

连续方程与曲线空间上的概率测度

袁海荣 (华东师范大学 数学科学学院)

2021 年 8 月 7 日

连续性方程

- 连续性方程 — $\partial_t u + \nabla \cdot (v_t u) = 0$, $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, T]$. 注意: 线性方程. $u(x, t)$ 是未知函数, 系数 (向量场) $v_t(x) = v(x, t)$ 已知. 当 v 正则性低时, 线性问题的结论可用于研究非线性问题.
- 研究框架
 - 经典解 (连续可微函数空间; Hölder 空间) — 特征线方法 ($\leftrightarrow$ 常微分方程) + 隐函数定理; 最大模估计等.
 - 可积分弱解
 - Sobolev 空间 (能量积分 + 对偶方法; Fourier 变换; 泛函分析的 Riesz 表示定理)
 - BV 空间 (间断初值, Riemann 问题 + Glimm 泛函 + BV 空间的 Helly 紧性定理)
 - 测度值解
 - 测度解: $u(\cdot, t)$ 是物理空间 $\mathbb{R}^d$ 上随时间演变的测度, 刻画物质的分布变化情况; 进一步抽象为路径空间上的测度, 支在特征线上.
 - 概率解: $u(x, t)$ 是在相空间 $\mathbb{R}$ 上的概率测度, 反映在给定时间 t , 给定地点 x , 在 $\mathbb{R}$ 上取值的概率分布;
 - 统计解: 在函数空间上的概率测度, 给出了解是某些范围内的函数的可能性大小.
- 与其他问题的联系: 粘性消失法与 Brown 运动; 推广到初边值问题; 零压流等.

连续性方程的测度解

- 连续性方程: $-\partial_t \mu_t + \nabla \cdot (v_t \mu_t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, T].$
- 假设: (复习: 设 (X, d) 是可分的度量空间, 则它完备(紧) 当且仅当 $(\mathcal{P}(X), d_P)$ 完备(紧). 这里 d_P 是 Prokhrov 度量.)
 - $\mu_t: t \in [0, T] \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ 是一族 Borel 可测的 $\mathbb{R}^d$ 上的 Borel 概率测度 ($\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ 是完备度量空间);
 - $v: (x, t) \mapsto v_t(x) \in \mathbb{R}^d$ 是 Borel 可测的向量场, 且 (♣) $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |v_t(x)| d\mu_t(x) dt < \infty.$
- 测度解: 称 $\{\mu_t\}_{t \in [0, T]}$ 是连续方程的一个测度解, 如果对任意的 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, T))$, 成立 (注意 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的内积)

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \left(\partial_t \phi(x, t) + \langle v_t(x), \nabla_x \phi(x, t) \rangle \right) d\mu_t(x) dt = 0. \quad (\boxtimes)$$

- 为了使 $(\boxtimes)$ 有意义, 条件 (♣) 似乎是必须的.
- 测试函数空间可扩大为 $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^d \times (0, T))$; 进一步可放松为要求 $\phi \in W^{1, \infty}(\mathbb{R}^d \times (0, T))$, 且 $\text{supp } \phi \subset \mathbb{R}^d \times (0, T)$. (由条件 (♣), 对空间变量不需要紧致支集. 证明概要: 取 $\chi_R \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $0 \leq \chi_R \leq 1$, $|\nabla \chi_R| \leq 2$, 且在 $B_R(O)$ 上 $\chi_R \equiv 1$. 以 $\chi_R \phi$ 作为测试函数, 令 $R \rightarrow \infty$.)
- $(\boxtimes)$ 的等价形式: 在 $[0, T]$ 的广义函数意义下成立

$$\left[\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \xi(x) d\mu_t(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla \xi(x), v_t(x) \rangle d\mu_t(x) \right], \quad \forall \xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d). \quad (\diamond)$$

证明概要: 形如 $\eta(t)\xi(x)$ 的函数的线性组合在 $C_c^1(\mathbb{R}^d \times [0, T])$ 中稠密, 其中 $\eta \in C_c^\infty(0, T)$.

映射诱导测度与积分换元公式

- 设 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 是测度空间, $(Y, \mathcal{F})$ 是可测空间, $\Phi: X \rightarrow Y$ 是可测映射. 可定义 $(Y, \mathcal{F})$ 上推进测度 $\Phi_{\#}\mu$:

$$\Phi_{\#}\mu(F) = \mu(\Phi^{-1}(F)), \forall F \in \mathcal{F}. \text{ (验证!)}$$

- 设 $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ 是有界可积函数, 则成立公式
$$\int_X f(\Phi(x)) \, d\mu(x) = \int_Y f(y) \, d\Phi_{\#}\mu(y).$$

胎紧

设 (X, d) 是度量空间, $\mathcal{B}(X)$ 是其 Borel σ 代数, $\mathcal{P}(X)$ 是 X 上 Borel 概率测度组成的集合. $C_b(X)$ 是 X 上连续有界函数按最大模 (一致收敛拓扑) 得到的 Banach 空间.

- 窄收敛: 称 $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{P}(X)$ 窄收敛 (narrowly convergent) 到 $\mu \in \mathcal{P}(X)$, 若对任意的 $f \in C_b(X)$, 都成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f(x) d\mu_n(x) = \int_X f(x) d\mu(x)$.
- Prokhorov 度量: 对 $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$, 定义 $d_P(\mu, \nu) = \inf\{\alpha > 0 : \mu(A) \leq \nu(A_\alpha) + \alpha, \text{ 且 } \nu(A) \leq \mu(A_\alpha) + \alpha, \forall A \in \mathcal{B}(X)\}$, 其中 $A_\alpha = \{x \in X : d(x, A) < \alpha\}$, 约定 $\emptyset_\alpha = \emptyset, \forall \alpha > 0$.
- 定理: 设 X 是可分度量空间, 则 $(\mathcal{P}(X), d_P)$ 也是可分的. 设 X 可分, 若它还完备 (紧), 则 $(\mathcal{P}(X), d_P)$ 也完备 (紧). X 可分时, μ_n 窄收敛到 μ 当且仅当 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_P(\mu_n, \mu) = 0$.
- 胎紧: 称度量空间 X 上概率空间 $\mathcal{P}(X)$ 的子集 $\mathcal{K}$ 是胎紧 (tight) 的, 如果(*) 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 X 的紧子集 K_ϵ , 使得对任意的 $\mu \in \mathcal{K}$, 有 $\mu(X \setminus K_\epsilon) \leq \epsilon$.
- Prokhorov 定理: 设 X 是完备可分度量空间 (Polish 空间), 则 $\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{P}(X)$ 的相对紧子集 (即闭包 $\bar{\mathcal{K}}$ 是 $\mathcal{P}(X)$ 的紧子集), 当且仅当它是胎紧的.
- 特别的, 若 $\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{P}(X)$ 中的胎紧子集, 则其中任意点列都有子列窄收敛到一个概率测度.

胎紧的判定

- 胎紧的条件 (*) 与如下条件等价: 存在函数 $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$, 它的下水平集 $\{x \in X: \varphi(x) \leq c\}$ 对任意 $c \in \mathbb{R}$ 是 X 的紧子集, 且 $\sup_{\mu \in \mathcal{K}} \int_X \varphi(x) d\mu(x) < \infty$.
- 定理: 设 $X, X_1, \dots, X_N$ 是可分度量空间, $r_i: X \rightarrow X_i$ 是连续映射, 且 $r = r_1 \times \dots \times r_N: X \rightarrow X_1 \times \dots \times X_N$ 是完备 (proper) 映射. 又设 $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ 满足 $\mathcal{K}_i = (r_i)_\#(\mathcal{K})$ 在 $\mathcal{P}(X_i)$ 中胎紧, $i = 1, \dots, N$, 则 $\mathcal{K}$ 在 $\mathcal{P}(X)$ 中胎紧.
- 概念 (紧映射): 设 X, Y 是拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$ 具有性质: $\forall y \in Y, f^{-1}(\{y\})$ 是 X 中紧子集, 则称 f 是个紧映射.
- 概念 (完备映射): 也叫逆紧映射. 设 X, Y 是拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$ 是紧的连续映射, 且是闭映射 (将闭集映为闭集), 则称 f 是个完备映射.
- 从紧空间到 Hausdorff 空间的连续映射是完备映射; 完备映射的复合是完备映射; 完备映射在闭集上的限制是完备映射.
- 完备映射下, 紧集的原像是紧集.
- 设 $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, ρ_ϵ 是标准的磨光算子, 则 $\{\mu_\epsilon \doteq \mu * \rho_\epsilon\}$ 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时窄收敛到 μ . 特别的, $\{\mu_\epsilon\}$ 是胎紧的. (习题)
- 设 $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ 胎紧, $\Phi: X \rightarrow Y$ 可测, 则 $\Phi_\#(\mathcal{K})$ 在 $\mathcal{P}(Y)$ 中胎紧. (习题)

Polish 空间中的有限 Borel 测度是胎紧的

- Polish 空间: 完备的可分度量空间
- 定理 [度量空间中紧集的刻画]: 设 X 是完备度量空间, 则 $K \subset X$ 是 (覆盖意义下) 紧子集, 当且仅当它是完全有界的, 即对任意的 $\epsilon > 0$, 存在有限个点 $x_i, i = 1, \dots, N$, 使得 $K \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \epsilon)$
- 定理: Polish 空间中的有限 Borel 测度是胎紧的.

