

偏微分方程

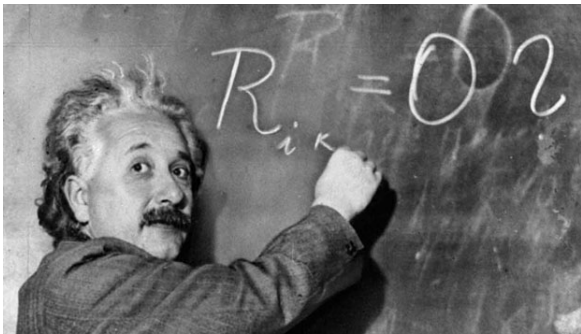
第一讲 学习要求、记号及基本概念

袁海荣 (华东师范大学 数学科学学院)

2022 年 9 月 6 日

提出一个问题往往比解决一个更重要. 因为解决问题也许仅是一个数学上或实验上的技能而已, 而提出新的问题, 却需要有创造性的想象力, 而且标志着科学的真正进步.

— Albert Einstein (1879 年 3 月 14 日—1955 年 4 月 18 日)



传记: <https://www.britannica.com/biography/Albert-Einstein>

我发现做研究最好的方法是提出深刻、大胆和关键性的问题. 如果你能提出好问题, 那么就一定会做好研究, 得出对学术界来说实用且有重大意义的结论.

—— 姚期智: 2021 年京都奖颁奖典礼的演讲

课程目标

- 大学阶段数学专业不同课程有不同的特点、定位和培养要求
- 基础课: 数学分析、高等代数、解析几何、抽象代数、复变函数等 — 训练严密的逻辑思维能力、学习重要的数学工具
- 偏微分方程课程
 - 增长见识、开阔眼界: 提升对数学内部各学科以及应用学科 (物理、工程等) 的认识, 了解数学的多样性和重要性, 贴近应用和研究前沿
 - 提升发现问题、提出问题的能力, 从而培养创新能力和科研素养
 - 学习偏微分方程学科的具体知识; 提高运用数学工具的能力
 - 复习先修课程内容, 适当展望后续课程知识点, 全面提升数学综合素养
 - 要有意识地调整学习方式, 从被动学习向主动学习、研究式学习转变; 提升自学能力

偏微分方程学科和课程的特点

- 从“学习”向“学问”转变：以问题为中心学习 / 研究
 - 创新能力的关键：发现问题，提出正确的有意义的问题的能力
 - 解决问题的关键：找到简单的但不失去原有本质的问题 (学习/研究的水平：是否善于把握问题的难易程度——一般原则 + 具体问题具体分析)
- 与应用问题的密切联系：微分几何，控制论，概率和随机 (金融数学)，物理 (弹性力学，流体力学，量子力学，电动力学，热力学与统计力学，广义相对论等)，生物 (种群生态学，传染病防控等)，图像处理 (医学)，科学计算……
- 纯数学问题的来源及其发展动力：数学分析，高等代数，泛函分析，实变函数，常微分方程，调和分析 (Fourier 分析)，拓扑学，微分几何，概率论，复变函数……
 - 综合性强：建模 (涉及各类应用学科的具体知识)，理论 (涉及先修课程的大量知识和方法，以及尚未学习的一些课程的知识)，计算 (算法设计及程序实现) $\Rightarrow$ 学习难度大 (特别要围绕具体问题及时复习以前课程相关内容，尤其是数学分析多元微积分部分)
 - 科学研究前沿：有大量没有解决或从未提出过的难易程度不同的科学问题 (听学术报告，逐渐熟悉)

偏微分方程学科和课程的特点

- 从“学习”向“学问”转变：以问题为中心学习 / 研究
 - 创新能力的关键：发现问题，提出正确的有意义的问题的能力
 - 解决问题的关键：找到简单的但不失去原有本质的问题 (学习/研究的水平：是否善于把握问题的难易程度——一般原则 + 具体问题具体分析)
- 与应用问题的密切联系：微分几何，控制论，概率和随机 (金融数学)，物理 (弹性力学，流体力学，量子力学，电动力学，热力学与统计力学，广义相对论等)，生物 (种群生态学，传染病防控等)，图像处理 (医学)，科学计算……
- 纯数学问题的来源及其发展动力：数学分析，高等代数，泛函分析，实变函数，常微分方程，调和分析 (Fourier 分析)，拓扑学，微分几何，概率论，复变函数……
 - 综合性强：建模 (涉及各类应用学科的具体知识)，理论 (涉及先修课程的大量知识和方法，以及尚未学习的一些课程的知识)，计算 (算法设计及程序实现) $\Rightarrow$ 学习难度大 (特别要围绕具体问题及时复习以前课程相关内容，尤其是数学分析多元微积分部分)
 - 科学研究前沿：有大量没有解决或从未提出过的难易程度不同的科学问题 (听学术报告，逐渐熟悉)

偏微分方程学科和课程的特点

- 从“学习”向“学问”转变：以问题为中心学习 / 研究
 - 创新能力的关键：发现问题，提出正确的有意义的问题的能力
 - 解决问题的关键：找到简单的但不失去原有本质的问题 (学习/研究的水平：是否善于把握问题的难易程度——一般原则 + 具体问题具体分析)
- 与应用问题的密切联系：微分几何，控制论，概率和随机 (金融数学)，物理 (弹性力学，流体力学，量子力学，电动力学，热力学与统计力学，广义相对论等)，生物 (种群生态学，传染病防控等)，图像处理 (医学)，科学计算……
- 纯数学问题的来源及其发展动力：数学分析，高等代数，泛函分析，实变函数，常微分方程，调和分析 (Fourier 分析)，拓扑学，微分几何，概率论，复变函数……
 - 综合性强：建模 (涉及各类应用学科的具体知识)，理论 (涉及先修课程的大量知识和方法，以及尚未学习的一些课程的知识)，计算 (算法设计及程序实现) $\Rightarrow$ 学习难度大 (特别要围绕具体问题及时复习以前课程相关内容，尤其是数学分析多元微积分部分)
 - 科学研究前沿：有大量没有解决或从未提出过的难易程度不同的科学问题 (听学术报告，逐渐熟悉)

偏微分方程学科和课程的特点

- 从“学习”向“学问”转变：以问题为中心学习 / 研究
 - 创新能力的关键：发现问题，提出正确的有意义的问题的能力
 - 解决问题的关键：找到简单的但不失去原有本质的问题 (学习/研究的水平：是否善于把握问题的难易程度——一般原则 + 具体问题具体分析)
- 与应用问题的密切联系：微分几何，控制论，概率和随机 (金融数学)，物理 (弹性力学，流体力学，量子力学，电动力学，热力学与统计力学，广义相对论等)，生物 (种群生态学，传染病防控等)，图像处理 (医学)，科学计算……
- 纯数学问题的来源及其发展动力：数学分析，高等代数，泛函分析，实变函数，常微分方程，调和分析 (Fourier 分析)，拓扑学，微分几何，概率论，复变函数……
 - 综合性强：建模 (涉及各类应用学科的具体知识)，理论 (涉及先修课程的大量知识和方法，以及尚未学习的一些课程的知识)，计算 (算法设计及程序实现) $\Rightarrow$ 学习难度大 (特别要围绕具体问题及时复习以前课程相关内容，尤其是数学分析多元微积分部分)
 - 科学研究前沿：有大量没有解决或从未提出过的难易程度不同的科学问题 (听学术报告，逐渐熟悉)

偏微分方程学科和课程的特点

- 从“学习”向“学问”转变：以问题为中心学习 / 研究
 - 创新能力的关键：发现问题，提出正确的有意义的问题的能力
 - 解决问题的关键：找到简单的但不失去原有本质的问题 (学习/研究的水平：是否善于把握问题的难易程度——一般原则 + 具体问题具体分析)
- 与应用问题的密切联系：微分几何，控制论，概率和随机 (金融数学)，物理 (弹性力学，流体力学，量子力学，电动力学，热力学与统计力学，广义相对论等)，生物 (种群生态学，传染病防控等)，图像处理 (医学)，科学计算……
- 纯数学问题的来源及其发展动力：数学分析，高等代数，泛函分析，实变函数，常微分方程，调和分析 (Fourier 分析)，拓扑学，微分几何，概率论，复变函数……
 - 综合性强：建模 (涉及各类应用学科的具体知识)，理论 (涉及先修课程的大量知识和方法，以及尚未学习的一些课程的知识)，计算 (算法设计及程序实现) $\Rightarrow$ 学习难度大 (特别要围绕具体问题及时复习以前课程相关内容，尤其是数学分析多元微积分部分)
 - 科学研究前沿：有大量没有解决或从未提出过的难易程度不同的科学问题 (听学术报告，逐渐熟悉)

偏微分方程学科和课程的特点

- 从“学习”向“学问”转变：以问题为中心学习 / 研究
 - 创新能力的关键：发现问题，提出正确的有意义的问题的能力
 - 解决问题的关键：找到简单的但不失去原有本质的问题 (学习/研究的水平：是否善于把握问题的难易程度——一般原则 + 具体问题具体分析)
- 与应用问题的密切联系：微分几何，控制论，概率和随机 (金融数学)，物理 (弹性力学，流体力学，量子力学，电动力学，热力学与统计力学，广义相对论等)，生物 (种群生态学，传染病防控等)，图像处理 (医学)，科学计算……
- 纯数学问题的来源及其发展动力：数学分析，高等代数，泛函分析，实变函数，常微分方程，调和分析 (Fourier 分析)，拓扑学，微分几何，概率论，复变函数……
 - 综合性强：建模 (涉及各类应用学科的具体知识)，理论 (涉及先修课程的大量知识和方法，以及尚未学习的一些课程的知识)，计算 (算法设计及程序实现) $\Rightarrow$ 学习难度大 (特别要围绕具体问题及时复习以前课程相关内容，尤其是数学分析多元微积分部分)
 - 科学研究前沿：有大量没有解决或从未提出过的难易程度不同的科学问题 (听学术报告，逐渐熟悉)

偏微分方程学科和课程的特点

- 从“学习”向“学问”转变：以问题为中心学习 / 研究
 - 创新能力的关键：发现问题，提出正确的有意义的问题的能力
 - 解决问题的关键：找到简单的但不失去原有本质的问题 (学习/研究的水平：是否善于把握问题的难易程度——一般原则 + 具体问题具体分析)
- 与应用问题的密切联系：微分几何，控制论，概率和随机 (金融数学)，物理 (弹性力学，流体力学，量子力学，电动力学，热力学与统计力学，广义相对论等)，生物 (种群生态学，传染病防控等)，图像处理 (医学)，科学计算……
- 纯数学问题的来源及其发展动力：数学分析，高等代数，泛函分析，实变函数，常微分方程，调和分析 (Fourier 分析)，拓扑学，微分几何，概率论，复变函数……
 - 综合性强：建模 (涉及各类应用学科的具体知识)，理论 (涉及先修课程的大量知识和方法，以及尚未学习的一些课程的知识)，计算 (算法设计及程序实现) $\Rightarrow$ 学习难度大 (特别要围绕具体问题及时复习以前课程相关内容，尤其是数学分析多元微积分部分)
 - 科学研究前沿：有大量没有解决或从未提出过的难易程度不同的科学问题 (听学术报告，逐渐熟悉)

本课程主要内容及学习要点

● 知识

- **建模** (了解应用背景, 熟悉典型的适定的定解问题的提法和解的基本性质)
- **理论** (熟练掌握求精确解和特解的方法 — 变量替换, 行波法, 自相似解, 分离变量法, 积分变换法; 掌握典型基本问题的解的表达式及信息的提取; 熟练掌握作解的估计的基本方法 — 能量积分和极值原理)
- **计算** (了解构造近似解的方法 — 有限差分法, 算子分裂法, 有限元素法, 分离变量法)
- 技能 — 熟练掌握利用数学分析、高等代数、常微分方程等工具, 结合实际背景, 建立偏微分方程模型并作理论分析的思路和基本方法
- 思想 — 认识与纯数学和应用数学其他学科的密切联系; 体会抽象与具体、理论与应用之间的关系; 提高提出合理问题、把握问题难易程度的能力
- 学习方式 — 建议: 带着问题, 认真听课, 记好笔记, 主动读书, 独立完成作业, 多与老师和同学交流
 - 是什么? — 要做什么事? what?
 - 为什么? — 为什么做这件事? 它有何意义? Why?
 - 怎么做? — 怎么做这件事? How?

本课程主要内容及学习要点

● 知识

- 建模 (了解应用背景, 熟悉典型的适定的定解问题的提法和解的基本性质)
- 理论 (熟练掌握求精确解和特解的方法 — 变量替换, 行波法, 自相似解, 分离变量法, 积分变换法; 掌握典型基本问题的解的表达式及信息的提取; 熟练掌握作解的估计的基本方法 — 能量积分和极值原理)
- 计算 (了解构造近似解的方法 — 有限差分法, 算子分裂法, 有限元素法, 分离变量法)
- 技能 — 熟练掌握利用数学分析、高等代数、常微分方程等工具, 结合实际背景, 建立偏微分方程模型并作理论分析的思路和基本方法
- 思想 — 认识与纯数学和应用数学其他学科的密切联系; 体会抽象与具体、理论与应用之间的关系; 提高提出合理问题、把握问题难易程度的能力
- 学习方式 — 建议: 带着问题, 认真听课, 记好笔记, 主动读书, 独立完成作业, 多与老师和同学交流
 - 是什么? — 要做什么事? what?
 - 为什么? — 为什么做这件事? 它有何意义? Why?
 - 怎么做? — 怎么做这件事? How?

