

华东师范大学期末试卷(A): 2009—2010 学年第 1 学期

课程名称: 近 世 代 数

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: 2007 级

课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

注: 以下各题中, 总假设 R 是环, I 是理想; $\mathbb{Z}_m$ 是模 m 的剩余类环;

一、(共 20 分) 解释以下术语:

- (1) 群的内直积; (2) 整环; (3) 素理想; (4) 主理想.

二、(共 16 分) 考虑环 $R = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4$.

- (1) 求出 R 中所有可逆元;
 (2) 求出 R 中所有零因子;
 (3) 写出 R 的主理想 $I = \langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle$ 中所有元素;
 (4) 在加法群 $(R, +)$ 中, 求出所有阶为 2 的元素.

三、(共 10 分) 设 $H = \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ 是哈密顿四元数体. 设 $\alpha = 1 - \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\beta = 1 + 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. 分别求以下值

$$\alpha + \beta, \quad \alpha\beta, \quad \beta\alpha, \quad \alpha^2, \quad \beta^{-1}.$$

四、(共 24 分) 设 $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ 是高斯整环, 主理想 $I = \langle 1 - i \rangle$.

- (1) 证明: $a + bi \in I$ 当且仅当 $a \equiv b \pmod{2}$.
 (2) 直接用定义证明 I 是极大理想.
 (3) 证明: 如下映射是环同态.

$$\phi: \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{Z}_2, \quad a + bi \rightarrow \overline{a - b}.$$

(4) 用同态基本定理证明: $\mathbb{Z}[i]/I \cong \mathbb{Z}_2$.

五、(共 10 分) 直接用定义证明: 环 R 之零理想是素理想的充分必要条件为 R 不含零因子.

六、(共 20 分)

- (1) 设 $\phi: \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$ 是环同态, $\bar{a} = \phi(\bar{1})$. 证明 $\bar{a}$ 只能取为如下元素之一: $\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{9}$.
 (2) 利用上述结论求出 $\mathbb{Z}_{12}$ 到 $\mathbb{Z}_{12}$ 的所有环同态; 并对每一种同态映射分别求出它的核与像.