证明 设 (X, d) 是完备且可分的度量空间, μ 是 X 上的 Borel 测度, 且 $\mu(X) < \infty$. 要证明: $\forall \epsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset X$, 使得 $\mu(X \setminus K) < \epsilon$,

1. 取 X 的可列的稠密点集 $\{x_1, x_2, \dots\}$, 则对任意 $\delta > 0$, 都有 $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_k, \delta)$, 于是

$\mu(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\bigcup_{k=1}^n B(x_k, \delta))$. 由此, 对任意 $m \in \mathbb{N}$, 存在 n_m 使得 $\mu(\bigcup_{k=1}^{n_m} B(x_k, \frac{1}{m})) > \mu(X) - \frac{\epsilon}{2^m}$.

2. 作 $K = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{n_m} B(x_k, \frac{1}{m})$, 它是个闭集. 先用完全有界性说明 K 紧. 事实上, 对任意 $\delta > 0$, 取自然数 $m > 1/\delta$, 就有 $K \subset \bigcup_{k=1}^{n_m} B(x_k, \frac{1}{m}) \subset \bigcup_{k=1}^{n_m} B(x_k, \delta)$.

3. 最后, $\mu(X \setminus K) = \mu(\bigcup_{m=1}^{\infty} X \setminus (\bigcup_{k=1}^{n_m} B(x_k, \frac{1}{m}))) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(X \setminus (\bigcup_{k=1}^{n_m} B(x_k, \frac{1}{m}))) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\mu(X) - \mu(\bigcup_{k=1}^{n_m} B(x_k, \frac{1}{m})) \right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\mu(X) - \mu(\bigcup_{k=1}^{n_m} B(x_k, \frac{1}{m})) \right) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^m} = \epsilon$. 证毕!

连续方程测度解的正则性

Theorem

设 μ_t 是一族 Borel 可测的 $\mathbb{R}^d$ 上的概率测度, 满足

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \xi(x) d\mu_t(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla \xi(x), v_t(x) \rangle d\mu_t(x), \quad \forall \xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \quad (\diamond)$$

其中 Borel 向量场 $v_t(x)$ 满足 $\int_0^T |v_t(x)| d\mu_t(x) dt < \infty$. 那么存在窄连续的曲线 $t \in [0, T] \mapsto \tilde{\mu}_t \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, 使得对 $\mathcal{L}^1$ -a.e. $t \in [0, T]$, 有 $\mu_t = \tilde{\mu}_t$. 此外, 若 $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^d \times [0, T])$, $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, 成立

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x, t_2) d\tilde{\mu}_{t_2}(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x, t_1) d\tilde{\mu}_{t_1}(x) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\partial_t \phi + \langle \nabla \phi, v_t \rangle \right) d\mu_t(x) dt. \quad (\heartsuit)$$

证明: 1. 由条件, 对任意的 $\xi \in \mathbb{R}^d$, 函数 $t \mapsto \mu_t(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \xi(x) d\mu_t(x) \in W^{1,1}(0, T)$. (注意测度 μ_t 是 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上的连续线性泛函). 特别的, 其弱导数是 $\dot{\mu}_t(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla \xi(x), v_t(x) \rangle d\mu_t(x)$, $\mathcal{L}^1$ -a.e. $t \in [0, T]$. 我们有 $|\dot{\mu}_t(\xi)| \leq \sup_{\mathbb{R}^d} |\nabla \xi| V(t)$, 其中 $V(t) = \int_{\mathbb{R}^d} |v_t(x)| d\mu_t(x) \in L^1(0, T)$.

2. (如何从几乎处处到的处处). 记 $I(\xi) \subset [0, T]$ 是函数 $\mu_t(\xi)$ 的 Lebesgue 点, 则 $\mathcal{L}^1([0, T] \setminus I_\xi) = 0$. 现取可列集 $\mathcal{Z} \subset C_c^1(\mathbb{R}^d)$, 它在 $C_c^0(\mathbb{R}^d)$ 中稠密. 置 $I_{\mathcal{Z}} = \cap_{\xi \in \mathcal{Z}} I_\xi$, 则 $\mathcal{L}^1(I_{\mathcal{Z}}) = 1$, 从而在 $[0, T]$ 中稠密.

3. 对 $\xi \in \mathcal{Z}$, $\mu_t(\xi)$ 限制在 $I_{\mathcal{Z}}$ 上是有意义的. 对 $s < t \in I_{\mathcal{Z}}$, 有 $|\mu_t(\xi) - \mu_s(\xi)| = \left| \int_s^t \dot{\mu}_{\tau}(\xi) d\tau \right| \leq |\xi|_{C^1} \int_s^t V(\tau) d\tau$. 这就是说 $\mu_t(\xi)$ 关于 t 是一致连续的, 从而可延拓为 $[0, T]$ 上连续的函数, 记为 $\tilde{\mu}_t(\xi)$.

此外, 对任意 $t \in [0, T]$, 仍有 $|\tilde{\mu}_t(\xi)| = |\lim_{s \in I_{\mathcal{Z}}, s \rightarrow t} \mu_s(\xi)| \leq \|\xi\|_{C^0}$, 所以利用 $\xi \in \mathcal{Z}$ 的稠密性, 它可关于 ξ 延拓为 $C_c^0(\mathbb{R}^d)$ 上的连续线性泛函, 记之为 $\tilde{\mu}_t$. 显然 $\tilde{\mu}_t = \mu_t$, a.e. $t \in [0, T]$. 利用三角不等式和上述估计, 不难证明对任意 $\eta \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$, $\tilde{\mu}_t(\eta)$ 关于 t 的连续性. 所以为证明 $\tilde{\mu}_t$ 的窄连续性, 只要说明它是 $\mathbb{R}^d$ 上的概率测度.

4. 为此, 我们只需证明 $\{\mu_t\}_{t \in [0, T]}$ 的胎紧性. 考虑非负光滑函数 $\xi_k: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$, 满足: $|x| \leq k$ 时 $\xi_k = 1$, $|x| \geq k+1$ 时 $\xi_k = 0$, $|\nabla \xi_k| \leq 2$. 不妨设 $\xi_k \in \mathcal{Z}$. 对 $s, t \in I_{\mathcal{Z}}$, 用 $\dot{\mu}_t(\xi_k)$ 的表达式, 成立

$|\mu_t(\xi_k) - \mu_s(\xi_k)| \leq a_k \doteq 2 \int_0^T \int_{k < |x| < k+1} |v_t(x)| d\mu_t(x) dt$. 由向量场 v_t 满足的条件, 知道 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$. 现在固定 s . 对任意 $\epsilon > 0$, 由 μ_s 的胎紧性, 当 k 充分大时, $\mu_s(\xi_k) \geq \mu_s(B(0; k)) \geq 1 - \frac{\epsilon}{2}$; 再取 k 更大, 使得 $a_k < \epsilon/2$. 于是, 对任意 $t \in [0, T]$, $\mu_t(\overline{B_{k+1}(O)}) \geq \mu_t(\xi_k) \geq \mu_s(\xi_k) - a_k \geq 1 - \epsilon$.