本课程主要内容及学习要点

- 知识
 - 建模 (了解应用背景, 熟悉典型的适定的定解问题的提法和解的基本性质)
 - 理论 (熟练掌握求精确解和特解的方法 — 变量替换, 行波法, 自相似解, 分离变量法, 积分变换法; 掌握典型基本问题的解的表达式及信息的提取; 熟练掌握作解的估计的基本方法 — 能量积分和极值原理)
 - 计算 (了解构造近似解的方法 — 有限差分法, 算子分裂法, 有限元素法, 分离变量法)
- 技能 — 熟练掌握利用数学分析、高等代数、常微分方程等工具, 结合实际背景, 建立偏微分方程模型并作理论分析的思路和基本方法
- 思想 — 认识与纯数学和应用数学其他学科的密切联系; 体会抽象与具体、理论与应用之间的关系; 提高提出合理问题、把握问题难易程度的能力
- 学习方式 — 建议: 带着问题, 认真听课, 记好笔记, 主动读书, 独立完成作业, 多与老师和同学交流
 - 是什么? — 要做什么事? what?
 - 为什么? — 为什么做这件事? 它有何意义? Why?
 - 怎么做? — 怎么做这件事? How?

本课程主要内容及学习要点

● 知识

- 建模 (了解应用背景, 熟悉典型的适定的定解问题的提法和解的基本性质)
- 理论 (熟练掌握求精确解和特解的方法 — 变量替换, 行波法, 自相似解, 分离变量法, 积分变换法; 掌握典型基本问题的解的表达式及信息的提取; 熟练掌握作解的估计的基本方法 — 能量积分和极值原理)
- 计算 (了解构造近似解的方法 — 有限差分法, 算子分裂法, 有限元素法, 分离变量法)
- 技能 — 熟练掌握利用数学分析、高等代数、常微分方程等工具, 结合实际背景, 建立偏微分方程模型并作理论分析的思路和基本方法
- 思想 — 认识与纯数学和应用数学其他学科的密切联系; 体会抽象与具体、理论与应用之间的关系; 提高提出合理问题、把握问题难易程度的能力
- 学习方式 — 建议: 带着问题, 认真听课, 记好笔记, 主动读书, 独立完成作业, 多与老师和同学交流
 - 是什么? — 要做什么事? what?
 - 为什么? — 为什么做这件事? 它有何意义? Why?
 - 怎么做? — 怎么做这件事? How?

教学安排

- 上课时间 (周二 9 点 50 分 – 11 点 25 分; 周四上午 8 点 – 9 点 35 分); 地点: 闵行校区四教 221.
- 教材: 郇中丹, 黄海洋: 偏微分方程 (第二版), 高等教育出版社, 2013.
参考书: [1] 季孝达, 薛兴恒, 陆英, 宋立功: 数学物理方程 (第二版), 科学出版社, 2009.
[2] Strauss, Walter A. Partial differential equations. An introduction. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992. (Second edition, 2008.)
[3] 谷超豪, 李大潜等: 数学物理方程 (第三版). 高等教育出版社, 2012.
[4] 姜礼尚等: 数学物理方程讲义, 高等教育出版社, 1996.
- 考核和成绩计算方式 (如遇学校或学院规定调整, 将按新规定执行)
 - 总评成绩 = 期末考试 (闭卷) (50%) + 平时成绩 (50%)
 - 平时成绩 = 3 次课堂测验 (闭卷) 成绩 (60%) + 作业成绩 (20%) + 考勤 (10%) + 课堂学术和思想表现 (10%)
 - 测验时间: 以下上课时间 (第 5 周 10 月 6 日对应的工作日, 第 8 周 10 月 27 日周四, 第 12 周 11 月 24 日周四; 期末考试 (第 18 周: 2023-01-06 8:00–10:00)
 - 作业: 书写清晰规范, 按时完成并上交. 第二周开始每周二下课后 11 点 30 分截止, 提交上周布置的所有书面作业. 逾期不收.
 - 助教: 肖婷. 习题课和答疑: 第二周开始, 时间地点: 周三 15 点—17 点, 统计楼 329)
 - 微信群 (只用于讨论学习问题, 发布学习资料, 不得涉及考试成绩等其他问题)

常用的标准记号

- **几何:** 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ (**行向量** $x = (x_1, \dots, x_n)$); 内积: $x \cdot y = \langle x, y \rangle = xy^\top$; 以下除非特别说明, 均给定标准的直角坐标系 (即取标准基 $\{e_1, \dots, e_n\}$)
 - $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: 区域 (非空的连通开集); $\bar{\Omega}$: 闭包; $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$: 边界
 - $B_R(\hat{x})$ 或 $B(\hat{x}, R)$: 以 $\hat{x}$ 为中心, 半径为 R 的 (开) 球体; $S_R(\hat{x})$ 或 $S(\hat{x}, R)$: 球面 $\partial B_R(\hat{x})$.
 - 带时间变量的欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$ (约定 x 代表空间位置, t 代表时间变量.)
- **算子:** 设 $u(x)$ 是定义在 Ω 上的函数
 - **偏导算子** $D_i = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$: $\partial_i u = u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ 代表 $u(x)$ 关于第 i 个变量 x_i 的偏导数 ($i = 1, \dots, n$); (若 $u = u(x, t)$, 对时间变量的偏导数总记作 $\partial_t u$ 或 u_t) (注: $u_{x_i x_j} \doteq \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$; $u_{tt} = \partial_{tt} u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$)
 - **梯度算子** $D = (\partial_1, \dots, \partial_n)$: $Du(x) = (\partial_1 u(x), \dots, \partial_n u(x))$ 是 u 在 x 点的梯度 (行) 向量. (Du 也记作 $\text{grad } u$ 或 ∇u)
 - **散度算子** div : 设 $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$ 是 Ω 上的连续可微向量场, $\text{div} F \doteq \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$
 - **Laplace 算子** $\Delta u = \text{div} Du$: 在欧氏空间直角坐标系下 $\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$ (注 1: 算子 D, div, Δ 都是由度量确定的几何对象, 坐标系变换后其形式要对应改变, 是物理、黎曼几何中的基本研究对象. 注 2: 约定即使 $u = u(x, t)$, $\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} u(x_1, \dots, x_n, t)$)
 - **旋度算子** curl 或 rot 或 $\nabla \times$ (作用于向量场)

常用的标准记号

- **几何:** 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ (**行向量** $x = (x_1, \dots, x_n)$); 内积: $x \cdot y = \langle x, y \rangle = xy^\top$; 以下除非特别说明, 均给定标准的直角坐标系 (即取标准基 $\{e_1, \dots, e_n\}$)
 - $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: 区域 (非空的连通开集); $\bar{\Omega}$: 闭包; $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$: 边界
 - $B_R(\hat{x})$ 或 $B(\hat{x}, R)$: 以 $\hat{x}$ 为中心, 半径为 R 的 (开) 球体; $S_R(\hat{x})$ 或 $S(\hat{x}, R)$: 球面 $\partial B_R(\hat{x})$.
 - 带时间变量的欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$ (约定 x 代表空间位置, t 代表时间变量.)
- **算子:** 设 $u(x)$ 是定义在 Ω 上的函数
 - **偏导算子** $D_i = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$: $\partial_i u = u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ 代表 $u(x)$ 关于第 i 个变量 x_i 的偏导数 ($i = 1, \dots, n$); (若 $u = u(x, t)$, 对时间变量的偏导数总记作 $\partial_t u$ 或 u_t) (注: $u_{x_i x_j} \doteq \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$; $u_{tt} = \partial_{tt} u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$)
 - **梯度算子** $D = (\partial_1, \dots, \partial_n)$: $Du(x) = (\partial_1 u(x), \dots, \partial_n u(x))$ 是 u 在 x 点的梯度 (行) 向量. (Du 也记作 $\text{grad } u$ 或 ∇u)
 - **散度算子** div : 设 $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$ 是 Ω 上的连续可微向量场, $\text{div} F \doteq \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$
 - **Laplace 算子** $\Delta u = \text{div} Du$: 在欧氏空间直角坐标系下 $\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$ (注 1: 算子 D, div, Δ 都是由度量确定的几何对象, 坐标系变换后其形式要对应改变, 是物理、黎曼几何中的基本研究对象. 注 2: 约定即使 $u = u(x, t)$, $\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} u(x_1, \dots, x_n, t)$)
 - **旋度算子** curl 或 rot 或 $\nabla \times$ (作用于向量场)

常用的标准记号

- **几何:** 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ (**行向量** $x = (x_1, \dots, x_n)$); 内积: $x \cdot y = \langle x, y \rangle = xy^\top$; 以下除非特别说明, 均给定标准的直角坐标系 (即取标准基 $\{e_1, \dots, e_n\}$)
 - $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: 区域 (非空的连通开集); $\bar{\Omega}$: 闭包; $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$: 边界
 - $B_R(\hat{x})$ 或 $B(\hat{x}, R)$: 以 $\hat{x}$ 为中心, 半径为 R 的 (开) 球体; $S_R(\hat{x})$ 或 $S(\hat{x}, R)$: 球面 $\partial B_R(\hat{x})$.
 - 带时间变量的欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$ (约定 x 代表空间位置, t 代表时间变量.)
- **算子:** 设 $u(x)$ 是定义在 Ω 上的函数
 - **偏导算子** $D_i = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$: $\partial_i u = u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ 代表 $u(x)$ 关于第 i 个变量 x_i 的偏导数 ($i = 1, \dots, n$); (若 $u = u(x, t)$, 对时间变量的偏导数总记作 $\partial_t u$ 或 u_t) (注: $u_{x_i x_j} \doteq \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$; $u_{tt} = \partial_{tt} u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$)
 - **梯度算子** $D = (\partial_1, \dots, \partial_n)$: $Du(x) = (\partial_1 u(x), \dots, \partial_n u(x))$ 是 u 在 x 点的梯度 (行) 向量. (Du 也记作 $\text{grad } u$ 或 ∇u)
 - **散度算子** div : 设 $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$ 是 Ω 上的连续可微向量场, $\text{div} F \doteq \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$
 - **Laplace 算子** $\Delta u = \text{div} Du$: 在欧氏空间直角坐标系下 $\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$ (注 1: 算子 D, div, Δ 都是由度量确定的几何对象, 坐标系变换后其形式要对应改变, 是物理、黎曼几何中的基本研究对象. 注 2: 约定即使 $u = u(x, t)$, $\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} u(x_1, \dots, x_n, t)$)
 - **旋度算子** curl 或 rot 或 $\nabla \times$ (作用于向量场)

常用的标准记号

- **几何:** 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ (**行向量** $x = (x_1, \dots, x_n)$); 内积: $x \cdot y = \langle x, y \rangle = xy^\top$; 以下除非特别说明, 均给定标准的直角坐标系 (即取标准基 $\{e_1, \dots, e_n\}$)
 - $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: 区域 (非空的连通开集); $\bar{\Omega}$: 闭包; $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$: 边界
 - $B_R(\hat{x})$ 或 $B(\hat{x}, R)$: 以 $\hat{x}$ 为中心, 半径为 R 的 (开) 球体; $S_R(\hat{x})$ 或 $S(\hat{x}, R)$: 球面 $\partial B_R(\hat{x})$.
 - 带时间变量的欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$ (约定 x 代表空间位置, t 代表时间变量.)
- **算子:** 设 $u(x)$ 是定义在 Ω 上的函数
 - **偏导算子** $D_i = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$: $\partial_i u = u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ 代表 $u(x)$ 关于第 i 个变量 x_i 的偏导数 ($i = 1, \dots, n$); (若 $u = u(x, t)$, 对时间变量的偏导数总记作 $\partial_t u$ 或 u_t) (注: $u_{x_i x_j} \doteq \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$; $u_{tt} = \partial_{tt} u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$)
 - **梯度算子** $D = (\partial_1, \dots, \partial_n)$: $Du(x) = (\partial_1 u(x), \dots, \partial_n u(x))$ 是 u 在 x 点的梯度 (行) 向量. (Du 也记作 $\text{grad } u$ 或 ∇u)
 - **散度算子** div : 设 $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$ 是 Ω 上的连续可微向量场, $\text{div} F \doteq \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$
 - **Laplace 算子** $\Delta u = \text{div} Du$: 在欧氏空间直角坐标系下 $\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$ (注 1: 算子 D, div, Δ 都是由度量确定的几何对象, 坐标系变换后其形式要对应改变, 是物理、黎曼几何中的基本研究对象. 注 2: 约定即使 $u = u(x, t)$, $\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} u(x_1, \dots, x_n, t)$)
 - **旋度算子** curl 或 rot 或 $\nabla \times$ (作用于向量场)

