

华东师范大学期中试卷: 2009—2010 学年第 1 学期

课程名称: 初 等 数 论

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: 2007 级

课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

一、(共 12 分) 解释以下术语:

- (1) 算术基本定理; (2) 模 m 的完全剩余系; (3) 欧拉函数 $\varphi(n)$; (4) 费马小定理

二、(20 分) 设 $a = 975$, $b = 351$.

- (1) 用辗转相除法求 a 和 b 的最大公约数 (a, b) ;
 (2) 分别求 a 和 b 的标准素因子分解式;
 (3) 求 a 和 b 的最小公倍数 $[a, b]$.
 (4) 分别求欧拉函数值 $\varphi(a)$ 和 $\varphi(b)$.

三、(共 21 分) 求解同余方程(要求写出具体过程).

- (1) 利用欧拉定理求最小的正整数 x , 满足 $x \equiv 2^{2018} \pmod{105}$;
 (2) 求同余方程 $12x + 27 \equiv 0 \pmod{33}$ 的所有剩余类解.
 (3) 求以下同余方程组的剩余类解.

$$\begin{cases} x \equiv 1 & (\text{mod } 2), \\ x \equiv 2 & (\text{mod } 5), \\ x \equiv 5 & (\text{mod } 7). \end{cases}$$

四、(10 分) 设 $a > b > 0$, $(a, b) = 1$. 证明: 对任意正整数 m 和 n , 有

$$(a^m - b^m, a^n - b^n) = a^{(m,n)} - b^{(m,n)}.$$

五、(10 分) 证明: 形如 $4n - 1$ 的素数有无限个.

六、(12 分) 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ 是整系数多项式, 且 $a_0 a_n \neq 0$.

- (1) 证明: 方程 $f(x) = 0$ 的有理解只能是以 a_0 的因数作分子以 a_n 的因数作分母的既约分数.
 (2) 证明: $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

七、(共 15 分) 设 n 和 m 是正整数, 且 $m \mid n$.

(1) 考虑集合

$$X_m = \{h \in \mathbb{Z}^+ \mid (h, n) = m, \text{ 且 } h \leq n\}.$$

证明: 集合 X_m 中恰有 $\varphi(\frac{n}{m})$ 个元素.

- (2) 对任意素数 p , 存在无穷多个正整数 n , 使得 p 不整除 $\varphi(n)$.
 (3) 求所有正整数 n 使得 $\varphi(n) \mid n$.