

华东师范大学期中试卷: 2010—2010 学年第 2 学期

课程名称: 复 变 函 数

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: 2008 级

课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

一、(共 12 分) 一、求以下表达式的值:

- (1) $\sin(1+i)$; (2) $(1+i)^5$; (3) $\operatorname{Re}(e^{1+i})$; (4) $\arg(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i})$ (要求 $-\pi < \arg z < \pi$)

二、(16 分) 求以下多值函数的所有可能值:

- (1) i^i ; (2) $(1+i)^{\frac{1}{3}}$; (3) $\ln(2i)$; (4) 2^i ;

三、(共 18 分) 设 $z = x + iy$, $f(z) = ax^2 + by^2 + ixy$, a, b 是实常数.

- (1) 将函数 $f(z)$ 写成关于 z 和 $\bar{z}$ 的复形式;
 (2) 分别计算形式偏导数 $\frac{\partial f}{\partial z}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$, 以及实偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$;
 (3) 假若 $f(z)$ 在原点解析, 试利用柯西-黎曼条件求 a, b 的值.

四、(共 12 分)

(1) 证明: 复平面上的圆周方程都可以写为

$$z\bar{z} + \bar{a}z + a\bar{z} + b = 0, \quad b \in \mathbb{R},$$

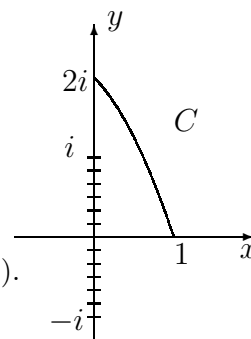
并求上述方程对应的圆周之圆心和半径.

(2) 证明: 复平面上的直线方程都可以写为

$$\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0, \quad b \in \mathbb{R}.$$

五、(15 分) 设 $f(z) = \sqrt{\frac{z+i}{z-i}}$.

- (1) 证明: $z = \infty$ 不是支点, 而 $z = i, -i$ 是支点;
 (2) 当 z 沿路径 C 从 1 走到 $2i$ 时, 分别求以下幅角变化:
 $\Delta_C \arg(z+i)$, $\Delta_C \arg(z-i)$;
 (3) 已知 $f(1) = e^{\frac{i\pi}{4}}$, 取支割线如图, 当 z 沿路径 C 从 1 走到 $2i$ 时, 求 $f(2i)$.



六、(12 分) 在反演变换 $w = \frac{1}{z}$ 下, 分别求以下区域对应的像区域.

- (1) 开圆盘 $\mathcal{D}_1: \{z \mid 0 \leq |z-i| < 1\}$;
 (2) 半平面 $\mathcal{D}_2: \{z \mid \operatorname{Re}(iz) < 1\}$.

七、(15 分) 设 $\mathcal{D}$ 是上半平面 $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.

- (1) 求分式线性变换 $w = f(z)$ 使得 $f(0) = -1$, $f(i) = 1+i$, 且像区域 $f(\mathcal{D})$ 仍为上半平面;
 (2) 求分式线性变换 $w = f(z)$ 使得 $f(1+i) = 0$, $\arg f'(1+i) = \frac{\pi}{2}$, 且像区域 $f(\mathcal{D})$ 为单位圆盘 $\{w \mid 0 \leq |w| < 1\}$.

八、(可选附加题, 10 分) 证明:

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{n})^n.$$