常用的标准记号

- **几何:** 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ (**行向量** $x = (x_1, \dots, x_n)$); 内积: $x \cdot y = \langle x, y \rangle = xy^\top$; 以下除非特别说明, 均给定标准的直角坐标系 (即取标准基 $\{e_1, \dots, e_n\}$)
 - $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: 区域 (非空的连通开集); $\bar{\Omega}$: 闭包; $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$: 边界
 - $B_R(\hat{x})$ 或 $B(\hat{x}, R)$: 以 $\hat{x}$ 为中心, 半径为 R 的 (开) 球体; $S_R(\hat{x})$ 或 $S(\hat{x}, R)$: 球面 $\partial B_R(\hat{x})$.
 - 带时间变量的欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$ (约定 x 代表空间位置, t 代表时间变量.)
- **算子:** 设 $u(x)$ 是定义在 Ω 上的函数
 - **偏导算子** $D_i = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$: $\partial_i u = u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ 代表 $u(x)$ 关于第 i 个变量 x_i 的偏导数 ($i = 1, \dots, n$); (若 $u = u(x, t)$, 对时间变量的偏导数总记作 $\partial_t u$ 或 u_t) (注: $u_{x_i x_j} \doteq \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$; $u_{tt} = \partial_{tt} u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$)
 - **梯度算子** $D = (\partial_1, \dots, \partial_n)$: $Du(x) = (\partial_1 u(x), \dots, \partial_n u(x))$ 是 u 在 x 点的梯度 (行) 向量. (Du 也记作 $\text{grad } u$ 或 ∇u)
 - **散度算子** div : 设 $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$ 是 Ω 上的连续可微向量场, $\text{div} F \doteq \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$
 - **Laplace 算子** $\Delta u = \text{div} Du$: 在欧氏空间直角坐标系下 $\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$ (注 1: 算子 D, div, Δ 都是由度量确定的几何对象, 坐标系变换后其形式要对应改变, 是物理、黎曼几何中的基本研究对象. 注 2: 约定即使 $u = u(x, t)$, $\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}(x_1, \dots, x_n, t)$)
 - **旋度算子** curl 或 rot 或 $\nabla \times$ (作用于向量场)

常用的标准记号

- **几何:** 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ (**行向量** $x = (x_1, \dots, x_n)$); 内积: $x \cdot y = \langle x, y \rangle = xy^\top$; 以下除非特别说明, 均给定标准的直角坐标系 (即取标准基 $\{e_1, \dots, e_n\}$)
 - $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: 区域 (非空的连通开集); $\bar{\Omega}$: 闭包; $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$: 边界
 - $B_R(\hat{x})$ 或 $B(\hat{x}, R)$: 以 $\hat{x}$ 为中心, 半径为 R 的 (开) 球体; $S_R(\hat{x})$ 或 $S(\hat{x}, R)$: 球面 $\partial B_R(\hat{x})$.
 - 带时间变量的欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$ (约定 x 代表空间位置, t 代表时间变量.)
- **算子:** 设 $u(x)$ 是定义在 Ω 上的函数
 - **偏导算子** $D_i = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$: $\partial_i u = u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ 代表 $u(x)$ 关于第 i 个变量 x_i 的偏导数 ($i = 1, \dots, n$); (若 $u = u(x, t)$, 对时间变量的偏导数总记作 $\partial_t u$ 或 u_t) (注: $u_{x_i x_j} \doteq \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$; $u_{tt} = \partial_{tt} u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$)
 - **梯度算子** $D = (\partial_1, \dots, \partial_n)$: $Du(x) = (\partial_1 u(x), \dots, \partial_n u(x))$ 是 u 在 x 点的梯度 (行) 向量. (Du 也记作 $\text{grad } u$ 或 ∇u)
 - **散度算子** div : 设 $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$ 是 Ω 上的连续可微向量场, $\text{div} F \doteq \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$
 - **Laplace 算子** $\Delta u = \text{div} Du$: 在欧氏空间直角坐标系下 $\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$ (注 1: 算子 D, div, Δ 都是由度量确定的几何对象, 坐标系变换后其形式要对应改变, 是物理、黎曼几何中的基本研究对象. 注 2: 约定即使 $u = u(x, t)$, $\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} u(x_1, \dots, x_n, t)$)
 - **旋度算子** curl 或 rot 或 $\nabla \times$ (作用于向量场)

常用的标准记号

- **几何:** 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ (**行向量** $x = (x_1, \dots, x_n)$); 内积: $x \cdot y = \langle x, y \rangle = xy^\top$; 以下除非特别说明, 均给定标准的直角坐标系 (即取标准基 $\{e_1, \dots, e_n\}$)
 - $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: 区域 (非空的连通开集); $\bar{\Omega}$: 闭包; $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$: 边界
 - $B_R(\hat{x})$ 或 $B(\hat{x}, R)$: 以 $\hat{x}$ 为中心, 半径为 R 的 (开) 球体; $S_R(\hat{x})$ 或 $S(\hat{x}, R)$: 球面 $\partial B_R(\hat{x})$.
 - 带时间变量的欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$ (约定 x 代表空间位置, t 代表时间变量.)
- **算子:** 设 $u(x)$ 是定义在 Ω 上的函数
 - **偏导算子** $D_i = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$: $\partial_i u = u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ 代表 $u(x)$ 关于第 i 个变量 x_i 的偏导数 ($i = 1, \dots, n$); (若 $u = u(x, t)$, 对时间变量的偏导数总记作 $\partial_t u$ 或 u_t) (注: $u_{x_i x_j} \doteq \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$; $u_{tt} = \partial_{tt} u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$)
 - **梯度算子** $D = (\partial_1, \dots, \partial_n)$: $Du(x) = (\partial_1 u(x), \dots, \partial_n u(x))$ 是 u 在 x 点的梯度 (行) 向量. (Du 也记作 $\text{grad } u$ 或 ∇u)
 - **散度算子** div : 设 $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$ 是 Ω 上的连续可微向量场, $\text{div} F \doteq \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$
 - **Laplace 算子** $\Delta u = \text{div} Du$: 在欧氏空间直角坐标系下 $\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$ (注 1: 算子 D, div, Δ 都是由度量确定的几何对象, 坐标系变换后其形式要对应改变, 是物理、黎曼几何中的基本研究对象. 注 2: 约定即使 $u = u(x, t)$, $\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} u(x_1, \dots, x_n, t)$)
 - **旋度算子** curl 或 rot 或 $\nabla \times$ (作用于向量场)

常用的标准记号

- **几何:** 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ (**行向量** $x = (x_1, \dots, x_n)$); 内积: $x \cdot y = \langle x, y \rangle = xy^\top$; 以下除非特别说明, 均给定标准的直角坐标系 (即取标准基 $\{e_1, \dots, e_n\}$)
 - $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: 区域 (非空的连通开集); $\bar{\Omega}$: 闭包; $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$: 边界
 - $B_R(\hat{x})$ 或 $B(\hat{x}, R)$: 以 $\hat{x}$ 为中心, 半径为 R 的 (开) 球体; $S_R(\hat{x})$ 或 $S(\hat{x}, R)$: 球面 $\partial B_R(\hat{x})$.
 - 带时间变量的欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$ (约定 x 代表空间位置, t 代表时间变量.)
- **算子:** 设 $u(x)$ 是定义在 Ω 上的函数
 - **偏导算子** $D_i = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$: $\partial_i u = u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ 代表 $u(x)$ 关于第 i 个变量 x_i 的偏导数 ($i = 1, \dots, n$); (若 $u = u(x, t)$, 对时间变量的偏导数总记作 $\partial_t u$ 或 u_t) (注: $u_{x_i x_j} \doteq \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$; $u_{tt} = \partial_{tt} u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$)
 - **梯度算子** $D = (\partial_1, \dots, \partial_n)$: $Du(x) = (\partial_1 u(x), \dots, \partial_n u(x))$ 是 u 在 x 点的梯度 (行) 向量. (Du 也记作 $\text{grad } u$ 或 ∇u)
 - **散度算子** div : 设 $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$ 是 Ω 上的连续可微向量场, $\text{div} F \doteq \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$
 - **Laplace 算子** $\Delta u = \text{div} Du$: 在欧氏空间直角坐标系下 $\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$ (注 1: 算子 D, div, Δ 都是由度量确定的几何对象, 坐标系变换后其形式要对应改变, 是物理、黎曼几何中的基本研究对象. 注 2: 约定即使 $u = u(x, t)$, $\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} u(x_1, \dots, x_n, t)$)
 - **旋度算子** curl 或 rot 或 $\nabla \times$ (作用于向量场)

常用的标准记号

- **几何:** 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ (**行向量** $x = (x_1, \dots, x_n)$); 内积: $x \cdot y = \langle x, y \rangle = xy^\top$; 以下除非特别说明, 均给定标准的直角坐标系 (即取标准基 $\{e_1, \dots, e_n\}$)
 - $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: 区域 (非空的连通开集); $\bar{\Omega}$: 闭包; $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$: 边界
 - $B_R(\hat{x})$ 或 $B(\hat{x}, R)$: 以 $\hat{x}$ 为中心, 半径为 R 的 (开) 球体; $S_R(\hat{x})$ 或 $S(\hat{x}, R)$: 球面 $\partial B_R(\hat{x})$.
 - 带时间变量的欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$ (约定 x 代表空间位置, t 代表时间变量.)
- **算子:** 设 $u(x)$ 是定义在 Ω 上的函数
 - **偏导算子** $D_i = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$: $\partial_i u = u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ 代表 $u(x)$ 关于第 i 个变量 x_i 的偏导数 ($i = 1, \dots, n$); (若 $u = u(x, t)$, 对时间变量的偏导数总记作 $\partial_t u$ 或 u_t) (注: $u_{x_i x_j} \doteq \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$; $u_{tt} = \partial_{tt} u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$)
 - **梯度算子** $D = (\partial_1, \dots, \partial_n)$: $Du(x) = (\partial_1 u(x), \dots, \partial_n u(x))$ 是 u 在 x 点的梯度 (行) 向量. (Du 也记作 $\text{grad } u$ 或 ∇u)
 - **散度算子** div : 设 $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$ 是 Ω 上的连续可微向量场, $\text{div} F \doteq \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$
 - **Laplace 算子** $\Delta u = \text{div} Du$: 在欧氏空间直角坐标系下 $\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$ (注 1: 算子 D, div, Δ 都是由度量确定的几何对象, 坐标系变换后其形式要对应改变, 是物理、黎曼几何中的基本研究对象. 注 2: 约定即使 $u = u(x, t)$, $\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} u(x_1, \dots, x_n, t)$)
 - **旋度算子** curl 或 rot 或 $\nabla \times$ (作用于向量场)

高阶偏导数与多重指标

● $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 其中 $\alpha_i \in \mathbb{N}$ (非负整数); $|\alpha| \doteq \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; $\alpha! \doteq \alpha_1! \dots \alpha_n!$

● 单项式 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$; $\partial^\alpha = D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$

● $D^k u(x) \doteq \{\partial^\alpha u(x) : |\alpha| = k\}$ (全体 k 阶偏导数); $|D^k u(x)| = \left(\sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha u(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

● $k = 1$: $Du(x)$ (梯度行向量)

● $k = 2$: $D^2 u(x) = (\partial_{ij} u(x))_{1 \leq i, j \leq n}$ (Hessian 矩阵)

● $u = u(x, t)$: 记 $\partial_x^\alpha u = D_x^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u(x, t)$

● 设 $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是向量值函数, $u = (u_1, \dots, u_m)$, 记 $D^k u = \{D^k u_1, \dots, D^k u_m\}$

函数空间

● $C(\Omega)$: 定义域是 Ω 的全体实数值连续函数组成的线性空间

● $C^k(\Omega) \doteq \{u \in C(\Omega) : D^\alpha u \in C(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$

● $C^\infty(\Omega) \doteq \cap_{k=1}^\infty C^k(\Omega)$

● $C_c^\infty(\Omega) \doteq \{u \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } u \subset \Omega \text{ 是紧集}\}$. $\text{supp } u \doteq \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$ (非零点集的闭包)

高阶偏导数与多重指标

● $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 其中 $\alpha_i \in \mathbb{N}$ (非负整数); $|\alpha| \doteq \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; $\alpha! \doteq \alpha_1! \dots \alpha_n!$

● 单项式 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$; $\partial^\alpha = D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$

● $D^k u(x) \doteq \{\partial^\alpha u(x) : |\alpha| = k\}$ (全体 k 阶偏导数); $|D^k u(x)| = \left(\sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha u(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

● $k = 1$: $Du(x)$ (梯度行向量)

● $k = 2$: $D^2 u(x) = (\partial_{ij} u(x))_{1 \leq i, j \leq n}$ (Hessian 矩阵)

● $u = u(x, t)$: 记 $\partial_x^\alpha u = D_x^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u(x, t)$

● 设 $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是向量值函数, $u = (u_1, \dots, u_m)$, 记 $D^k u = \{D^k u_1, \dots, D^k u_m\}$

函数空间

● $C(\Omega)$: 定义域是 Ω 的全体实数值连续函数组成的线性空间

● $C^k(\Omega) \doteq \{u \in C(\Omega) : D^\alpha u \in C(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$

● $C^\infty(\Omega) \doteq \cap_{k=1}^\infty C^k(\Omega)$

● $C_c^\infty(\Omega) \doteq \{u \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } u \subset \Omega \text{ 是紧集}\}$. $\text{supp } u \doteq \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$ (非零点集的闭包)

高阶偏导数与多重指标

● $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 其中 $\alpha_i \in \mathbb{N}$ (非负整数); $|\alpha| \doteq \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; $\alpha! \doteq \alpha_1! \dots \alpha_n!$

● 单项式 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$; $\partial^\alpha = D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$

● $D^k u(x) \doteq \{\partial^\alpha u(x) : |\alpha| = k\}$ (全体 k 阶偏导数); $|D^k u(x)| = \left(\sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha u(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

● $k = 1$: $Du(x)$ (梯度行向量)

● $k = 2$: $D^2 u(x) = (\partial_{ij} u(x))_{1 \leq i, j \leq n}$ (Hessian 矩阵)

● $u = u(x, t)$: 记 $\partial_x^\alpha u = D_x^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u(x, t)$