5. 最后证明 (♥). 取 $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^d \times (0, T))$, 置 $\phi_{\epsilon}(x, t) = \eta_{\epsilon}(t)\phi(x, t)$, 其中 $\eta_{\epsilon} \in C_c^{\infty}[-1, T+1)$, $0 \leq \eta_{\epsilon}(t) \leq 1$, 且 $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \eta_{\epsilon}(t) = \chi_{(t_1, t_2)}(t)$, $\forall t \in [0, T]$, 又在广义函数意义下, $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \eta'_{\epsilon}(t) = \delta_{t_1} - \delta_{t_2}$. (这样的 η_{ϵ} 可从区间的特征函数磨光后得到.) 代入 (◇), 有

$$0 = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \left(\partial_t(\eta_{\epsilon}\phi) + \langle \nabla_x(\eta_{\epsilon}\phi), v_t \rangle \right) d\mu_t(x) dt = \int_0^T \eta_{\epsilon}(t) \int_{\mathbb{R}^d} \left(\partial_t\phi + \langle \nabla_x\phi, v_t \rangle \right) d\mu_t(x) dt + \int_0^T \eta'_{\epsilon}(t) \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x, t) d\tilde{\mu}_t(x) dt.$$

注意到 $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x, t) d\tilde{\mu}_t(x)$ 关于 t 的连续性, 让 $\epsilon \rightarrow 0$, 就得到

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\partial_t\phi + \langle \nabla_x\phi, v_t \rangle \right) d\mu_t(x) dt = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x, t_2) d\tilde{\mu}_{t_2}(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x, t_1) d\tilde{\mu}_{t_1}(x). \text{ 证毕!}$$

常微分方程

Theorem

设 v_t 是 Borel 向量场, $\forall B \subset \mathbb{R}^d$ 是紧集, 有 $\int_0^T \left(\sup_B |v_t| + \text{Lip}_B |v_t| \right) dt < \infty$, 则 $\forall x \in \mathbb{R}^d, s \in [0, T]$, Cauchy 问题

$\frac{d}{ds} X_t(x, s) = v_t(X_t(x, s)), \quad X_s(x, s) = x$ 有唯一的定义在区间 $I(x, s)$ 上的极大解, 而 $I(x, s) \subset [0, T]$ 是相对开集, s 是其内点.

此外, 若 $t \mapsto |X_t(x, s)|$ 在 $I(x, s)$ 的内部有界, 则 $I(x, s) = [0, T]$. 最后, 若 v_t 满足如下整体有界性:

$S = \int_0^T \left(\sup_{\mathbb{R}^d} |v_t| + \text{Lip}_{\mathbb{R}^d} |v_t| \right) dt < \infty$, 则映射 X 满足不等式

$$\int_0^T \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_t X_t(x, s)| ds \leq S, \quad \sup_{s, t \in [0, T]} \text{Lip}_{\mathbb{R}^d} X_t(\cdot, s) \leq e^S.$$

证明: 略.

具正则向量场时连续方程测度解的存在性

Lemma

设 Borel 向量场 v_t 满足 (**): $\int_0^T \left(\sup_{\mathbb{R}^d} |v_t| + \text{Lip}_{\mathbb{R}^d} |v_t| \right) dt < \infty$, X_t 是如下 Cauchy 问题的解: $\frac{d}{dt} X_t(x) = v_t(X_t(x))$, $X_0(x) = x$. 那么, $t \mapsto \mu_t \doteq (X_t)_\# \mu_0$ 是连续方程 $\partial_t \mu_t + \nabla(v_t \mu_t) = 0$ 在 $[0, T]$ 上的一个连续的测度解.

- 连续性: 由常微分方程的结论, $X_t(x)$ 存在且 (绝对) 连续. 对任意连续有界函数 $\zeta: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{s \rightarrow t} \int_{\mathbb{R}^d} \zeta(y) d\mu_s(y) = \lim_{s \rightarrow t} \int_{\mathbb{R}^d} \zeta(X_s(x)) d\mu_0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \zeta(X_t(x)) d\mu_0(x)$. 这里最后一个等号用了控制收敛定理. 这就证明了 $\{\mu_t\}$ 是窄连续的.
- 由 $\int_0^T \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |v_t(x)| dt < \infty$, 容易看出成立 $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |v_t(x)| d\mu_t(x) dt < \infty$. 在关于 v_t 更弱条件下如何验证此要求是一个问题!
- μ_t 是解. 对任意 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, T))$, $x \in \mathbb{R}^d$, 映射 $t \mapsto \Phi_t(x) \doteq \phi(X_t(x), t)$ 在 $[0, T]$ 上绝对连续:
 $\dot{\Phi}_t(x) = \partial_t \phi(X_t(x), t) + \langle \nabla \phi(X_t(x), t), v_t(X_t(x)) \rangle \doteq \Lambda(\cdot, t) \circ X_t(x)$. 这里 $\Lambda(x, t) = \partial_t \phi(x, t) + \langle \nabla_x \phi(x, t), v_t(x) \rangle$. 为了后面用 Fubini 定理, 这里计算
 $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |\dot{\Phi}_t(x)| d\mu_0(x) dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda(X_t(x), t)| d\mu_0(x) dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda(x, t)| d\mu_t(x) dt \leq \text{Lip}(\phi) \left(T + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |v_t(x)| d\mu_t(x) dt \right) < \infty$.
 注意到 $\phi(x, 0) = \phi(x, T) = 0$, 于是 $0 = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x, T) d\mu_T(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x, 0) d\mu_0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\phi(X_T(x), T) - \phi(x, 0) \right) d\mu_0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^T \dot{\Phi}_t(x) dt d\mu_0(x) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \Lambda(\cdot, t) \circ X_t(x) d\mu_0(x) dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \Lambda(x, t) d\mu_t(x) dt$. 代入 $\Lambda(x, t)$ 的表达式, 就得到 $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \left(\partial_t \phi(x, t) + \langle \nabla_x \phi(x, t), v_t(x) \rangle \right) d\mu_t(x) dt = 0$. 由 ϕ 的任意性, 得知 μ_t 是测度解.

注意: 如果已假设测度解 μ_t 存在, 条件 (**) 中 $\mathbb{R}^d$ 可换作 $\mathbb{R}^d$ 中任意的紧集. 此时解的表示 $\mu_t = (X_t)_\# \mu_0$ 仍成立, 其中 $t \in [0, \bar{t}]$. 此时需假设从 x 出发的特征线的存在时间 $\tau(x)$ 有正下界 $\bar{t}$.

一阶线性输运方程的倒向初值问题

Lemma

设 $\psi \in C_b^1(\mathbb{R}^d \times [0, T])$, $\phi_T \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$, 向量场 $v_t(x)$ 满足 $S = \int_0^T \left(\sup_{\mathbb{R}^d} |v_t| + \text{Lip}_{\mathbb{R}^d}(v_t) \right) dt < \infty$. 那么 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \partial_t \phi + \langle v_t, \nabla_x \phi \rangle = \psi, & (x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, T], \\ \phi(x, T) = \phi_T(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

存在解 $\phi(x, t) = \phi_T(X_T(x, t)) - \int_t^T \psi(X_s(x, t), s) ds$, 这里 $X_t(x, s)$ 是如下常微分方程 Cauchy 问题的极大解:

$$\frac{d}{ds} X_t(x, s) = v_t(X_t(x, s)), \quad X_t(x, s) = x.$$

- 首先验证等式 $X_s(X_t(x, 0), t) = X_s(x, 0)$. 除了几何意义, 也可计算验证: $s = 0$ 时左右两边都是 x ; 两端对 s 求导, 都满足同样的方程.
- 从 $\phi(x, t)$ 表达式知道它的偏导数几乎处处存在. 为了避免直接求导验证的麻烦, 将 x 换做 $X_t(x, 0)$, 得到 $\phi(X_t(x, 0), t) = \phi_T(\underbrace{X_T(X_t(x, 0), t)}_{=X_T(x, 0)}) - \int_t^T \psi(\underbrace{X_s(X_t(x, 0), t)}_{=X_s(x, 0)}, s) ds$. 两边对 t 求导, 就得到 $(\partial_t \phi + \langle v_t, \nabla \phi \rangle)(X_t(x, 0), t) = \psi(X_t(x, 0), t)$. 由 $X_t(x, 0)$ 的任意性, 就得到上述定义的 ϕ 满足输运方程.
- 显然, $\phi(x, T) = \phi_T(x)$, 终值条件成立. (该输运方程终值问题是连续方程初值问题的分布积分意义下的对偶问题.)

