

华东师范大学期末试卷(B): 2009—2010 学年第 1 学期

课程名称: 近 世 代 数

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: 2007 级

课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

注: 以下各题中, 总假设 G 是群, H 是子群; R 是环, I 是理想; $\mathbb{Z}_m$ 是模 m 的剩余类环;

一、(共 20 分) 解释以下术语:

- (1) 群的外直积; (2) 域; (3) 子环; (4) 主理想;

二、(共 16 分) 考虑环 $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6$.

- (1) 求出 R 中所有可逆元;
 (2) 求出 R 中所有零因子;
 (3) 写出 R 的主理想 $I = \langle (\bar{1}, \bar{2}) \rangle$ 中所有元素;
 (4) 在加法群 $(R, +)$ 中, 求出所有阶为 2 的元素.

三、(共 10 分) 设 $H = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ 是哈密顿四元数体.

设 $\alpha = 2 + \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\beta = 1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. 分别求以下值

$$\alpha + \beta, \quad \alpha\beta, \quad \beta\alpha, \quad \alpha^2, \quad \beta^{-1}.$$

四、(共 24 分) 设 $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ 是高斯整环, 主理想 $I = \langle 2 + i \rangle$.

- (1) 证明: $a + bi \in I$ 当且仅当 $a \equiv 2b \pmod{5}$.
 (2) 证明: 如下映射是环同态.

$$\phi: \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{Z}_5, \quad a + bi \mapsto \overline{a - 2b}.$$

(3) 证明: $\mathbb{Z}[i]/I \cong \mathbb{Z}_5$.

(4) 证明 I 是极大理想.

五、(共 10 分) 设 $R = \mathbb{C}[x]$ 是复系数多项式环, $I = \langle f(x) \rangle$ 是由多项式 $f(x)$ 生成的主理想. 证明: R/I 是整环的充要条件为 $f(x)$ 是一次多项式.

六、(共 20 分)

(1) 设 $\phi: \mathbb{Z}_{15} \rightarrow \mathbb{Z}_{15}$ 是环同态, $\bar{a} = \phi(\bar{1})$. 证明: $\bar{a}$ 只能取值为如下元素之一: $\bar{0}, \bar{1}, \bar{6}, \bar{10}$.

(2) 利用上述结论求出 $\mathbb{Z}_{15}$ 到 $\mathbb{Z}_{15}$ 的所有环同态; 并对每一种同态映射分别求出它的核与像.