● 设 $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是向量值函数, $u = (u_1, \dots, u_m)$, 记 $D^k u = \{D^k u_1, \dots, D^k u_m\}$

函数空间

● $C(\Omega)$: 定义域是 Ω 的全体实数值连续函数组成的线性空间

● $C^k(\Omega) \doteq \{u \in C(\Omega) : D^\alpha u \in C(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$

● $C^\infty(\Omega) \doteq \cap_{k=1}^\infty C^k(\Omega)$

● $C_c^\infty(\Omega) \doteq \{u \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } u \subset \Omega \text{ 是紧集}\}$. $\text{supp } u \doteq \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$ (非零点集的闭包)

高阶偏导数与多重指标

- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 其中 $\alpha_i \in \mathbb{N}$ (非负整数); $|\alpha| \doteq \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; $\alpha! \doteq \alpha_1! \dots \alpha_n!$

- 单项式 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$; $\partial^\alpha = D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$

- $D^k u(x) \doteq \{\partial^\alpha u(x) : |\alpha| = k\}$ (全体 k 阶偏导数); $|D^k u(x)| = \left(\sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha u(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

- $k = 1$: $Du(x)$ (梯度行向量)

- $k = 2$: $D^2 u(x) = (\partial_{ij} u(x))_{1 \leq i, j \leq n}$ (Hessian 矩阵)

- $u = u(x, t)$: 记 $\partial_x^\alpha u = D_x^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u(x, t)$

- 设 $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是向量值函数, $u = (u_1, \dots, u_m)$, 记 $D^k u = \{D^k u_1, \dots, D^k u_m\}$

函数空间

- $C(\Omega)$: 定义域是 Ω 的全体实数值连续函数组成的线性空间

- $C^k(\Omega) \doteq \{u \in C(\Omega) : D^\alpha u \in C(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$

- $C^\infty(\Omega) \doteq \cap_{k=1}^\infty C^k(\Omega)$

- $C_c^\infty(\Omega) \doteq \{u \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } u \subset \Omega \text{ 是紧集}\}$. $\text{supp } u \doteq \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$ (非零点集的闭包)

高阶偏导数与多重指标

- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 其中 $\alpha_i \in \mathbb{N}$ (非负整数); $|\alpha| \doteq \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; $\alpha! \doteq \alpha_1! \dots \alpha_n!$

- 单项式 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$; $\partial^\alpha = D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$

- $D^k u(x) \doteq \{\partial^\alpha u(x) : |\alpha| = k\}$ (全体 k 阶偏导数); $|D^k u(x)| = \left(\sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha u(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

- $k = 1$: $Du(x)$ (梯度行向量)

- $k = 2$: $D^2 u(x) = (\partial_{ij} u(x))_{1 \leq i, j \leq n}$ (Hessian 矩阵)

- $u = u(x, t)$: 记 $\partial_x^\alpha u = D_x^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u(x, t)$

- 设 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是向量值函数, $u = (u_1, \dots, u_m)$, 记 $D^k u = \{D^k u_1, \dots, D^k u_m\}$

函数空间

- $C(\Omega)$: 定义域是 Ω 的全体实数值连续函数组成的线性空间

- $C^k(\Omega) \doteq \{u \in C(\Omega) : D^\alpha u \in C(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$

- $C^\infty(\Omega) \doteq \cap_{k=1}^\infty C^k(\Omega)$

- $C_c^\infty(\Omega) \doteq \{u \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } u \subset \Omega \text{ 是紧集}\}$. $\text{supp } u \doteq \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$ (非零点集的闭包)

高阶偏导数与多重指标

- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 其中 $\alpha_i \in \mathbb{N}$ (非负整数); $|\alpha| \doteq \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; $\alpha! \doteq \alpha_1! \dots \alpha_n!$

- 单项式 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$; $\partial^\alpha = D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$

- $D^k u(x) \doteq \{\partial^\alpha u(x) : |\alpha| = k\}$ (全体 k 阶偏导数); $|D^k u(x)| = \left(\sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha u(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

- $k = 1$: $Du(x)$ (梯度行向量)

- $k = 2$: $D^2 u(x) = (\partial_{ij} u(x))_{1 \leq i, j \leq n}$ (Hessian 矩阵)

- $u = u(x, t)$: 记 $\partial_x^\alpha u = D_x^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u(x, t)$

- 设 $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是向量值函数, $u = (u_1, \dots, u_m)$, 记 $D^k u = \{D^k u_1, \dots, D^k u_m\}$

函数空间

- $C(\Omega)$: 定义域是 Ω 的全体实数值连续函数组成的线性空间

- $C^k(\Omega) \doteq \{u \in C(\Omega) : D^\alpha u \in C(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$

- $C^\infty(\Omega) \doteq \cap_{k=1}^\infty C^k(\Omega)$

- $C_c^\infty(\Omega) \doteq \{u \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } u \subset \Omega \text{ 是紧集}\}$. $\text{supp } u \doteq \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$ (非零点集的闭包)

高阶偏导数与多重指标

- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 其中 $\alpha_i \in \mathbb{N}$ (非负整数); $|\alpha| \doteq \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; $\alpha! \doteq \alpha_1! \dots \alpha_n!$

- 单项式 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$; $\partial^\alpha = D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$

- $D^k u(x) \doteq \{\partial^\alpha u(x) : |\alpha| = k\}$ (全体 k 阶偏导数); $|D^k u(x)| = \left(\sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha u(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

- $k = 1$: $Du(x)$ (梯度行向量)

- $k = 2$: $D^2 u(x) = (\partial_{ij} u(x))_{1 \leq i, j \leq n}$ (Hessian 矩阵)

- $u = u(x, t)$: 记 $\partial_x^\alpha u = D_x^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u(x, t)$

- 设 $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是向量值函数, $u = (u_1, \dots, u_m)$, 记 $D^k u = \{D^k u_1, \dots, D^k u_m\}$

函数空间

- $C(\Omega)$: 定义域是 Ω 的全体实数值连续函数组成的线性空间

- $C^k(\Omega) \doteq \{u \in C(\Omega) : D^\alpha u \in C(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$

- $C^\infty(\Omega) \doteq \cap_{k=1}^\infty C^k(\Omega)$

- $C_c^\infty(\Omega) \doteq \{u \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } u \subset \Omega \text{ 是紧集}\}$. $\text{supp } u \doteq \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$ (非零点集的闭包)

高阶偏导数与多重指标

- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 其中 $\alpha_i \in \mathbb{N}$ (非负整数); $|\alpha| \doteq \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; $\alpha! \doteq \alpha_1! \dots \alpha_n!$
- 单项式 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$; $\partial^\alpha = D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$
- $D^k u(x) \doteq \{\partial^\alpha u(x) : |\alpha| = k\}$ (全体 k 阶偏导数); $|D^k u(x)| = \left(\sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha u(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
 - $k = 1$: $Du(x)$ (梯度行向量)
 - $k = 2$: $D^2 u(x) = (\partial_{ij} u(x))_{1 \leq i, j \leq n}$ (Hessian 矩阵)
 - $u = u(x, t)$: 记 $\partial_x^\alpha u = D_x^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u(x, t)$
- 设 $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是向量值函数, $u = (u_1, \dots, u_m)$, 记 $D^k u = \{D^k u_1, \dots, D^k u_m\}$

函数空间

- $C(\Omega)$: 定义域是 Ω 的全体实数值连续函数组成的线性空间
- $C^k(\Omega) \doteq \{u \in C(\Omega) : D^\alpha u \in C(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$
- $C^\infty(\Omega) \doteq \bigcap_{k=1}^\infty C^k(\Omega)$
- $C_c^\infty(\Omega) \doteq \{u \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } u \subset \Omega \text{ 是紧集}\}$. $\text{supp } u \doteq \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$ (非零点集的闭包)

高阶偏导数与多重指标

- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 其中 $\alpha_i \in \mathbb{N}$ (非负整数); $|\alpha| \doteq \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; $\alpha! \doteq \alpha_1! \dots \alpha_n!$
- 单项式 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$; $\partial^\alpha = D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$
- $D^k u(x) \doteq \{\partial^\alpha u(x) : |\alpha| = k\}$ (全体 k 阶偏导数); $|D^k u(x)| = \left(\sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha u(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
 - $k = 1$: $Du(x)$ (梯度行向量)
 - $k = 2$: $D^2 u(x) = (\partial_{ij} u(x))_{1 \leq i, j \leq n}$ (Hessian 矩阵)
 - $u = u(x, t)$: 记 $\partial_x^\alpha u = D_x^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u(x, t)$
- 设 $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是向量值函数, $u = (u_1, \dots, u_m)$, 记 $D^k u = \{D^k u_1, \dots, D^k u_m\}$

函数空间

- $C(\Omega)$: 定义域是 Ω 的全体实数值连续函数组成的线性空间
- $C^k(\Omega) \doteq \{u \in C(\Omega) : D^\alpha u \in C(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$
- $C^\infty(\Omega) \doteq \bigcap_{k=1}^\infty C^k(\Omega)$
- $C_c^\infty(\Omega) \doteq \{u \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } u \subset \Omega \text{ 是紧集}\}$. $\text{supp } u \doteq \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$ (非零点集的闭包)

高阶偏导数与多重指标

- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 其中 $\alpha_i \in \mathbb{N}$ (非负整数); $|\alpha| \doteq \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; $\alpha! \doteq \alpha_1! \dots \alpha_n!$
- 单项式 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$; $\partial^\alpha = D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$
- $D^k u(x) \doteq \{\partial^\alpha u(x) : |\alpha| = k\}$ (全体 k 阶偏导数); $|D^k u(x)| = \left(\sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha u(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
 - $k = 1$: $Du(x)$ (梯度行向量)
 - $k = 2$: $D^2 u(x) = (\partial_{ij} u(x))_{1 \leq i, j \leq n}$ (Hessian 矩阵)
 - $u = u(x, t)$: 记 $\partial_x^\alpha u = D_x^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u(x, t)$
- 设 $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是向量值函数, $u = (u_1, \dots, u_m)$, 记 $D^k u = \{D^k u_1, \dots, D^k u_m\}$

函数空间

- $C(\Omega)$: 定义域是 Ω 的全体实数值连续函数组成的线性空间
- $C^k(\Omega) \doteq \{u \in C(\Omega) : D^\alpha u \in C(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$
- $C^\infty(\Omega) \doteq \cap_{k=1}^\infty C^k(\Omega)$
- $C_c^\infty(\Omega) \doteq \{u \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } u \subset \Omega \text{ 是紧集}\}$. $\text{supp } u \doteq \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$ (非零点集的闭包)

高阶偏导数与多重指标

- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 其中 $\alpha_i \in \mathbb{N}$ (非负整数); $|\alpha| \doteq \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; $\alpha! \doteq \alpha_1! \dots \alpha_n!$
- 单项式 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$; $\partial^\alpha = D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$
- $D^k u(x) \doteq \{\partial^\alpha u(x) : |\alpha| = k\}$ (全体 k 阶偏导数); $|D^k u(x)| = \left(\sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha u(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
 - $k = 1$: $Du(x)$ (梯度行向量)
 - $k = 2$: $D^2 u(x) = (\partial_{ij} u(x))_{1 \leq i, j \leq n}$ (Hessian 矩阵)
 - $u = u(x, t)$: 记 $\partial_x^\alpha u = D_x^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u(x, t)$
- 设 $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是向量值函数, $u = (u_1, \dots, u_m)$, 记 $D^k u = \{D^k u_1, \dots, D^k u_m\}$

函数空间

- $C(\Omega)$: 定义域是 Ω 的全体实数值连续函数组成的线性空间
- $C^k(\Omega) \doteq \{u \in C(\Omega) : D^\alpha u \in C(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$
- $C^\infty(\Omega) \doteq \cap_{k=1}^\infty C^k(\Omega)$
- $C_c^\infty(\Omega) \doteq \{u \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } u \subset \Omega \text{ 是紧集}\}$. $\text{supp } u \doteq \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$ (非零点集的闭包)

链式法则和 Taylor 公式

- 链式法则: 设 $F = (F_1, \dots, F_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $G = (G_1, \dots, G_p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, 对应 Jacobi 矩阵 (线性化算子) 记作

$$DF(x) = \left(\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}, \quad DG(y) = \left(\frac{\partial G_k(y)}{\partial y_l} \right)_{1 \leq k \leq p; 1 \leq l \leq m}$$

那么复合映射 $G \circ F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ 的 Jacobi 矩阵是 $D(G \circ F)(x) = DG(F(x))DF(x)$.

- Taylor 公式: 设 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\hat{x} \in \Omega$, $\exists R > 0$ 使得 f 在 $B_R(\hat{x})$ 上有 m 阶连续的偏导函数, 那么

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \underbrace{D^k f(\hat{x})(x - \hat{x})^k}_{\doteq \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(\hat{x})(x - \hat{x})^\alpha} + R_m(x), \quad \forall x \in B_R(\hat{x}),$$

其中余项 $R_m(x) =$

$$\begin{cases} o(|x - \hat{x}|^m), & (x \rightarrow \hat{x}), \\ \frac{1}{(m+1)!} D^{m+1} f(\hat{x} + \theta(x - \hat{x}))(x - \hat{x})^{m+1}, \forall x \in B_R(\hat{x}) \text{ (这里 } \theta \in (0, 1), \text{ 依赖于 } x, \hat{x}), & \text{要求 } f \in C^{m+1}(B_R(\hat{x})). \end{cases}$$

链式法则和 Taylor 公式

- 链式法则: 设 $F = (F_1, \dots, F_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $G = (G_1, \dots, G_p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, 对应 Jacobi 矩阵 (线性化算子) 记作

$$DF(x) = \left(\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}, \quad DG(y) = \left(\frac{\partial G_k(y)}{\partial y_l} \right)_{1 \leq k \leq p; 1 \leq l \leq m}$$

那么复合映射 $G \circ F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ 的 Jacobi 矩阵是 $D(G \circ F)(x) = DG(F(x))DF(x)$.

