

华东师范大学期末试卷 (A): 2009—2010 学年第 1 学期

课程名称: 初 等 数 论

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: 2007 级

课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

一、(共 12 分) 简单叙述以下概念或结论(p 和 q 是奇素数):

- (1) 模 p 之原根; (2) 勒让德符号 $(\frac{q}{p})$; (3) 关于 p, q 之二次互反律; (4) 平方非剩余.

二、(20 分)(1) 分别求以下勒让德符号值

$$\left(\frac{6}{13}\right), \quad \left(\frac{7}{23}\right), \quad \left(\frac{-1}{13}\right)$$

(2) 求同余方程组 $x^2 \equiv -16 \pmod{65}$ 所有剩余类解.

(3) 举例说明: 雅克比符号值 $(\frac{n}{m})$ 为 1 时, 方程 $x^2 \equiv n \pmod{m}$ 不一定有解.

三、(16 分) (1) 求不定方程 $x^2 + 2y^2 = z^2$ 的正整数解, 此处 $(x, y) = 1$.

(2) 证明: 不定方程 $x^2 + y^2 = 3z^2$ 无正整数解.

四、(20 分) 设 p 是奇素数, g 是模 p 之原根.

(1) 设 a 是整数, $(a, p) = 1$, 证明: a 为另一原根的充要条件是 $(\text{ind}_g a, p-1) = 1$.

(2) 取 $p = 13, g = 2, a = 3$, 试求出 $\text{ind}_g a$ 以及模 13 的所有原根.

五、(共 20 分) (1) 证明威尔逊定理之逆命题: 若 $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$, 则 n 必为素数($n > 1$).

(2) 利用威尔逊定理求同余方程 $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ 之解, 此处 p 是模 4 余 1 的素数.

(3) 当 p 是模 4 余 3 的素数时, 求同余方程 $x^2 \equiv 2 \pmod{p}$ 之解

(提示: 利用和勒让德符号有关的欧拉公式).

六、(12 分) 设 p 是素数.

(1) 证明: 在模 p 中, 任何两个 p 次剩余之积也是 p 次剩余.

(2) 证明: 在模 p 中, 任何两个 p 次剩余之和也是 p 次剩余.