连续方程测度解的比较原理及唯一性

Lemma

设 $\{\sigma_t\}_{0 \leq t \leq T}$ 是一族窄连续的 $\mathbb{R}^d$ 上的符号测度, 满足 $\partial_t \sigma_t + \nabla \cdot (v_t \sigma_t) = 0$, 其中向量场 v_t 满足:
 $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |v_t(x)| d|\sigma_t(x)| dt < \infty$, 且对任意紧集 $B \subset \mathbb{R}^d$, 有 $\int_0^T (|\sigma_t(B)| + \sup_B |v_t| + \text{Lip}_B(v_t)) dt < \infty$. 那么如果 $\sigma_0 \leq 0$, 就有 $\sigma_t \leq 0, \forall t \in [0, T]$.

- 向量场的截断和延拓磨光. 对任意充分大的 $R > 0$, 定义向量场 w_t 如下: 在 $B_{2R}(O) \times (0, T)$ 上 $w_t = v_t$, 在 $t \notin (0, T)$ 时 $w_t \equiv 0$, 且 $\sup_{\mathbb{R}^d} |w_t| + \text{Lip}_{\mathbb{R}^d}(w_t) \leq \sup_{B_{2R}(O)} |v_t| + \text{Lip}_{B_{2R}(O)}(v_t), \forall t \in [0, T]$. 再将 w_t 关于 x 和 t 作标准磨光, 得到光滑向量场 w_t^ϵ , 它满足 $S = \sup_{\epsilon \in (0, 1)} \int_0^T (\sup_{\mathbb{R}^d} |w_t^\epsilon| + \text{Lip}_{\mathbb{R}^d}(w_t^\epsilon)) dt < \infty$.
- 取定 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, T))$, 满足 $0 \leq \psi \leq 1$. 求解如下问题: $\partial_t \phi^\epsilon + \langle w_t^\epsilon, \nabla_x \phi^\epsilon \rangle = \psi, \mathbb{R}^d \times [0, T]; \phi^\epsilon(x, T) = 0$. 我们知道它有非正的光滑解 $\phi^\epsilon(x, t) = - \int_t^T \psi(X_s^\epsilon(x, 0), s) ds$, 其中 $X_s^\epsilon(x)$ 满足条件: $X_s^\epsilon(x, s) = x, \frac{d}{dt} X_t^\epsilon(x, s) = w_t^\epsilon(X_t^\epsilon(x, s))$. 根据前面常微分方程理论, $\sup_{s, t \in [0, T]} \text{Lip}_{\mathbb{R}^d}(X_t^\epsilon(\cdot, s)) \leq e^S$.
- 由于 $\psi \in [0, 1]$, 直接可得 $-T \leq \phi^\epsilon(x, t) \leq 0$. 此外, $|\nabla \phi^\epsilon| \leq \int_t^T |\nabla \psi| |\partial_x X_s^\epsilon(x, 0)| ds \leq \|\nabla \psi\|_{L^\infty} e^S T$. 也就是说, $|\nabla \phi^\epsilon| \leq C$ 与 ϵ, t, x 无关.
- 取函数 $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, 对前述截断 v_t 的 R , 使得 $\chi_R(x) = \chi(\frac{x}{R})$ 具有如下性质: $0 \leq \chi_R \leq 1, |\nabla \chi_R| \leq 2/R$, 在 $B_R(O)$ 上 $\chi_R \equiv 1$, 在 $B_{2R}(O)$ 外 $\chi_R \equiv 0$. 所以, 在 $\text{supp } \chi_R \times (0, T)$ 上 $v_t = w_t$. 现在连续方程测度解的定义中 (第 8 页 (♡)), 取测试函数为 $\chi_R \phi^\epsilon$. (对偶方法的关键!), 注意到 $\phi^\epsilon|_{t=T} = 0$, 以及符号测度 $\sigma_0 \leq 0$, 函数 $\phi^\epsilon \leq 0$, 于是 (蓝色项用到了 ϕ^ϵ 满足的方程)
 $0 \geq - \int_{\mathbb{R}^d} \phi^\epsilon \chi_R d\sigma_0 = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (\chi_R \partial_t \phi^\epsilon + \langle v_t, \chi_R \nabla \phi^\epsilon + \phi^\epsilon \nabla \chi_R \rangle) d\sigma_t dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (\chi_R (\psi - \langle w_t^\epsilon, \nabla \phi^\epsilon \rangle) + \chi_R \langle v_t, \nabla \phi^\epsilon \rangle + \phi^\epsilon \langle \nabla \chi_R \rangle) d\sigma_t dt$.

于是, 我们得到

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \chi_R \left(\psi + \langle v_t - w_t^\epsilon, \nabla \phi^\epsilon \rangle \right) d\sigma_t dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \phi^\epsilon \langle \nabla \chi_R, v_t \rangle d\sigma_t dt \\ &\geq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \chi_R \left(\psi + \langle v_t - w_t^\epsilon, \nabla \phi^\epsilon \rangle \right) d\sigma_t dt - T \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \chi_R| |v_t| d|\sigma_t| dt \end{aligned}$$

利用 $|\nabla \phi^\epsilon|$ 的一致有界性, 以及 $\text{supp } \chi_R \times (0, T)$ 上 $w_t = v_t$, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 可得

$\left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \chi_R \langle v_t - w_t^\epsilon, \nabla \phi^\epsilon \rangle d\sigma_t dt \right| \leq C \int_0^T \int_{\text{supp } \chi_R} |v_t - v_t^\epsilon| d|\sigma_t| dt \rightarrow 0$ (控制收敛定理). 于是从上式我们得到 $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \chi_R \psi d\sigma_t dt \leq T \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \chi_R| |v_t| d|\sigma_t| dt \leq \frac{2T}{R} \int_0^T \int_{R < |x| < 2R} |v_t| d|\sigma_t| dt \leq \frac{2T}{R} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |v_t| d|\sigma_t| dt < C'/R$. 这里用到了定理中关于 $|v_t|$ 的可积条件. (我们发现此条件可减弱.) 让 $R \rightarrow \infty$, 就得到 $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \chi_R \psi d\sigma_t dt \leq 0$, 于是由 ψ 的任意性, 必有 $\sigma_t \leq 0$. (注意 σ_t 窄连续, 所以对 $t \in [0, T]$ 点点成立.) 证毕!

推论: 在引理关于 v_t 的假设下, 连续方程测度解的唯一性.

连续方程测度解的表示

Lemma

设 $\{\mu_t\}_{t \in [0, T]}$ 窄连续, 是连续方程 $\partial_t \mu_t + \nabla \cdot (v_t \mu_t) = 0$ 的测度解, 其中 Borel 向量场 v_t 满足条件: 对任意的紧集 $B \subset \mathbb{R}^d$, $\int_0^T \left(\sup_B |v_t| + \text{Lip}_B |v_t| \right) dt < \infty$, 以及可积条件 $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |v_t(x)| d\mu_t(x) dt < \infty$. 结论: 对 μ_0 -a.e. $x \in \mathbb{R}^d$, 特征方程 $\frac{d}{dt} X_t(x) = v_t(X_t(x))$, $X_0(x) = x$ 在 $[0, T]$ 上存在整体解 $X_t(x)$, 且 $\mu_t = (X_t)_\# \mu_0, \forall t \in [0, T]$.

- 记 $E_s = \{x \in \mathbb{R}^d : \tau(x) > s\}$ ($\tau(x)$ 是从 x 出发的特征曲线的存在时间). 由前面测度解的存在性的引理, 可知 $t \mapsto (X_t)_\#(\chi_{E_s} \mu_0)$ 是连续方程在 $[0, s]$ 上的解. 由比较原理, $(X_t)_\#(\chi_{E_s} \mu_0) \leq \mu_t, \forall 0 \leq t \leq s$.
- 将上述不等式用于 $s = t$ 的情形, 计算 $\int_{\mathbb{R}^d} \sup_{t \in [0, \tau(x)]} |X_t(x) - x| d\mu_0(x) \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^{\tau(x)} |\dot{X}_t(x)| dt d\mu_0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^{\tau(x)} |v_t(X_t(x))| dt d\mu_0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^T \chi_{\{\tau(x) > t\}} |v_t(X_t(x))| dt d\mu_0(x) = \int_0^T \int_{E_t} |v_t(X_t(x))| d\mu_0(x) dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |v_t(X_t(x))| d(\chi_{E_t} \mu_0(x)) dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |v_t(x)| d(X_t)_\#(\chi_{E_t} \mu_0(x)) dt \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |v_t(x)| d\mu_t dt < \infty$. 这表明对 μ_0 -a.e. x , $X_t(x)$ 在 $[0, \tau(x)]$ 上有界, 从而根据常微分方程解的延拓, $\tau(x) = T$. 证毕!