- Taylor 公式: 设 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\hat{x} \in \Omega$, $\exists R > 0$ 使得 f 在 $B_R(\hat{x})$ 上有 m 阶连续的偏导函数, 那么

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \underbrace{D^k f(\hat{x})(x - \hat{x})^k}_{\doteq \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(\hat{x})(x - \hat{x})^\alpha} + R_m(x), \quad \forall x \in B_R(\hat{x}),$$

其中余项 $R_m(x) =$

$$\begin{cases} o(|x - \hat{x}|^m), & (x \rightarrow \hat{x}), \\ \frac{1}{(m+1)!} D^{m+1} f(\hat{x} + \theta(x - \hat{x}))(x - \hat{x})^{m+1}, \forall x \in B_R(\hat{x}) \text{ (这里 } \theta \in (0, 1), \text{ 依赖于 } x, \hat{x}), & \text{要求 } f \in C^{m+1}(B_R(\hat{x})). \end{cases}$$

偏微分方程及其经典解的概念

定义

设 $F: \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{dn} \times \cdots \times \mathbb{R}^{dn^m} \rightarrow \mathbb{R}^l$ 是已知的函数. 称表达式 $F(x, u, Du, D^2u, \cdots, D^m u) = 0$ 是一个 m 阶的偏微分方程 (组) (PDE). 设 m -阶连续可微函数 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ 使得上式在 Ω 的每一点 x 都成立, 就称 u 是它的一个 (经典) 解.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, n -自变量个数; d -未知函数个数; l -方程个数; m -方程阶数 (要点: 刻画 PDE 难度的指标, 越小 PDE 越简单!) $d > l$: 欠定; $d < l$: 超定; $d = l$: 恰定
- 难易程度: 偏微分方程 > 常微分方程 > 代数方程 > 线性代数方程组 (学习中注意类比和对比)
- 方程只是一个形式表达式, 需要通过提出解的合理的数学定义将之严格化. (哲学: 客观对象由其固有矛盾唯一确定. 只有“矛”或只有“盾”的事物不存在!)
 - 经典解 (连续可微函数) $\Rightarrow$ 弱解 (一般的函数) $\Rightarrow$ 概率解或测度解 (解是测度) $\Rightarrow$ 广义函数解 (解是广义函数)
 - 解释物理现象的需要 (如激波, 湍流, 凝聚); 数学理论完备的需要 (类比数域的扩充); 研究策略的需要 (分离难点: 弱解容易找到, 再研究其正则性)
- 定义解的基本原则: 相容性 (经典解必须是弱解); 常见方法: 推广导数的定义 (例如用分布积分公式或函数在极值点的导数性质); 需要基于对经典解的研究, 来发现并利用 PDE 的独特结构或性质

偏微分方程及其经典解的概念

定义

设 $F: \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{dn} \times \cdots \times \mathbb{R}^{dn^m} \rightarrow \mathbb{R}^l$ 是已知的函数. 称表达式 $F(x, u, Du, D^2u, \cdots, D^m u) = 0$ 是一个 m 阶的偏微分方程 (组) (PDE). 设 m -阶连续可微函数 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ 使得上式在 Ω 的每一点 x 都成立, 就称 u 是它的一个 (经典) 解.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, n -自变量个数; d -未知函数个数; l -方程个数; m -方程阶数 (要点: 刻画 PDE 难度的指标, 越小 PDE 越简单!) $d > l$: 欠定; $d < l$: 超定; $d = l$: 恰定
- 难易程度: 偏微分方程 > 常微分方程 > 代数方程 > 线性代数方程组 (学习中注意类比和对比)
- 方程只是一个形式表达式, 需要通过提出解的合理的数学定义将之严格化. (哲学: 客观对象由其固有矛盾唯一确定. 只有“矛”或只有“盾”的事物不存在!)
 - 经典解 (连续可微函数) $\Rightarrow$ 弱解 (一般的函数) $\Rightarrow$ 概率解或测度解 (解是测度) $\Rightarrow$ 广义函数解 (解是广义函数)
 - 解释物理现象的需要 (如激波, 湍流, 凝聚); 数学理论完备的需要 (类比数域的扩充); 研究策略的需要 (分离难点: 弱解容易找到, 再研究其正则性)
- 定义解的基本原则: 相容性 (经典解必须是弱解); 常见方法: 推广导数的定义 (例如用分布积分公式或函数在极值点的导数性质); 需要基于对经典解的研究, 来发现并利用 PDE 的独特结构或性质

偏微分方程及其经典解的概念

定义

设 $F: \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{dn} \times \cdots \times \mathbb{R}^{dn^m} \rightarrow \mathbb{R}^l$ 是已知的函数. 称表达式 $F(x, u, Du, D^2u, \cdots, D^m u) = 0$ 是一个 m 阶的偏微分方程 (组) (PDE). 设 m -阶连续可微函数 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ 使得上式在 Ω 的每一点 x 都成立, 就称 u 是它的一个 (经典) 解.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, n -自变量个数; d -未知函数个数; l -方程个数; m -方程阶数 (要点: 刻画 PDE 难度的指标, 越小 PDE 越简单!) $d > l$: 欠定; $d < l$: 超定; $d = l$: 恰定
- 难易程度: 偏微分方程 > 常微分方程 > 代数方程 > 线性代数方程组 (学习中注意类比和对比)
- 方程只是一个形式表达式, 需要通过提出解的合理的数学定义将之严格化. (哲学: 客观对象由其固有矛盾唯一确定. 只有“矛”或只有“盾”的事物不存在!)
 - 经典解 (连续可微函数) $\Rightarrow$ 弱解 (一般的函数) $\Rightarrow$ 概率解或测度解 (解是测度) $\Rightarrow$ 广义函数解 (解是广义函数)
 - 解释物理现象的需要 (如激波, 湍流, 凝聚); 数学理论完备的需要 (类比数域的扩充); 研究策略的需要 (分离难点: 弱解容易找到, 再研究其正则性)
 - 定义解的基本原则: 相容性 (经典解必须是弱解); 常见方法: 推广导数的定义 (例如用分布积分公式或函数在极值点的导数性质); 需要基于对经典解的研究, 来发现并利用 PDE 的独特结构或性质

偏微分方程及其经典解的概念

定义

设 $F: \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{dn} \times \cdots \times \mathbb{R}^{dn^m} \rightarrow \mathbb{R}^l$ 是已知的函数. 称表达式 $F(x, u, Du, D^2u, \cdots, D^m u) = 0$ 是一个 m 阶的偏微分方程 (组) (PDE). 设 m -阶连续可微函数 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ 使得上式在 Ω 的每一点 x 都成立, 就称 u 是它的一个 (经典) 解.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, n -自变量个数; d -未知函数个数; l -方程个数; m -方程阶数 (要点: 刻画 PDE 难度的指标, 越小 PDE 越简单!) $d > l$: 欠定; $d < l$: 超定; $d = l$: 恰定
- 难易程度: 偏微分方程 > 常微分方程 > 代数方程 > 线性代数方程组 (学习中注意类比和对比)
- 方程只是一个形式表达式, 需要通过提出解的合理的数学定义将之严格化. (哲学: 客观对象由其固有矛盾唯一确定. 只有“矛”或只有“盾”的事物不存在!)
 - 经典解 (连续可微函数) $\Rightarrow$ 弱解 (一般的函数) $\Rightarrow$ 概率解或测度解 (解是测度) $\Rightarrow$ 广义函数解 (解是广义函数)
 - 解释物理现象的需要 (如激波, 湍流, 凝聚); 数学理论完备的需要 (类比数域的扩充); 研究策略的需要 (分离难点: 弱解容易找到, 再研究其正则性)
 - 定义解的基本原则: 相容性 (经典解必须是弱解); 常见方法: 推广导数的定义 (例如用分布积分公式或函数在极值点的导数性质); 需要基于对经典解的研究, 来发现并利用 PDE 的独特结构或性质

偏微分方程及其经典解的概念

定义

设 $F: \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{dn} \times \cdots \times \mathbb{R}^{dn^m} \rightarrow \mathbb{R}^l$ 是已知的函数. 称表达式 $F(x, u, Du, D^2u, \cdots, D^m u) = 0$ 是一个 m 阶的偏微分方程 (组) (PDE). 设 m -阶连续可微函数 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ 使得上式在 Ω 的每一点 x 都成立, 就称 u 是它的一个 (经典) 解.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, n -自变量个数; d -未知函数个数; l -方程个数; m -方程阶数 (要点: 刻画 PDE 难度的指标, 越小 PDE 越简单!) $d > l$: 欠定; $d < l$: 超定; $d = l$: 恰定
- 难易程度: 偏微分方程 > 常微分方程 > 代数方程 > 线性代数方程组 (学习中注意类比和对比)
- 方程只是一个形式表达式, 需要通过提出解的合理的数学定义将之严格化. (哲学: 客观对象由其固有矛盾唯一确定. 只有“矛”或只有“盾”的事物不存在!)
 - 经典解 (连续可微函数) $\Rightarrow$ 弱解 (一般的函数) $\Rightarrow$ 概率解或测度解 (解是测度) $\Rightarrow$ 广义函数解 (解是广义函数)
 - 解释物理现象的需要 (如激波, 湍流, 凝聚); 数学理论完备的需要 (类比数域的扩充); 研究策略的需要 (分离难点: 弱解容易找到, 再研究其正则性)
 - 定义解的基本原则: 相容性 (经典解必须是弱解); 常见方法: 推广导数的定义 (例如用分布积分公式或函数在极值点的导数性质); 需要基于对经典解的研究, 来发现并利用 PDE 的独特结构或性质

偏微分方程及其经典解的概念

定义

设 $F: \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{dn} \times \cdots \times \mathbb{R}^{dn^m} \rightarrow \mathbb{R}^l$ 是已知的函数. 称表达式 $F(x, u, Du, D^2u, \cdots, D^m u) = 0$ 是一个 m 阶的偏微分方程 (组) (PDE). 设 m -阶连续可微函数 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ 使得上式在 Ω 的每一点 x 都成立, 就称 u 是它的一个 (经典) 解.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, n -自变量个数; d -未知函数个数; l -方程个数; m -方程阶数 (要点: 刻画 PDE 难度的指标, 越小 PDE 越简单!) $d > l$: 欠定; $d < l$: 超定; $d = l$: 恰定
- 难易程度: 偏微分方程 > 常微分方程 > 代数方程 > 线性代数方程组 (学习中注意类比和对比)
- 方程只是一个形式表达式, 需要通过提出解的合理的数学定义将之严格化. (哲学: 客观对象由其固有矛盾唯一确定. 只有“矛”或只有“盾”的事物不存在!)
 - 经典解 (连续可微函数) $\Rightarrow$ 弱解 (一般的函数) $\Rightarrow$ 概率解或测度解 (解是测度) $\Rightarrow$ 广义函数解 (解是广义函数)
 - 解释物理现象的需要 (如激波, 湍流, 凝聚); 数学理论完备的需要 (类比数域的扩充); 研究策略的需要 (分离难点: 弱解容易找到, 再研究其正则性)
- 定义解的基本原则: 相容性 (经典解必须是弱解); 常见方法: 推广导数的定义 (例如用分布积分公式或函数在极值点的导数性质); 需要基于对经典解的研究, 来发现并利用 PDE 的独特结构或性质

偏微分方程及其经典解的概念

定义

设 $F: \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{dn} \times \cdots \times \mathbb{R}^{dn^m} \rightarrow \mathbb{R}^l$ 是已知的函数. 称表达式 $F(x, u, Du, D^2u, \cdots, D^m u) = 0$ 是一个 m 阶的偏微分方程 (组) (PDE). 设 m -阶连续可微函数 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ 使得上式在 Ω 的每一点 x 都成立, 就称 u 是它的一个 (经典) 解.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, n -自变量个数; d -未知函数个数; l -方程个数; m -方程阶数 (要点: 刻画 PDE 难度的指标, 越小 PDE 越简单!) $d > l$: 欠定; $d < l$: 超定; $d = l$: 恰定
- 难易程度: 偏微分方程 > 常微分方程 > 代数方程 > 线性代数方程组 (学习中注意类比和对比)
- 方程只是一个形式表达式, 需要通过提出解的合理的数学定义将之严格化. (哲学: 客观对象由其固有矛盾唯一确定. 只有“矛”或只有“盾”的事物不存在!)
 - 经典解 (连续可微函数) $\Rightarrow$ 弱解 (一般的函数) $\Rightarrow$ 概率解或测度解 (解是测度) $\Rightarrow$ 广义函数解 (解是广义函数)
 - 解释物理现象的需要 (如激波, 湍流, 凝聚); 数学理论完备的需要 (类比数域的扩充); 研究策略的需要 (分离难点: 弱解容易找到, 再研究其正则性)
- 定义解的基本原则: 相容性 (经典解必须是弱解); 常见方法: 推广导数的定义 (例如用分布积分公式或函数在极值点的导数性质); 需要基于对经典解的研究, 来发现并利用 PDE 的独特结构或性质

线性 PDE

● 线性 PDE

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u - f(x) = 0$$

- 系数 $-a_\alpha(x)$: 已知函数, 且 $\exists \alpha, |\alpha| = m$ 使得 $a_\alpha \neq 0$. ($\forall |\alpha| \leq m, a_\alpha(x)$ 都是常数时, 称为常系数线性方程.)
- 自由项 $-f(x)$: 已知函数. ($f \equiv 0$ 时称为齐次线性方程.)
- 例: $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$ (波动方程); $u_t - a^2 \Delta u = 0$ (热传导方程); $\Delta u = 0$ (Laplace 方程); $i u_t = -\Delta u$ (Schrödinger 方程, 其中 $i^2 = -1$, 波函数 $u(x, t)$ 是复数值函数)
- 例: Maxwell 方程组 $\epsilon E_t = \text{curl } B, \mu B_t = -\text{curl } E, \text{div } E = 0, \text{div } B = 0$ (电场强度 $E = (E_1, E_2, E_3)$; 磁感应强度 $B = (B_1, B_2, B_3)$)

注意: 记算子 $Lu \doteq \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u$, 成立线性叠加原理 $L(\sum_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda u_\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda Lu_\lambda$

- 有限叠加, Λ 是有限集 $\Rightarrow$ 有限和 (代数) [初边值问题的分解]
- 可列叠加, Λ 是可列集 $\Rightarrow$ 可列和 (函数项无穷级数) [分离变量法]
- 不可列叠加, Λ 是连续统 $\Rightarrow$ 不可列和 (含参变量 (反常) 积分) [积分变换, 齐次化原理].

