

华东师范大学期末试卷(A): 2010—2010 学年第 2 学期

课程名称: 复 变 函 数

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: 2008 级

课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

一、(共 12 分) 请简要叙述以下概念或定理:

- (1) 最大模原理; (2) Cauchy 积分定理;
(3) 本性奇点; (4) Schwarz 引理;

二、(12 分)

(1) 分别沿以下路径直接计算积分 $\int |z|^2 dz$:

线段 C_1 : 从 $z = 1$ 到 $z = i$;

圆弧 C_2 : $z = e^{i\theta}$, θ 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$;

(2) 分别对以下解析函数, 求出 $z = 0$ 的零点的级数:

$$f(z) = z^2(e^z - 1), \quad g(z) = \sin^2 z + z^2(z - 1).$$

三、(共 16 分) 分别求 $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ 在以下圆环内的 Laurent 级数.

- (1) $0 < |z| < 1$, 关于 $z = 0$ 展开;
(2) $1 < |z| < +\infty$, 关于 $z = \infty$ 展开;
(3) $0 < |z - 1| < 1$, 关于 $z = 1$ 展开.

四、(16 分) 设 $f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}$,

(1) 求 $f(z)$ 全部奇点, 并说明哪些是非孤立奇点, 可去奇点, 极点(确定重数), 本性奇点?

(2) 求出 $f(z)$ 的所有极点的残数;

(3) 证明: $z = \infty$ 是 $g(z) = \sin \frac{1}{z}$ 的可去奇点; 并求 $z = \infty$ 处的残数.

五、(共 24 分)

利用残数定理或残数总和定理, 分别计算以下积分

(1)

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^4-1)},$$

(2)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\cos\theta},$$

(3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+1)}{(x^4+1)} dx,$$

(4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx.$$

六、(20 分)

(1) 用 Rouché 定理判断方程 $z^4 - 5z + 1 = 0$ 在圆 $|z| < 1$ 内根的个数; 进一步判断在圆环 $1 < |z| < 2$ 内根的个数;

(2) 设 $f(z) = \frac{\sin z}{4-z^2}$, $C: |z| = 4$, 当 z 沿 C 逆时针跑一圈后, 求幅角变化 $\Delta_C \arg f(z)$;

(3) 设 $g(z) = z^5 + z + 1$. 当 z 沿虚轴 L 从 $+\infty i$ 到 $-\infty i$ 跑遍时, 证明:

$$\Delta_L \arg g(z) = -\pi;$$

(4) 证明: 方程 $z^5 + z + 1 = 0$ 在右半平面内有两个根, 即两个正实部的根. (提示: 在右半平面考虑由虚轴 L 和半圆 $C: |z| = R, \operatorname{Re}(z) \geq 0$ 围成的区域, 让 R 充分大.)