特征曲线上的概率测度与连续方程的测度解

绝对连续曲线: 设 (X, d) 是完备度量空间, 称曲线 $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ 属于 $AC^p(a, b; X)$, 其中 $p \in [1, \infty)$, 如果存在函数 $m \in L^p(a, b)$, 使得 $d(\gamma(s), \gamma(t)) \leq \int_s^t m(\tau) d\tau, \forall a < s \leq t < b$. $p = 1$ 时这样的 γ 叫做绝对连续曲线.

Theorem (主定理)

对 $\mathbb{R}^d \times [0, T]$ 上的连续方程 $\partial_t \mu_t + \nabla \cdot (v_t \mu_t) = 0$, 设 Borel 速度场 $v(x, t) = v_t(x)$ 满足条件: 存在 $p > 1$ 使得 $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |v_t(x)|^p d\mu_t(x) dt < \infty$. 又设 $\mu_t: [0, T] \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ 是窄连续的测度解, 则存在 $\mathbb{R}^d \times \Gamma_T$ 上的概率测度 η , (这里 $\Gamma_T = C([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d)$), 使得

- i) η 集中在具有如下性质的点 (x, γ) 构成的集合上: $\gamma \in AC^p(0, T; \mathbb{R}^d)$ 是如下常微分方程 Cauchy 问题的解:
 $\dot{\gamma}(t) = v_t(\gamma(t)), \mathcal{L}^1 - \text{a.e.}, t \in [0, T]; \gamma(0) = x;$
- ii) 对 $t \in [0, T]$, 作赋值映射 $e_t: (x, \gamma) \in \mathbb{R}^d \times \Gamma_T \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^d$, 则 $\mu_t = \mu_t^\eta \doteq (e_t)_\#(\eta)$, 且成立等式:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu_t^\eta = \int_{\mathbb{R}^d \times \Gamma_T} \varphi(\gamma(t)) d\eta(x, \gamma), \quad \forall \varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^d), t \in [0, T]. \quad (\#)$$

反之, 设 η 满足上述 i), 且 $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d \times \Gamma_T} |v_t(\gamma(t))| d\eta(x, \gamma) dt < \infty$ (b), 则由 (#) 定义的 μ_t^η 就是连续方程的测度解, 且 $\mu_0 = (\gamma(0))_\# \eta$.

- 测度 η 的直观理解: 将一条曲线 γ 等同于一个粒子, 则 $\eta(\gamma)$ 就是粒子 γ 的质量. (粒子不是数学概念, 于是数学上将粒子用它的运动轨道—曲线—来表示). 若 A 是曲线的集合, 则 $\eta(A)$ 是轨迹在 A 中的粒子的质量. 输运方程表示初始质量分布 μ_0 依照速度场 v_t 运动. 这里涉及 Lagrange 坐标与 Euler 坐标的观点.
- 该定理的意义: 当向量场 v_t 正则性低, 不能保证特征线的唯一性时, 该定理仍提供了对连续方程的一种认识. 缺点: 没有说明如何构造曲线空间上测度 η . 需要其他方法 (Kolmogorov 扩张定理, 或紧性方法等.)
- (‡) 式的验证: 用推进映射定义测度的积分换元公式, 若 $\mu_t^\eta = (e_t)_\#(\eta)$, 则
$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) d\mu_t^\eta(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) d(e_t)_\#(\eta)(y) = \int_{\mathbb{R}^d \times \Gamma_T} \varphi((e_t)(x, \gamma)) d\eta(x, \gamma) = \int_{\mathbb{R}^d \times \Gamma_T} \varphi(\gamma(t)) d\eta(x, \gamma).$$
 这里 $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^d)$, 即 $\mathbb{R}^d$ 上有界连续函数. $\Gamma_T = C([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d)$ 是连续曲线的空间.
- 向量场 v_t 光滑时 η 的构造方法: 此时 v_t 确定了 $t = 0$ 时过 x 点的特征线 $X_t(x)$, 它诱导了 $\mathbb{R}^d$ 上微分同胚族 $x \mapsto X_t(x)$ 以及曲线 (流) $t \mapsto X_t(x)$. 做映射 $\Psi : x \in \mathbb{R}^d \mapsto (x, X_t(x)) \in \mathbb{R}^d \times \Gamma_T$ (注意这里 $\cdot$ 的位置代表曲线的自变量). 设连续方程解的初值为 $\mu_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, 则 $\eta \doteq \Psi_\#(\mu_0) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times \Gamma_T)$. 由于流 $X_t(x)$ 的特殊性, 可见 η 的支集具有上述定理中 i) 的性质.

此时, 由换元公式以及 η 支集的性质, 可知

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \Gamma_T} \varphi(\gamma(t)) d\eta(x, \gamma) = \int_{\mathbb{R}^d \times \Gamma_T} \varphi(e_t(\Psi(x))) d(\Psi)_\# \mu_0 = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(X_t(x)) d\mu_0(x).$$

联合 (‡), 就得到 $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(X_t(x)) d\mu_0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mu_t(x)$. 于是 $\mu_t = (X_t(\cdot))_\# \mu_0$.

主定理的证明: 如何由 η 决定测度解 μ_t^η

- 设 η 满足 i), 即 $F = \{(t, x, \gamma) : \dot{\gamma}(t) \text{ 不存在或者 } \dot{\gamma}(t) \neq v_t(\gamma(t))\}$ 是 $\mathcal{L}^1 \times \eta$ -零测集. 换句话说, 随便取一条曲线 γ , 在 η -a.e. 和 $\mathcal{L}^1$ -a.e. 意义下, 都成立 $\dot{\gamma}(t) = v_t(\gamma(t))$.
- 断言: $t \mapsto \mu_t^\eta = (e_t)_\# \eta$ 窄连续. 事实上, 对任意 $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^d)$, 设 $t_n \rightarrow t$, 则 $\lim_{t_n \rightarrow t} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mu_{t_n}^\eta(x) = \lim_{t_n \rightarrow t} \int_{\mathbb{R}^d \times \Gamma_T} \varphi(\gamma(t_n)) d\mu(x, \gamma) \xrightarrow{\text{注意 } \eta \text{ 测度下 } \gamma(t) \text{ 连续}} \int_{\mathbb{R}^d \times \Gamma_T} \varphi(\gamma(t)) d\mu(x, \gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mu_t^\eta(x)$
- 断言: $t \mapsto \int \xi d\mu_t^\eta$ 绝对连续, 其中 $\xi \in C^1(\mathbb{R}^d)$ 有界且其梯度也有界. 事实上, 设 $s < t, s, t \in [0, T]$, 则 $|\int \xi d\mu_s^\eta - \int \xi d\mu_t^\eta| = \left| \int_{\mathbb{R}^d \times \Gamma_T} (\xi(\gamma(s)) - \xi(\gamma(t))) d\eta(x, \gamma) \right| \leq \int_s^t \int_{\mathbb{R}^d \times \Gamma_T} |\langle \nabla \xi(\gamma(\tau)), \dot{\gamma}(\tau) \rangle| d\eta d\tau \leq \|\nabla \xi\|_{L^\infty} \int_s^t \int_{\mathbb{R}^d \times \Gamma_T} |v_\tau(\gamma(\tau))| d\eta d\tau$. 由条件 (b), 就得到所需的绝对连续性.
- 于是, 对 $\mathcal{L}^1$ -a.e. $t \in [0, T]$, 有 $\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \xi d\mu_t^\eta = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d \times \Gamma_T} \xi(\gamma(t)) d\eta = \int_{\mathbb{R}^d \times \Gamma_T} \langle \nabla \xi(\gamma(t)), \underbrace{v_t(\gamma(t))}_{=\dot{\gamma}(t)} \rangle d\eta = \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla \xi, v_t \rangle d\mu_t^\eta$. (注意. $(\#)$ 对更广泛的 φ 也成立, 只需它可积). 该点态极限所得的式子也是分布意义下成立的. 这就是连续方程测度解的定义. 由 η 得到测度解部分证毕!

