac{zdz}{(z-1)(z-2)^2},$$

(2)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{5-4\cos \theta},$$

(3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx,$$

(4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1} dx.$$

六、(20 分)

(1) 用 Rouché 定理判断方程 $z^4 + 8z + 10 = 0$ 在圆 $|z| < 1$ 内根的个数; 进一步判断在圆环 $1 < |z| < 3$ 内根的个数;

(2) 设 $f(z) = \frac{\sin 2z}{(z+1)^2}$, $C: |z| = 2$, 当 z 沿 C 逆时针跑一圈后, 求幅角变化 $\Delta_C \arg f(z)$;

(3) 设函数 $f(z)$ 在单位圆盘 $|z| \leq 1$ 内, 除了若干个极点外, 其余点均解析. 假设在单位圆边界上恒有 $|f(z)| > 1$, 证明: 方程 $f(z) = 1$ 及 $f(z) = 0$, 在单位圆盘内根的个数恰好相等.

(提示: 考虑 $F(z) = \frac{1}{f(z)} - 1$, 利用幅角原理.)

(4) 如将第(3)小题的条件改为 $|f(z)| < 1$, 那么关于方程 $f(z) = 1$ 在单位圆盘内的根数, 你能得到什么结论? 请给出简单说明.