线性 PDE

● 线性 PDE

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u - f(x) = 0$$

- 系数 $-a_\alpha(x)$: 已知函数, 且 $\exists \alpha, |\alpha| = m$ 使得 $a_\alpha \neq 0$. ($\forall |\alpha| \leq m, a_\alpha(x)$ 都是常数时, 称为常系数线性方程.)
- 自由项 $-f(x)$: 已知函数. ($f \equiv 0$ 时称为齐次线性方程.)
- 例: $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$ (波动方程); $u_t - a^2 \Delta u = 0$ (热传导方程); $\Delta u = 0$ (Laplace 方程); $i u_t = -\Delta u$ (Schrödinger 方程, 其中 $i^2 = -1$, 波函数 $u(x, t)$ 是复数值函数)
- 例: Maxwell 方程组 $\epsilon E_t = \text{curl } B, \mu B_t = -\text{curl } E, \text{div } E = 0, \text{div } B = 0$ (电场强度 $E = (E_1, E_2, E_3)$; 磁感应强度 $B = (B_1, B_2, B_3)$)

注意: 记算子 $Lu \doteq \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u$, 成立线性叠加原理 $L(\sum_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda u_\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda Lu_\lambda$

- 有限叠加, Λ 是有限集 $\Rightarrow$ 有限和 (代数) [初边值问题的分解]
- 可列叠加, Λ 是可列集 $\Rightarrow$ 可列和 (函数项无穷级数) [分离变量法]
- 不可列叠加, Λ 是连续统 $\Rightarrow$ 不可列和 (含参变量 (反常) 积分) [积分变换, 齐次化原理].

线性 PDE

● 线性 PDE

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u - f(x) = 0$$

- 系数 $-a_\alpha(x)$: 已知函数, 且 $\exists \alpha, |\alpha| = m$ 使得 $a_\alpha \neq 0$. ($\forall |\alpha| \leq m, a_\alpha(x)$ 都是常数时, 称为常系数线性方程.)
- 自由项 $-f(x)$: 已知函数. ($f \equiv 0$ 时称为齐次线性方程.)
- 例: $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$ (波动方程); $u_t - a^2 \Delta u = 0$ (热传导方程); $\Delta u = 0$ (Laplace 方程); $i u_t = -\Delta u$ (Schrödinger 方程, 其中 $i^2 = -1$, 波函数 $u(x, t)$ 是复数值函数)
- 例: Maxwell 方程组 $\epsilon E_t = \text{curl } B, \mu B_t = -\text{curl } E, \text{div } E = 0, \text{div } B = 0$ (电场强度 $E = (E_1, E_2, E_3)$; 磁感应强度 $B = (B_1, B_2, B_3)$)

注意: 记算子 $Lu \doteq \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u$, 成立线性叠加原理 $L(\sum_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda u_\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda Lu_\lambda$

- 有限叠加, Λ 是有限集 $\Rightarrow$ 有限和 (代数) [初边值问题的分解]
- 可列叠加, Λ 是可列集 $\Rightarrow$ 可列和 (函数项无穷级数) [分离变量法]
- 不可列叠加, Λ 是连续统 $\Rightarrow$ 不可列和 (含参变量 (反常) 积分) [积分变换, 齐次化原理].

线性 PDE

● 线性 PDE

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u - f(x) = 0$$

- 系数 $-a_\alpha(x)$: 已知函数, 且 $\exists \alpha, |\alpha| = m$ 使得 $a_\alpha \neq 0$. ($\forall |\alpha| \leq m, a_\alpha(x)$ 都是常数时, 称为常系数线性方程.)
- 自由项 $-f(x)$: 已知函数. ($f \equiv 0$ 时称为齐次线性方程.)
- 例: $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$ (波动方程); $u_t - a^2 \Delta u = 0$ (热传导方程); $\Delta u = 0$ (Laplace 方程); $i u_t = -\Delta u$ (Schrödinger 方程, 其中 $i^2 = -1$, 波函数 $u(x, t)$ 是复数值函数)
- 例: Maxwell 方程组 $\epsilon E_t = \text{curl } B, \mu B_t = -\text{curl } E, \text{div } E = 0, \text{div } B = 0$ (电场强度 $E = (E_1, E_2, E_3)$; 磁感应强度 $B = (B_1, B_2, B_3)$)

注意: 记算子 $Lu \doteq \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u$, 成立线性叠加原理 $L(\sum_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda u_\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda Lu_\lambda$

- 有限叠加, Λ 是有限集 $\Rightarrow$ 有限和 (代数) [初边值问题的分解]
- 可列叠加, Λ 是可列集 $\Rightarrow$ 可列和 (函数项无穷级数) [分离变量法]
- 不可列叠加, Λ 是连续统 $\Rightarrow$ 不可列和 (含参变量 (反常) 积分) [积分变换, 齐次化原理].

线性 PDE

● 线性 PDE

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u - f(x) = 0$$

- 系数 $-a_\alpha(x)$: 已知函数, 且 $\exists \alpha, |\alpha| = m$ 使得 $a_\alpha \neq 0$. ($\forall |\alpha| \leq m, a_\alpha(x)$ 都是常数时, 称为常系数线性方程.)
- 自由项 $-f(x)$: 已知函数. ($f \equiv 0$ 时称为齐次线性方程.)
- 例: $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$ (波动方程); $u_t - a^2 \Delta u = 0$ (热传导方程); $\Delta u = 0$ (Laplace 方程); $i u_t = -\Delta u$ (Schrödinger 方程, 其中 $i^2 = -1$, 波函数 $u(x, t)$ 是复数值函数)
- 例: Maxwell 方程组 $\epsilon E_t = \text{curl } B, \mu B_t = -\text{curl } E, \text{div } E = 0, \text{div } B = 0$ (电场强度 $E = (E_1, E_2, E_3)$; 磁感应强度 $B = (B_1, B_2, B_3)$)

注意: 记算子 $Lu \doteq \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u$, 成立线性叠加原理 $L(\sum_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda u_\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda Lu_\lambda$

- 有限叠加, Λ 是有限集 $\Rightarrow$ 有限和 (代数) [初边值问题的分解]
- 可列叠加, Λ 是可列集 $\Rightarrow$ 可列和 (函数项无穷级数) [分离变量法]
- 不可列叠加, Λ 是连续统 $\Rightarrow$ 不可列和 (含参变量 (反常) 积分) [积分变换, 齐次化原理].

线性 PDE

● 线性 PDE

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u - f(x) = 0$$

- 系数 $-a_\alpha(x)$: 已知函数, 且 $\exists \alpha, |\alpha| = m$ 使得 $a_\alpha \neq 0$. ($\forall |\alpha| \leq m, a_\alpha(x)$ 都是常数时, 称为常系数线性方程.)
- 自由项 $-f(x)$: 已知函数. ($f \equiv 0$ 时称为齐次线性方程.)
- 例: $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$ (波动方程); $u_t - a^2 \Delta u = 0$ (热传导方程); $\Delta u = 0$ (Laplace 方程); $i u_t = -\Delta u$ (Schrödinger 方程, 其中 $i^2 = -1$, 波函数 $u(x, t)$ 是复数值函数)
- 例: Maxwell 方程组 $\epsilon E_t = \text{curl } B, \mu B_t = -\text{curl } E, \text{div } E = 0, \text{div } B = 0$ (电场强度 $E = (E_1, E_2, E_3)$; 磁感应强度 $B = (B_1, B_2, B_3)$)

注意: 记算子 $Lu \doteq \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u$, 成立线性叠加原理 $L(\sum_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda u_\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda Lu_\lambda$

- { 有限叠加, Λ 是有限集 $\Rightarrow$ 有限和 (代数) [初边值问题的分解]
 { 可列叠加, Λ 是可列集 $\Rightarrow$ 可列和 (函数项无穷级数) [分离变量法]
 { 不可列叠加, Λ 是连续统 $\Rightarrow$ 不可列和 (含参变量 (反常) 积分) [积分变换, 齐次化原理].

非线性 PDE

- 半线性 PDE $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha u + b(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) = 0$

例: KdV 方程 $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$; 反应扩散方程 $u_t = au_{xx} + bu_{yy} + u(1-u)$, 其中常数 $a, b > 0$.

- 拟线性 PDE $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) D^\alpha u + b(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) = 0$

例: $u_t - \Delta(u^m) = 0$ (常数 $m > 1$ 时称作多孔介质方程; $0 < m < 1$ 时称作 fast diffusion equation)

例: p -Laplace 方程 $u_t - \Delta_p(u) = 0$, 常数 $p > 2$, 而 $\Delta_p(u) = \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du)$

- 完全非线性 PDE: 不具有前述形式的 PDE

例: Hamilton-Jacobi 方程 $u_t + H(Du) = 0$ ($H(p)$ 是关于 p 的非线性函数)

例: eikonal 方程 $|Du|^2 = 1$

例: Monge-Ampère 方程 $\det(D^2u) = f(x)$

例: Hamilton-Jacobi-Bellman 方程 $u_t + \min_{j \in J} \{ \langle a_j(x, t), Du \rangle + g_j(x, t) \} = 0$ (J -指标集; a_j, g_j 是已知函数)

- 想法: 难易程度 (常系数线性 PDE < 线性 PDE < 半线性 < 拟线性 < 完全非线性)

(1) 连续性方法或延拓方法: 线性化求解非线性 PDE (类比隐函数定理, 压缩映射原理) + 拓扑 (连通性或紧性, 从局部到整体); (2) 利用群不变性等性质, 找到非线性变换, 化为线性方程; (3) 求出特解, 分离非线性结构后, 化为小扰动问题

非线性 PDE

- 半线性 PDE $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha u + b(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) = 0$

例: KdV 方程 $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$; 反应扩散方程 $u_t = au_{xx} + bu_{yy} + u(1-u)$, 其中常数 $a, b > 0$.

- 拟线性 PDE $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) D^\alpha u + b(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) = 0$

例: $u_t - \Delta(u^m) = 0$ (常数 $m > 1$ 时称作多孔介质方程; $0 < m < 1$ 时称作 fast diffusion equation)

例: p -Laplace 方程 $u_t - \Delta_p(u) = 0$, 常数 $p > 2$, 而 $\Delta_p(u) = \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du)$

- 完全非线性 PDE: 不具有前述形式的 PDE

例: Hamilton-Jacobi 方程 $u_t + H(Du) = 0$ ($H(p)$ 是关于 p 的非线性函数)

例: eikonal 方程 $|Du|^2 = 1$

例: Monge-Ampère 方程 $\det(D^2u) = f(x)$

例: Hamilton-Jacobi-Bellman 方程 $u_t + \min_{j \in J} \{ \langle a_j(x, t), Du \rangle + g_j(x, t) \} = 0$ (J -指标集; a_j, g_j 是已知函数)

- 想法: 难易程度 (常系数线性 PDE < 线性 PDE < 半线性 < 拟线性 < 完全非线性)

(1) 连续性方法或延拓方法: 线性化求解非线性 PDE (类比隐函数定理, 压缩映射原理) + 拓扑 (连通性或紧性, 从局部到整体); (2) 利用群不变性等性质, 找到非线性变换, 化为线性方程; (3) 求出特解, 分离非线性结构后, 化为小扰动问题

非线性 PDE

- 半线性 PDE $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha u + b(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) = 0$

例: KdV 方程 $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$; 反应扩散方程 $u_t = au_{xx} + bu_{yy} + u(1-u)$, 其中常数 $a, b > 0$.