主定理的证明: 由测度解 μ_t 构造 η

证明思路: 磨光向量场, 得到光滑化的特征线诱导的 Lagrange 坐标, 诱导出近似的测度 η^ϵ , 证明其胎紧性; 证明 η^ϵ 窄收敛极限的支集性质. 为此还需要两个引理.

Lemma (1)

设 $p \geq 1, \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, E 是 $\mathbb{R}^d$ 上 $\mathbb{R}^m$ -值的测度, 全变差有界, 且关于 μ 绝对连续, 记 $\frac{E}{\mu}$ 为其 Radon-Nikodym 导数. 那么对任意磨光核 ρ , 都成立

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{E * \rho}{\mu * \rho} \right|^p \mu * \rho \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{E}{\mu} \right|^p d\mu.$$

- Jensen 不等式: 设 $\Phi : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow [0, +\infty]$ 是凸的、下半连续、正齐次一次的函数, 那么

$$\Phi \left(\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) \, d\theta(x) \right) \leq \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\psi(x)) \, d\theta(x),$$
 其中 $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ 是任意的 Borel 映射, θ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的正有限测度.

(注意: 利用 Φ 的正齐次一次性, 两边同除以 $\theta(\mathbb{R}^d)$ 就是标准的关于概率测度的 Jensen 不等式.)

- 现取定 $x \in \mathbb{R}^d$, 置 $\psi = (\frac{E}{\mu}, 1)$, $\theta = \rho(x - \cdot)\mu$, $\Phi(z, t) = \begin{cases} \frac{|z|^p}{t^{p-1}}, & t > 0, \\ 0, & (z, t) = (0, 0), \\ +\infty, & t < 0 \text{ 或 } t = 0, z \neq 0. \end{cases}$ 容易验证它是正齐次一

次, 凸的. (习题.)

- $E * \rho(x) \doteq \int \rho(x - y) dE(y) = \int \frac{E}{\mu}(y) \rho(x - y) d\mu(y) = \int \frac{E}{\mu}(y) d\theta(y)$, 这里 $d\theta(y) = \rho(x - y) d\mu(y)$.

- 对固定的 x , $\left| \frac{E * \rho(x)}{\mu * \rho(x)} \right|^p \mu * \rho(x) = \Phi \left(\underbrace{\int \frac{E}{\mu}(y) \rho(x - y) d\mu(y)}_{=E * \rho}, \underbrace{\int \rho(x - y) d\mu(y)}_{=\mu * \rho} \right) = \Phi \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{E}{\mu}(y), 1 \right) d\theta(y) \right) \leq$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi \left(\frac{E}{\mu}(y), 1 \right) d\theta(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{E}{\mu}(y) \right|^p \rho(x - y) d\mu(y).$$

- 将上式两端关于 $x \in \mathbb{R}^d$ 积分, 得到

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{E * \rho(x)}{\mu * \rho(x)} \right|^p \mu * \rho(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{E}{\mu}(y) \right|^p \rho(x - y) d\mu(y) dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{E}{\mu}(y) \right|^p d\mu(y).$$

最后用了 Fubini 定理, 以及磨光核 $\int \rho(x - y) dx = 1$ 的性质. 证毕!

连续方程的光滑近似

Lemma (2)

设 $p \geq 1$, μ_t 是连续方程 $\partial_t \mu_t + \nabla \cdot (v_t \mu_t) = 0$ 的关于 t 窄连续的测度解, 其中向量场 v_t 满足 p -可积条件:

$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |v_t(x)|^p d\mu_t(x) dt < \infty$. 设 ρ_ϵ 是正的磨光算子 (例如 $\rho_\epsilon(x) = (2\pi\epsilon)^{-d/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\epsilon}\right)$.) 置

$\mu_t^\epsilon = \mu_t * \rho_\epsilon$, $E_t^\epsilon = (v_t \mu_t) * \rho_\epsilon$, $v_t^\epsilon = \frac{E_t^\epsilon}{\mu_t^\epsilon}$. 则 μ_t^ϵ 是连续方程 $\partial_t \mu_t^\epsilon + \nabla \cdot (v_t^\epsilon \mu_t^\epsilon) = 0$ 的光滑解, 且满足局部正则性条件

$$\int_0^T \left(\sup_B |v_t^\epsilon| + \text{Lip}_B(v_t^\epsilon) \right) dt > \infty, \forall B \subset \subset \mathbb{R}^d, \quad (*)$$

以及一致的可积性估计:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |v_t^\epsilon|^p d\mu_t^\epsilon \leq \int_{\mathbb{R}^d} |v_t(x)|^p d\mu_t(x), \quad \forall t \in [0, T].$$

此外, $\epsilon \rightarrow 0$ 时 E_t^ϵ 窄收敛到 $v_t \mu_t$, 且 $\forall t \in [0, T], \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|v_t^\epsilon\|_{L^p(\mu_t^\epsilon; \mathbb{R}^d)} = \|v_t\|_{L^p(\mu_t; \mathbb{R}^d)}$.

- 对固定的 $\epsilon > 0$, 注意 $E_t^\epsilon = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\epsilon(x-y) v_t(y) d\mu_t(y)$, $\mu_t^\epsilon = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\epsilon(x-y) d\mu_t(y)$, 容易看出 μ_t^ϵ 和 E_t^ϵ 是光滑函数, 且 $|E_t^\epsilon(x)| \leq C(\rho_\epsilon) \|v_t\|_{L^1(\mu_t)}$ 和 $|\nabla_x E_t^\epsilon| < C(\rho_\epsilon) \|v_t\|_{L^1(\mu_t)}$, 以及 $|\mu_t^\epsilon| < C(\rho_\epsilon)$ 和 $|\nabla_x \mu_t^\epsilon| < C(\rho_\epsilon)$. (常数 $C(\rho_\epsilon)$ 只是函数 ρ_ϵ 及其导数的最大模.)

- 由 μ_t 的窄连续性, $\mu_t^\epsilon = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\epsilon(x-y) d\mu_t(y)$ 关于 t 连续. 此外, 由上面的估计, 它关于 x 等度连续 (常数 $C(\rho_\epsilon)$ 与 t 无关), 用三角不等式, 不难验证 $\mu_t^\epsilon(x)$ 是 $\mathbb{R}^d \times [0, T]$ 上的连续函数.
- 由于 $\rho_\epsilon > 0$, 我们又假设 μ_t 是概率测度, 从而不恒为零, 必有 $\mu_t^\epsilon(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, t \in [0, T]$. 于是, 由连续函数的性质, 对任意的紧集 $B \subset \mathbb{R}^d$, 成立 $\min_{t \in [0, T], x \in B} \mu_t^\epsilon(x) > 0$. 由此可知 v_t^ϵ 有定义, 且是光滑的.
- 注意到由 Hölder 不等式, $\|v_t\|_{L^1(\mu_t)}$ 关于 t 在 $[0, T]$ 上可积, 就得到局部正则性条件 (*).
- 为证一致可积性, 用引理 1: (注意, 当把 μ_t^ϵ 看作测度时, 它关于 Lebesgue 测度的 Radon-Nikodym 导数就是上面的函数 μ_t^ϵ , 故这里 $d\mu_t^\epsilon(x) \doteq \mu_t^\epsilon(x) dx$)
$$\int_{\mathbb{R}^d} |v_t^\epsilon|^p d\mu_t^\epsilon = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{(v_t \mu_t) * \rho_\epsilon}{\mu_t * \rho_\epsilon} \right|^p \mu_t * \rho_\epsilon dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{v_t \mu_t}{\mu_t} \right|^p d\mu_t = \int_{\mathbb{R}^d} |v_t|^p d\mu_t.$$
- 由于 $\nabla(v_t^\epsilon \mu_t^\epsilon) = \nabla_x[(v_t \mu_t) * \rho_\epsilon] = [\nabla_x(v_t \mu_t)] * \rho_\epsilon$ (含参变量求导), 故对连续方程 $\partial_t \mu_t + \nabla_x(v_t \mu_t) = 0$ 两端关于 x 磨光, 就得到 μ_t^ϵ 满足的连续方程.
- $\epsilon \rightarrow 0$ 时 E_t^ϵ 窄收敛到 $E_t = v_t \mu_t$: 任取连续有界函数 $\phi \in C_b^0(\mathbb{R}^d)$, $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dE_t^\epsilon = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \rho_\epsilon(x-y) v_t(y) d\mu_t(y) dx = \int_{\mathbb{R}^d} (\phi(x) \rho_\epsilon(y-x) dx) v_t(y) d\mu_t(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi * \rho_\epsilon(y) v_t(y) d\mu_t(y)$. 这里利用了磨光核的性质: $\rho_\epsilon(x-y) = \rho_\epsilon(y-x)$. 注意到 $\phi * \rho_\epsilon$ 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时一致收敛到 ϕ , 就得到
$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dE_t^\epsilon = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) v_t(x) d\mu_t(x), \text{ 即 } E_t^\epsilon \rightarrow E_t.$$
- $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|v_t^\epsilon\|_{L^p(\mu_t^\epsilon; \mathbb{R}^d)} = \|v_t\|_{L^p(\mu_t; \mathbb{R}^d)}$ 用泛函 $(E, \mu) \mapsto \int \left| \frac{E}{\mu} \right|^p d\mu$ 的下半连续性. 参见定理 2.34 和例 2.36, [Ambrosio, Luigi; Fusco, Nicola; Pallara, Diego: Functions of bounded variation and free discontinuity problems. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.]

