

华东师范大学期中试卷: 2009—2010 学年第 1 学期

课程名称: 近 世 代 数

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: 2007 级

课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

注: 以下各题中, 总假设 G 是群, H 是 G 的子群, e 是单位元; S_n 是 n 元对称群, A_n 是交错群; $\mathbb{Z}_m$ 是模 m 的剩余类加法群;

一、(共 20 分) 解释以下术语(任选 4 项):

- (1) 等价关系; (2) 正规子群; (3) 群同态; (4) 拉格朗日定理;
(5) 单群; (6) 循环群.

二、(共 15 分) 请判断以下结论是否正确. 如正确, 请给出简要证明; 如错误, 请构造反例.

- (1) 如果 G 是无限群, 那么 H 在 G 中有无限多个陪集;
(2) 假设 H 是 G 的非平凡子群(即 $H \neq \{e\}, G$), 那么 G 和 H 不可能同构;
(3) 3 阶群(即 $|G| = 3$)一定是单群.

三、(共 18 分) 设 $G = A_4$ 是 4 次交错群,

$$H = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

是 G 的子群.

- (1) 求 H 在 G 中的指数 $[G : H]$;
(2) 请判断以下三个陪集: $H, (12)(34)H$ 和 $(123)H$ 两两之间是否相同;
(3) 已知 H 是 G 的正规子群, 证明: G/H 是个循环群.

四、(共 15 分) 设 $G = S_4$, $\sigma = (132)$ 及 $\tau = (1234)$ 是 G 中的置换.

- (1) 分别求 σ, τ 和 $\sigma\tau$ 在 G 中的阶;
(2) 映射 $\phi: G \rightarrow G$ 定义为 $\phi(\delta) = \sigma\delta\sigma^{-1}, \forall \delta \in G$. 证明: ϕ 是 G 到 G 同构映射.

五、(共 12 分) 在整数集 $\mathbb{Z}$ 中, 规定运算 “ $\oplus$ ” 如下:

$$a \oplus b = a + b - 2, \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

- (1) 证明: $(\mathbb{Z}, \oplus)$ 构成群;
(2) 证明: $H = \{3n + 2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 是 $(\mathbb{Z}, \oplus)$ 的子群.

六、(共 20 分)

- (1) 设 $\phi: \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{15}$ 是群同态, $\bar{a} = \phi(\bar{1}) \in \mathbb{Z}_{15}$. 证明: $5 \mid a$. 请列出 $\mathbb{Z}_{15}$ 中所有满足此条件的 $\bar{a}$.
(2) 证明: 上述的同态由 $\bar{a} = \phi(\bar{1})$ 完全确定.
(3) 利用上述结论求出 $\mathbb{Z}_{12}$ 到 $\mathbb{Z}_{15}$ 所有的同态映射; 并对每一种同态映射分别求出它的核与像.