- 拟线性 PDE $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) D^\alpha u + b(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) = 0$

例: $u_t - \Delta(u^m) = 0$ (常数 $m > 1$ 时称作多孔介质方程; $0 < m < 1$ 时称作 fast diffusion equation)

例: p -Laplace 方程 $u_t - \Delta_p(u) = 0$, 常数 $p > 2$, 而 $\Delta_p(u) = \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du)$

- 完全非线性 PDE: 不具有前述形式的 PDE

例: Hamilton-Jacobi 方程 $u_t + H(Du) = 0$ ($H(p)$ 是关于 p 的非线性函数)

例: eikonal 方程 $|Du|^2 = 1$

例: Monge-Ampère 方程 $\det(D^2u) = f(x)$

例: Hamilton-Jacobi-Bellman 方程 $u_t + \min_{j \in J} \{ \langle a_j(x, t), Du \rangle + g_j(x, t) \} = 0$ (J -指标集; a_j, g_j 是已知函数)

- 想法: 难易程度 (常系数线性 PDE < 线性 PDE < 半线性 < 拟线性 < 完全非线性)

(1) 连续性方法或延拓方法: 线性化求解非线性 PDE (类比隐函数定理, 压缩映射原理) + 拓扑 (连通性或紧性, 从局部到整体); (2) 利用群不变性等性质, 找到非线性变换, 化为线性方程; (3) 求出特解, 分离非线性结构后, 化为小扰动问题

非线性 PDE

- 半线性 PDE $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha u + b(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) = 0$

例: KdV 方程 $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$; 反应扩散方程 $u_t = au_{xx} + bu_{yy} + u(1-u)$, 其中常数 $a, b > 0$.

- 拟线性 PDE $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) D^\alpha u + b(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) = 0$

例: $u_t - \Delta(u^m) = 0$ (常数 $m > 1$ 时称作多孔介质方程; $0 < m < 1$ 时称作 fast diffusion equation)

例: p -Laplace 方程 $u_t - \Delta_p(u) = 0$, 常数 $p > 2$, 而 $\Delta_p(u) = \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du)$

- 完全非线性 PDE: 不具有前述形式的 PDE

例: Hamilton-Jacobi 方程 $u_t + H(Du) = 0$ ($H(p)$ 是关于 p 的非线性函数)

例: eikonal 方程 $|Du|^2 = 1$

例: Monge-Ampère 方程 $\det(D^2u) = f(x)$

例: Hamilton-Jacobi-Bellman 方程 $u_t + \min_{j \in J} \{ \langle a_j(x, t), Du \rangle + g_j(x, t) \} = 0$ (J -指标集; a_j, g_j 是已知函数)

- 想法: 难易程度 (常系数线性 PDE < 线性 PDE < 半线性 < 拟线性 < 完全非线性)

(1) 连续性方法或延拓方法: 线性化求解非线性 PDE (类比隐函数定理, 压缩映射原理) + 拓扑 (连通性或紧性, 从局部到整体); (2) 利用群不变性等性质, 找到非线性变换, 化为线性方程; (3) 求出特解, 分离非线性结构后, 化为小扰动问题

非线性 PDE

- 半线性 PDE $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha u + b(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) = 0$

例: KdV 方程 $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$; 反应扩散方程 $u_t = au_{xx} + bu_{yy} + u(1-u)$, 其中常数 $a, b > 0$.

- 拟线性 PDE $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) D^\alpha u + b(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) = 0$

例: $u_t - \Delta(u^m) = 0$ (常数 $m > 1$ 时称作多孔介质方程; $0 < m < 1$ 时称作 fast diffusion equation)

例: p -Laplace 方程 $u_t - \Delta_p(u) = 0$, 常数 $p > 2$, 而 $\Delta_p(u) = \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du)$

- 完全非线性 PDE: 不具有前述形式的 PDE

例: Hamilton-Jacobi 方程 $u_t + H(Du) = 0$ ($H(p)$ 是关于 p 的非线性函数)

例: eikonal 方程 $|Du|^2 = 1$

例: Monge-Ampère 方程 $\det(D^2u) = f(x)$

例: Hamilton-Jacobi-Bellman 方程 $u_t + \min_{j \in J} \{ \langle a_j(x, t), Du \rangle + g_j(x, t) \} = 0$ (J -指标集; a_j, g_j 是已知函数)

- 想法: 难易程度 (常系数线性 PDE < 线性 PDE < 半线性 < 拟线性 < 完全非线性)

(1) 连续性方法或延拓方法: 线性化求解非线性 PDE (类比隐函数定理, 压缩映射原理) + 拓扑 (连通性或紧性, 从局部到整体); (2) 利用群不变性等性质, 找到非线性变换, 化为线性方程; (3) 求出特解, 分离非线性结构后, 化为小扰动问题

非线性 PDE

- 半线性 PDE $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha u + b(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) = 0$

例: KdV 方程 $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$; 反应扩散方程 $u_t = au_{xx} + bu_{yy} + u(1 - u)$, 其中常数 $a, b > 0$.

- 拟线性 PDE $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) D^\alpha u + b(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) = 0$

例: $u_t - \Delta(u^m) = 0$ (常数 $m > 1$ 时称作多孔介质方程; $0 < m < 1$ 时称作 fast diffusion equation)

例: p -Laplace 方程 $u_t - \Delta_p(u) = 0$, 常数 $p > 2$, 而 $\Delta_p(u) = \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du)$

- 完全非线性 PDE: 不具有前述形式的 PDE

例: Hamilton-Jacobi 方程 $u_t + H(Du) = 0$ ($H(p)$ 是关于 p 的非线性函数)

例: eikonal 方程 $|Du|^2 = 1$

例: Monge-Ampère 方程 $\det(D^2u) = f(x)$

例: Hamilton-Jacobi-Bellman 方程 $u_t + \min_{j \in J} \{ \langle a_j(x, t), Du \rangle + g_j(x, t) \} = 0$ (J -指标集; a_j, g_j 是已知函数)

- 想法: 难易程度 (常系数线性 PDE < 线性 PDE < 半线性 < 拟线性 < 完全非线性)

(1) 连续性方法或延拓方法: 线性化求解非线性 PDE (类比隐函数定理, 压缩映射原理) + 拓扑 (连通性或紧性, 从局部到整体); (2) 利用群不变性等性质, 找到非线性变换, 化为线性方程; (3) 求出特解, 分离非线性结构后, 化为小扰动问题

非线性 PDE

- 半线性 PDE $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha u + b(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) = 0$

例: KdV 方程 $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$; 反应扩散方程 $u_t = au_{xx} + bu_{yy} + u(1 - u)$, 其中常数 $a, b > 0$.

- 拟线性 PDE $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) D^\alpha u + b(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) = 0$

例: $u_t - \Delta(u^m) = 0$ (常数 $m > 1$ 时称作多孔介质方程; $0 < m < 1$ 时称作 fast diffusion equation)

例: p -Laplace 方程 $u_t - \Delta_p(u) = 0$, 常数 $p > 2$, 而 $\Delta_p(u) = \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du)$

- 完全非线性 PDE: 不具有前述形式的 PDE

例: Hamilton-Jacobi 方程 $u_t + H(Du) = 0$ ($H(p)$ 是关于 p 的非线性函数)

例: eikonal 方程 $|Du|^2 = 1$

例: Monge-Ampère 方程 $\det(D^2u) = f(x)$

例: Hamilton-Jacobi-Bellman 方程 $u_t + \min_{j \in J} \{ \langle a_j(x, t), Du \rangle + g_j(x, t) \} = 0$ (J -指标集; a_j, g_j 是已知函数)

- 想法: 难易程度 (常系数线性 PDE < 线性 PDE < 半线性 < 拟线性 < 完全非线性)

(1) 连续性方法或延拓方法: 线性化求解非线性 PDE (类比隐函数定理, 压缩映射原理) + 拓扑 (连通性或紧性, 从局部到整体); (2) 利用群不变性等性质, 找到非线性变换, 化为线性方程; (3) 求出特解, 分离非线性结构后, 化为小扰动问题

非线性 PDE

- 半线性 PDE $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha u + b(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) = 0$

例: KdV 方程 $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$; 反应扩散方程 $u_t = au_{xx} + bu_{yy} + u(1-u)$, 其中常数 $a, b > 0$.

- 拟线性 PDE $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) D^\alpha u + b(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) = 0$

例: $u_t - \Delta(u^m) = 0$ (常数 $m > 1$ 时称作多孔介质方程; $0 < m < 1$ 时称作 fast diffusion equation)

例: p -Laplace 方程 $u_t - \Delta_p(u) = 0$, 常数 $p > 2$, 而 $\Delta_p(u) = \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du)$

- 完全非线性 PDE: 不具有前述形式的 PDE

例: Hamilton-Jacobi 方程 $u_t + H(Du) = 0$ ($H(p)$ 是关于 p 的非线性函数)

例: eikonal 方程 $|Du|^2 = 1$

例: Monge-Ampère 方程 $\det(D^2u) = f(x)$

例: Hamilton-Jacobi-Bellman 方程 $u_t + \min_{j \in J} \{ \langle a_j(x, t), Du \rangle + g_j(x, t) \} = 0$ (J -指标集; a_j, g_j 是已知函数)

- 想法: 难易程度 (常系数线性 PDE < 线性 PDE < 半线性 < 拟线性 < 完全非线性)

(1) 连续性方法或延拓方法: 线性化求解非线性 PDE (类比隐函数定理, 压缩映射原理) + 拓扑 (连通性或紧性, 从局部到整体); (2) 利用群不变性等性质, 找到非线性变换, 化为线性方程; (3) 求出特解, 分离非线性结构后, 化为小扰动问题

非线性 PDE

- 半线性 PDE $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha u + b(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) = 0$

例: KdV 方程 $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$; 反应扩散方程 $u_t = au_{xx} + bu_{yy} + u(1-u)$, 其中常数 $a, b > 0$.

- 拟线性 PDE $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) D^\alpha u + b(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) = 0$

例: $u_t - \Delta(u^m) = 0$ (常数 $m > 1$ 时称作多孔介质方程; $0 < m < 1$ 时称作 fast diffusion equation)

例: p -Laplace 方程 $u_t - \Delta_p(u) = 0$, 常数 $p > 2$, 而 $\Delta_p(u) = \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du)$

- 完全非线性 PDE: 不具有前述形式的 PDE

例: Hamilton-Jacobi 方程 $u_t + H(Du) = 0$ ($H(p)$ 是关于 p 的非线性函数)

例: eikonal 方程 $|Du|^2 = 1$

例: Monge-Ampère 方程 $\det(D^2u) = f(x)$

例: Hamilton-Jacobi-Bellman 方程 $u_t + \min_{j \in J} \{ \langle a_j(x, t), Du \rangle + g_j(x, t) \} = 0$ (J -指标集; a_j, g_j 是已知函数)

- 想法: 难易程度 (常系数线性 PDE < 线性 PDE < 半线性 < 拟线性 < 完全非线性)

(1) 连续性方法或延拓方法: 线性化求解非线性 PDE (类比隐函数定理, 压缩映射原理) + 拓扑 (连通性或紧性, 从局部到整体); (2) 利用群不变性等性质, 找到非线性变换, 化为线性方程; (3) 求出特解, 分离非线性结构后, 化为小扰动问题

非线性 PDE

- 半线性 PDE $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha u + b(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) = 0$

例: KdV 方程 $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$; 反应扩散方程 $u_t = au_{xx} + bu_{yy} + u(1 - u)$, 其中常数 $a, b > 0$.

- 拟线性 PDE $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) D^\alpha u + b(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) = 0$

例: $u_t - \Delta(u^m) = 0$ (常数 $m > 1$ 时称作多孔介质方程; $0 < m < 1$ 时称作 fast diffusion equation)

例: p -Laplace 方程 $u_t - \Delta_p(u) = 0$, 常数 $p > 2$, 而 $\Delta_p(u) = \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du)$

- 完全非线性 PDE: 不具有前述形式的 PDE

例: Hamilton-Jacobi 方程 $u_t + H(Du) = 0$ ($H(p)$ 是关于 p 的非线性函数)

例: eikonal 方程 $|Du|^2 = 1$

例: Monge-Ampère 方程 $\det(D^2u) = f(x)$

例: Hamilton-Jacobi-Bellman 方程 $u_t + \min_{j \in J} \{ \langle a_j(x, t), Du \rangle + g_j(x, t) \} = 0$ (J -指标集; a_j, g_j 是已知函数)

- 想法: 难易程度 (常系数线性 PDE < 线性 PDE < 半线性 < 拟线性 < 完全非线性)

(1) 连续性方法或延拓方法: 线性化求解非线性 PDE (类比隐函数定理, 压缩映射原理) + 拓扑 (连通性或紧性, 从局部到整体); (2) 利用群不变性等性质, 找到非线性变换, 化为线性方程; (3) 求出特解, 分离非线性结构后, 化为小扰动问题

非线性 PDE

- 半线性 PDE $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha u + b(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) = 0$

例: KdV 方程 $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$; 反应扩散方程 $u_t = au_{xx} + bu_{yy} + u(1 - u)$, 其中常数 $a, b > 0$.