近似测度 η^ϵ 的构造及其胎紧性

- 对主定理中给定的向量场 v_t 和测度解 μ_t 按引理 2 作磨光, 得到 $\partial_t \mu_t^\epsilon + \nabla \cdot (v_t^\epsilon \mu_t^\epsilon) = 0$. 对应的特征线是 $X_t^\epsilon(x)$, 从而有测度解的表示定理, 必有 $\mu_t^\epsilon = (X_t^\epsilon)_\#(\mu_0^\epsilon)$. 将 X^ϵ 看作映射 $\mathbb{R}^d \rightarrow \Gamma_T : x \mapsto X_t(x)$, 定义 $\eta^\epsilon \doteq (i \times X^\epsilon)_\# \mu_0^\epsilon \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times \Gamma_T)$. 这里 i 是 $\mathbb{R}^d$ 上的恒等映射.
- 断言: $\{\eta^\epsilon\}$ 胎紧. 后面将证明: $\{\eta^\epsilon\}$ 的任一极限 η 满足主定理中的性质 i) 和 ii).
- 定理: 设 $X, X_1, \dots, X_N$ 是可分度量空间, $r_i : X \rightarrow X_i$ 是连续映射, 且 $r = r_1 \times \dots \times r_N : X \rightarrow X_1 \times \dots \times X_N$ 是完备 (proper) 映射. 又设 $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ 满足 $\mathcal{K}_i = (r_i)_\#(\mathcal{K})$ 在 $\mathcal{P}(X_i)$ 中胎紧, $i = 1, \dots, N$, 则 $\mathcal{K}$ 在 $\mathcal{P}(X)$ 中胎紧.
 - 作 $\mathbb{R}^d \times \Gamma_T$ 上投影 $r^1 : (x, \gamma) \mapsto \gamma; r^2 : (x, \gamma) \mapsto \gamma - x$, 先证明: $r : r^1 \times r^2$ 是 $\mathbb{R}^d \times \Gamma_T$ 上的完备映射. 1) 连续性, 显然. (Γ_T 给一致收敛拓扑.) 2) 紧映射: (x, γ') 的原像就是 $(x, x + \gamma')$, 从而单点集的原像是紧集. 3) 闭映射: 设 $(x_n, \gamma_n) \rightarrow (x, \gamma)$, 显然 $r(x_n, \gamma_n) \rightarrow (x, \gamma - x) = r(x, \gamma)$.
 - $r_\#^1 \eta^\epsilon = [r^1 \circ (i \times X^\epsilon)]_\# \mu_0^\epsilon = i_\# \mu_0^\epsilon = \mu_0^\epsilon = \mu_0 * \rho_\epsilon \rightarrow \mu_0 (\epsilon \rightarrow 0)$, 故 $\{r_\#^1 \eta^\epsilon\}$ 胎紧.
 - 定理: 若存在函数 $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$, 它的下水平集 $\{x \in X : \varphi(x) \leq c\}$ 对任意 $c \in \mathbb{R}$ 是 X 的紧子集, 且 $\sup_{\mu \in \mathcal{K}} \int_X \varphi(x) d\mu(x) < \infty$, 则 $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ 是胎紧的.

● c) 记 $\beta^\epsilon = r_\#^2 \eta^\epsilon = (r^2 \circ (i \times X^\epsilon))_\# \mu_0^\epsilon = (X^\epsilon(x) - x)_\# \mu_0^\epsilon$.

● 作泛函 $\varphi: \gamma \in \Gamma_T \mapsto \begin{cases} \int_0^T |\dot{\gamma}(t)|^p dt, \\ \infty, \end{cases}$ 对任意 $c \in \mathbb{R}$, 下水平集

若 $\gamma \notin AC^p([0, T]; \mathbb{R}^d)$ 或者 $\gamma_0 \neq 0$.

$D = \{\gamma: \varphi(\gamma) \leq c\}$ 在 Γ_T 中紧. 事实上, 由于 $p > 1$, 对任意 $0 \leq s < t \leq T$, 可知

$\forall \gamma \in D, |\gamma(s) - \gamma(t)| \leq \int_s^t |\dot{\gamma}(\tau)| d\tau \leq (t-s)^{1-\frac{1}{p}} c^{\frac{1}{p}}$, 于是 $\gamma(\cdot)$ 等度连续. 又 $\gamma(0) = 0$, 从而它们一致有界.

Ascoli-Arzelà 引理表明 $D \subset \Gamma_T$ 紧.

● 为证明 $\{\beta^\epsilon\}$ 胎紧, 只需再证明 $\sup_{\epsilon > 0} \int_{\Gamma_T} \varphi(\gamma) d\beta^\epsilon(\gamma) < \infty$. 事实上,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_T} \int_0^T |\dot{\gamma}(t)|^p dt d\beta^\epsilon(\gamma) &\xrightarrow[\gamma(t)=X_t^\epsilon(x)-x]{} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^T |\dot{X}_t^\epsilon(x)|^p dt d\mu_0^\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^T |v_t^\epsilon(X_t^\epsilon(x))|^p dt d\mu_0^\epsilon(x) = \\ &\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |v_t^\epsilon(X_t^\epsilon(x))|^p d\mu_0^\epsilon(x) dt \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |v_t^\epsilon(y)|^p d\mu_t^\epsilon(y) dt \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |v_t(y)|^p d\mu_t(y) dt < \infty. \end{aligned}$$

最后两个不等号用到了引理 2 中的一致可积性估计.

● 性质 ii). 设 η 是子列 $\{\eta^{\epsilon_j}\}$ 窄收敛的一个极限, 则对任意的 $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^d)$, 成立 $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mu_t^{\eta^{\epsilon_j}} \xrightarrow[\mu_t^{\eta^{\epsilon_j}} \doteq (e_t)_\#(\eta^{\epsilon_j})]{} =$

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \Gamma_T} \varphi(\gamma) d\eta^{\epsilon_j}(x, \gamma) \xrightarrow[\eta^\epsilon \doteq (i \times X^\epsilon)_\# \mu_0^\epsilon]{} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(X_t^{\epsilon_j}(x)) d\mu_0^{\epsilon_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) d\mu_t^{\epsilon_j} \xrightarrow[\epsilon_j \rightarrow 0]{\text{窄收敛}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) d\mu_t.$$

另一方面, $\mu_t^{\eta^{\epsilon_j}} \doteq (e_t)_\#(\eta^{\epsilon_j})$ 窄收敛到 $(e_t)_\#(\eta) \doteq \mu_t^\eta$. 这就证明了 $\mu_t = \mu_t^\eta$.

性质 i): η 的支集

- 设 $w_t(x) = w(x, t)$ 是一致连续的有界函数, 满足性质 $|w_t(x+z) - w_t(x)| = \omega(z)$, 其中 $\omega(z)$ 是 $z \rightarrow 0$ 时的无穷小量. 断言: 对任意的 $t \in [0, T]$, 成立不等式

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \Gamma_T} \left| \gamma(t) - x - \int_0^t w_\tau(\gamma(\tau)) d\tau \right|^p d\eta(x, \gamma) \leq (2T)^{p-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |v_\tau - w_\tau|^p d\mu_\tau d\tau. \quad (\ddagger)$$

- 假设断言成立. 记 μ 为 $\mathbb{R}^d \times [0, T]$ 上的测度, $d\mu = d\mu_t dt$. 主定理条件表明: $v \in L^p(\mu; \mathbb{R}^d)$. 现取 $w^n \in C_c^0(\mathbb{R}^d \times [0, T])$, 使得在 $L^p(\mu; \mathbb{R}^d)$ 中 $w^n \rightarrow v$ ($n \rightarrow \infty$). 注意到 $\mu_t = \mu_t^n = (e_t)_\# \eta$, 于是 $\int_{\mathbb{R}^d \times [0, T]} \int_0^T |w_\tau^n(\gamma(\tau)) - v_\tau(\gamma(\tau))|^p d\tau d\eta = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |w_\tau^n - v_\tau|^p d\mu_\tau d\tau \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). 用三角不等式, 将 $(\ddagger)$ 中 w 换作 w^n , 可得 $\int_{\mathbb{R}^d \times \Gamma_T} \left| \gamma(t) - x - \int_0^t v_\tau(\gamma(\tau)) d\tau \right|^p d\eta(x, \gamma) \leq C_{p,T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |v_\tau - w_\tau^n|^p d\mu_\tau d\tau \rightarrow 0$, 于是对任意的 $t \in [0, T]$, 对 η -a.e. $(x, \gamma) \in \mathbb{R}^d \times [0, T]$, 有 $\gamma(t) = x + \int_0^t v_\tau(\gamma(\tau)) d\tau$.
- 于是, 对 $t \in [0, T] \cap \mathbb{Q}$, 存在 η -零测集 $\mathcal{N} \subset \mathbb{R} \times \Gamma_T$, 对任意的 $(x, \gamma) \notin \mathcal{N}$, 就有 $\gamma(t) = x + \int_0^t v_\tau(\gamma(\tau)) d\tau$. 由 γ 的连续性 (注意 Γ_T 是连续曲线的集合), 对任意 $t \in [0, T]$, 都有 $\gamma(t) = x + \int_0^t v_\tau(\gamma(\tau)) d\tau$. 特别的, $\gamma(0) = x, \dot{\gamma}(t) = v_t(\gamma(t))$. 此外, $\int_{\mathbb{R}^d \times [0, T]} \int_0^T |v_\tau(\gamma(\tau))|^p d\tau d\eta = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |v_\tau|^p d\mu_\tau d\tau < \infty$, 故 η -a.e. 有 $v_\tau(\gamma(\tau)) \in L^p[0, T]$, 所以 $\gamma \in AC^p[0, T]$. 性质 1) 得证.

断言的证明

- 设 $w_t(x) = w(x, t)$ 是一致连续的有界函数, 满足性质 $|w_t(x+z) - w_t(x)| = \omega(z)$, 其中 $\omega(z)$ 是 $z \rightarrow 0$ 时的无穷小量. 断言: 对任意的 $t \in [0, T]$, 成立不等式

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \Gamma_T} \left| \gamma(t) - x - \int_0^t w_\tau(\gamma(\tau)) d\tau \right|^p d\eta(x, \gamma) \leq (2T)^{p-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |v_\tau - w_\tau|^p d\mu_\tau d\tau.$$

- 证明: 由于 $\eta^\epsilon \doteq (i \times X^\epsilon)_\# \mu_0^\epsilon$, 故 $\int_{\mathbb{R}^d \times \Gamma_T} \left| \gamma(t) - x - \int_0^t w_\tau(\gamma(\tau)) d\tau \right|^p d\eta^\epsilon(x, \gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} \left| X_t^\epsilon(x) - x - \int_0^t w_\tau(X_\tau^\epsilon(x)) d\tau \right|^p d\mu_0^\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_0^t (v_\tau^\epsilon - w_\tau)(X_\tau^\epsilon(x)) d\tau \right|^p d\mu_0^\epsilon(x) \leq T^{p-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |v_\tau^\epsilon - w_\tau|^\epsilon(y) d\mu_\tau^\epsilon(y) d\tau \leq (2T)^{p-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |v_\tau^\epsilon - w_\tau^\epsilon|^p d\mu_\tau^\epsilon d\tau + (2T)^{p-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |w_\tau^\epsilon - w_\tau|^p d\mu_\tau^\epsilon d\tau = I + II$. 这里 $w_\tau^\epsilon = (w_\tau \mu_\tau) * \rho_\epsilon / \mu_\tau^\epsilon$.
- 根据引理 1, $\int_{\mathbb{R}^d} |v_\tau^\epsilon - w_\tau^\epsilon|^p d\mu_\tau^\epsilon = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{(v_\tau - w_\tau)\mu_\tau * \rho_\epsilon}{\mu_\tau * \rho_\epsilon} \right|^p \mu_\tau * \rho_\epsilon dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |v_\tau - w_\tau|^p d\mu_\tau$, 所以 $I \leq (2T)^{p-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |v_\tau - w_\tau|^p d\mu_\tau d\tau$.
- 估计 II. $w_\tau^\epsilon(x) - w_\tau(x) = \frac{1}{\mu_\tau^\epsilon(x)} \left((w_\tau v_\tau) * \rho_\epsilon(x) - w_\tau(x) \mu_\tau * \rho_\epsilon(x) \right) = \frac{1}{\mu_\tau^\epsilon(x)} \int_{\mathbb{R}^d} (w_\tau(y) - w_\tau(x)) \rho_\epsilon(x-y) d\mu_\tau(y)$. 故用 Hölder 不等式, $|w_\tau^\epsilon(x) - w_\tau(x)|^p \leq \frac{1}{\mu_\tau^\epsilon(x)} \int_{\mathbb{R}^d} (\omega^p \rho_\epsilon)(x-y) d\mu_\tau(y)$. 于是 $\int_{\mathbb{R}^d} |w_\tau^\epsilon(x) - w_\tau(x)|^p d\mu_\tau^\epsilon(x) \leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\mu_\tau^\epsilon(x)} \int_{\mathbb{R}^d} (\omega^p \rho_\epsilon)(x-y) d\mu_\tau(y) \mu_\tau^\epsilon(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (\omega^p \rho_\epsilon)(x-y) dx d\mu_\tau(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (\omega^p \rho_\epsilon)(z) dz d\mu_\tau(y) = \int_{\mathbb{R}^d} (\omega^p \rho_\epsilon)(z) dz$, 所以 $II \leq (2T)^{p-1} T \int_{\mathbb{R}^d} \omega(z)^p \rho_\epsilon(z) dz \rightarrow (2T)^{p-1} T \omega(0) = 0$ ($\epsilon \rightarrow 0$ 时).
- 引理: 设 X 上概率测度 μ_n 窄收敛到 μ , $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是下有界的下连续函数, 则 $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X g(x) d\mu_n(x) \geq \int_X g(x) d\mu(x)$. [1, (5.1.15), p. 109] 下连续: 设 $x_n \rightarrow x$, 则 $g(x) \leq \liminf g(x_n)$.
- 由上述引理, 注意对固定的 $t \in [0, T]$, $\mathbb{R}^d \times \Gamma_T$ 上的被积函数连续且非负, $\int_{\mathbb{R}^d \times \Gamma_T} \left| \gamma(t) - x - \int_0^t w_\tau(\gamma(\tau)) d\tau \right|^p d\eta(x, \gamma) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d \times \Gamma_T} \left| \gamma(t) - x - \int_0^t w_\tau(\gamma(\tau)) d\tau \right|^p d\eta^\epsilon(x, \gamma) \leq (2T)^{p-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |v_\tau - w_\tau|^p d\mu_\tau d\tau$. 证毕!

参考文献

- Ambrosio, Luigi; Gigli, Nicola; Savaré, Giuseppe: Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures. Second edition. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.

最后更新: 2021-10-10