- 拟线性 PDE $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) D^\alpha u + b(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) = 0$

例: $u_t - \Delta(u^m) = 0$ (常数 $m > 1$ 时称作多孔介质方程; $0 < m < 1$ 时称作 fast diffusion equation)

例: p -Laplace 方程 $u_t - \Delta_p(u) = 0$, 常数 $p > 2$, 而 $\Delta_p(u) = \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du)$

- 完全非线性 PDE: 不具有前述形式的 PDE

例: Hamilton-Jacobi 方程 $u_t + H(Du) = 0$ ($H(p)$ 是关于 p 的非线性函数)

例: eikonal 方程 $|Du|^2 = 1$

例: Monge-Ampère 方程 $\det(D^2u) = f(x)$

例: Hamilton-Jacobi-Bellman 方程 $u_t + \min_{j \in J} \{ \langle a_j(x, t), Du \rangle + g_j(x, t) \} = 0$ (J -指标集; a_j, g_j 是已知函数)

- 想法: 难易程度 (常系数线性 PDE < 线性 PDE < 半线性 < 拟线性 < 完全非线性)

(1) 连续性方法或延拓方法: 线性化求解非线性 PDE (类比隐函数定理, 压缩映射原理) + 拓扑 (连通性或紧性, 从局部到整体); (2) 利用群不变性等性质, 找到非线性变换, 化为线性方程; (3) 求出特解, 分离非线性结构后, 化为小扰动问题

定解条件、定解问题、适定性

偏微分方程的解空间一般来说是无限维的. (事物的统一性 / 多样性 — 同一个 PDE, 它可以存在丰富多彩各不相同的解, 代表看上去完全不同的自然现象)

♣ 定解问题三要素: 方程, 区域, 边界条件

- 方程 (已介绍), 区域
 - 自由边界问题 (区域未知, 需要和定义在其上的解同时求出) 例: 水波 (水和气体交界面); 激波; Stefan 问题 (冰 / 水混合物中水所占区域的求解)
 - 固定边界问题 (区域已知): 边界光滑 / 不光滑; 区域紧致 / 非紧
- 边界条件: 区域边界各点定解条件的个数, 给定条件的方式
 - 按物理意义分类: 初值条件 / 边值条件; 内部衔接条件 (如果方程或解有不连续性时, 如不同材料的交界面)
 - 常见的三种边值条件: Dirichlet 条件, Neumann 条件, Robin 条件

♣ 定解问题的适定性: 解的存在性, 唯一性, 稳定性

利用方程的性质或其物理 (几何) 背景等, 找到恰当的定解条件, 确定合理的拓扑空间 X , 使得 (1) X 上的映射 $P(u) = F(x, u, Du, \dots, D^m u)$ 的像集包含 0 点 (存在性); (2) 核 $\text{Ker}(P) = \{u : P(u) = 0\}$ 是单点集, 或 P 是单射 (唯一性); (3) P 有连续的逆映射 $P(X) \rightarrow X$ (稳定性).

定解条件、定解问题、适定性

偏微分方程的解空间一般来说是无限维的. (事物的统一性 / 多样性 — 同一个 PDE, 它可以存在丰富多彩各不相同的解, 代表看上去完全不同的自然现象)

♣ 定解问题三要素: 方程, 区域, 边界条件

- 方程 (已介绍), 区域
 - 自由边界问题 (区域未知, 需要和定义在其上的解同时求出) 例: 水波 (水和气体交界面); 激波; Stefan 问题 (冰 / 水混合物中水所占区域的求解)
 - 固定边界问题 (区域已知): 边界光滑 / 不光滑; 区域紧致 / 非紧
- 边界条件: 区域边界各点定解条件的个数, 给定条件的方式
 - 按物理意义分类: 初值条件 / 边值条件; 内部衔接条件 (如果方程或解有不连续性时, 如不同材料的交界面)
 - 常见的三种边值条件: Dirichlet 条件, Neumann 条件, Robin 条件

♣ 定解问题的适定性: 解的存在性, 唯一性, 稳定性

利用方程的性质或其物理 (几何) 背景等, 找到恰当的定解条件, 确定合理的拓扑空间 X , 使得 (1) X 上的映射 $P(u) = F(x, u, Du, \dots, D^m u)$ 的像集包含 0 点 (存在性); (2) 核 $\text{Ker}(P) = \{u : P(u) = 0\}$ 是单点集, 或 P 是单射 (唯一性); (3) P 有连续的逆映射 $P(X) \rightarrow X$ (稳定性).

定解条件、定解问题、适定性

偏微分方程的解空间一般来说是无限维的. (事物的统一性 / 多样性 — 同一个 PDE, 它可以存在丰富多彩各不相同的解, 代表看上去完全不同的自然现象)

♣ 定解问题三要素: 方程, 区域, 边界条件

● 方程 (已介绍), 区域

- 自由边界问题 (区域未知, 需要和定义在其上的解同时求出) 例: 水波 (水和气体交界面); 激波; Stefan 问题 (冰 / 水混合物中水所占区域的求解)

- 固定边界问题 (区域已知): 边界光滑 / 不光滑; 区域紧致 / 非紧

● 边界条件: 区域边界各点定解条件的个数, 给定条件的方式

- 按物理意义分类: 初值条件 / 边值条件; 内部衔接条件 (如果方程或解有不连续性时, 如不同材料的交界面)
- 常见的三种边值条件: Dirichlet 条件, Neumann 条件, Robin 条件

♣ 定解问题的适定性: 解的存在性, 唯一性, 稳定性

利用方程的性质或其物理 (几何) 背景等, 找到恰当的定解条件, 确定合理的拓扑空间 X , 使得 (1) X 上的映射 $P(u) = F(x, u, Du, \dots, D^m u)$ 的像集包含 0 点 (存在性); (2) 核 $\text{Ker}(P) = \{u : P(u) = 0\}$ 是单点集, 或 P 是单射 (唯一性); (3) P 有连续的逆映射 $P(X) \rightarrow X$ (稳定性).

定解条件、定解问题、适定性

偏微分方程的解空间一般来说是无限维的. (事物的统一性 / 多样性 — 同一个 PDE, 它可以存在丰富多彩各不相同的解, 代表看上去完全不同的自然现象)

♣ 定解问题三要素: 方程, 区域, 边界条件

- 方程 (已介绍), 区域
 - 自由边界问题 (区域未知, 需要和定义在其上的解同时求出) 例: 水波 (水和气体交界面); 激波; Stefan 问题 (冰 / 水混合物中水所占区域的求解)
 - 固定边界问题 (区域已知): 边界光滑 / 不光滑; 区域紧致 / 非紧
- 边界条件: 区域边界各点定解条件的个数, 给定条件的方式
 - 按物理意义分类: 初值条件 / 边值条件; 内部衔接条件 (如果方程或解有不连续性时, 如不同材料的交界面)
 - 常见的三种边值条件: Dirichlet 条件, Neumann 条件, Robin 条件

♣ 定解问题的适定性: 解的存在性, 唯一性, 稳定性

利用方程的性质或其物理 (几何) 背景等, 找到恰当的定解条件, 确定合理的拓扑空间 X , 使得 (1) X 上的映射 $P(u) = F(x, u, Du, \dots, D^m u)$ 的像集包含 0 点 (存在性); (2) 核 $\text{Ker}(P) = \{u : P(u) = 0\}$ 是单点集, 或 P 是单射 (唯一性); (3) P 有连续的逆映射 $P(X) \rightarrow X$ (稳定性).

定解条件、定解问题、适定性

偏微分方程的解空间一般来说是无限维的. (事物的统一性 / 多样性 — 同一个 PDE, 它可以存在丰富多彩各不相同的解, 代表看上去完全不同的自然现象)

♣ 定解问题三要素: 方程, 区域, 边界条件

- 方程 (已介绍), 区域
 - 自由边界问题 (区域未知, 需要和定义在其上的解同时求出) 例: 水波 (水和气体交界面); 激波; Stefan 问题 (冰 / 水混合物中水所占区域的求解)
 - 固定边界问题 (区域已知): 边界光滑 / 不光滑; 区域紧致 / 非紧
- 边界条件: 区域边界各点定解条件的个数, 给定条件的方式
 - 按物理意义分类: 初值条件 / 边值条件; 内部衔接条件 (如果方程或解有不连续性时, 如不同材料的交界面)
 - 常见的三种边值条件: Dirichlet 条件, Neumann 条件, Robin 条件

♣ 定解问题的适定性: 解的存在性, 唯一性, 稳定性

利用方程的性质或其物理 (几何) 背景等, 找到恰当的定解条件, 确定合理的拓扑空间 X , 使得 (1) X 上的映射 $P(u) = F(x, u, Du, \dots, D^m u)$ 的像集包含 0 点 (存在性); (2) 核 $\text{Ker}(P) = \{u : P(u) = 0\}$ 是单点集, 或 P 是单射 (唯一性); (3) P 有连续的逆映射 $P(X) \rightarrow X$ (稳定性).

定解条件、定解问题、适定性

偏微分方程的解空间一般来说是无限维的. (事物的统一性 / 多样性 — 同一个 PDE, 它可以存在丰富多彩各不相同的解, 代表看上去完全不同的自然现象)

♣ 定解问题三要素: 方程, 区域, 边界条件

- 方程 (已介绍), 区域
 - 自由边界问题 (区域未知, 需要和定义在其上的解同时求出) 例: 水波 (水和气体交界面); 激波; Stefan 问题 (冰 / 水混合物中水所占区域的求解)
 - 固定边界问题 (区域已知): 边界光滑 / 不光滑; 区域紧致 / 非紧
- 边界条件: 区域边界各点定解条件的个数, 给定条件的方式
 - 按物理意义分类: 初值条件 / 边值条件; 内部衔接条件 (如果方程或解有不连续性时, 如不同材料的交界面)
 - 常见的三种边值条件: Dirichlet 条件, Neumann 条件, Robin 条件

♣ 定解问题的适定性: 解的存在性, 唯一性, 稳定性

利用方程的性质或其物理 (几何) 背景等, 找到恰当的定解条件, 确定合理的拓扑空间 X , 使得 (1) X 上的映射 $P(u) = F(x, u, Du, \dots, D^m u)$ 的像集包含 0 点 (存在性); (2) 核 $\text{Ker}(P) = \{u : P(u) = 0\}$ 是单点集, 或 P 是单射 (唯一性); (3) P 有连续的逆映射 $P(X) \rightarrow X$ (稳定性).

定解条件、定解问题、适定性

偏微分方程的解空间一般来说是无限维的. (事物的统一性 / 多样性 — 同一个 PDE, 它可以存在丰富多彩各不相同的解, 代表看上去完全不同的自然现象)

♣ 定解问题三要素: 方程, 区域, 边界条件

- 方程 (已介绍), 区域
 - 自由边界问题 (区域未知, 需要和定义在其上的解同时求出) 例: 水波 (水和气体交界面); 激波; Stefan 问题 (冰 / 水混合物中水所占区域的求解)
 - 固定边界问题 (区域已知): 边界光滑 / 不光滑; 区域紧致 / 非紧
- 边界条件: 区域边界各点定解条件的个数, 给定条件的方式
 - 按物理意义分类: 初值条件 / 边值条件; 内部衔接条件 (如果方程或解有不连续性时, 如不同材料的交界面)
 - 常见的三种边值条件: Dirichlet 条件, Neumann 条件, Robin 条件

♣ 定解问题的适定性: 解的存在性, 唯一性, 稳定性

利用方程的性质或其物理 (几何) 背景等, 找到恰当的定解条件, 确定合理的拓扑空间 X , 使得 (1) X 上的映射 $P(u) = F(x, u, Du, \dots, D^m u)$ 的像集包含 0 点 (存在性); (2) 核 $\text{Ker}(P) = \{u : P(u) = 0\}$ 是单点集, 或 P 是单射 (唯一性); (3) P 有连续的逆映射 $P(X) \rightarrow X$ (稳定性).

定解条件、定解问题、适定性

偏微分方程的解空间一般来说是无限维的. (事物的统一性 / 多样性 — 同一个 PDE, 它可以存在丰富多彩各不相同的解, 代表看上去完全不同的自然现象)

♣ 定解问题三要素: 方程, 区域, 边界条件

- 方程 (已介绍), 区域
 - 自由边界问题 (区域未知, 需要和定义在其上的解同时求出) 例: 水波 (水和气体交界面); 激波; Stefan 问题 (冰 / 水混合物中水所占区域的求解)
 - 固定边界问题 (区域已知): 边界光滑 / 不光滑; 区域紧致 / 非紧
- 边界条件: 区域边界各点定解条件的个数, 给定条件的方式
 - 按物理意义分类: 初值条件 / 边值条件; 内部衔接条件 (如果方程或解有不连续性时, 如不同材料的交界面)
 - 常见的三种边值条件: Dirichlet 条件, Neumann 条件, Robin 条件

♣ 定解问题的适定性: 解的存在性, 唯一性, 稳定性

利用方程的性质或其物理 (几何) 背景等, 找到恰当的定解条件, 确定合理的拓扑空间 X , 使得 (1) X 上的映射 $P(u) = F(x, u, Du, \dots, D^m u)$ 的像集包含 0 点 (存在性); (2) 核 $\text{Ker}(P) = \{u : P(u) = 0\}$ 是单点集, 或 P 是单射 (唯一性); (3) P 有连续的逆映射 $P(X) \rightarrow X$ (稳定性).

定解条件、定解问题、适定性

偏微分方程的解空间一般来说是无限维的. (事物的统一性 / 多样性 — 同一个 PDE, 它可以存在丰富多彩各不相同的解, 代表看上去完全不同的自然现象)

♣ 定解问题三要素: 方程, 区域, 边界条件

- 方程 (已介绍), 区域
 - 自由边界问题 (区域未知, 需要和定义在其上的解同时求出) 例: 水波 (水和气体交界面); 激波; Stefan 问题 (冰 / 水混合物中水所占区域的求解)
 - 固定边界问题 (区域已知): 边界光滑 / 不光滑; 区域紧致 / 非紧
- 边界条件: 区域边界各点定解条件的个数, 给定条件的方式
 - 按物理意义分类: 初值条件 / 边值条件; 内部衔接条件 (如果方程或解有不连续性时, 如不同材料的交界面)
 - 常见的三种边值条件: Dirichlet 条件, Neumann 条件, Robin 条件

♣ 定解问题的适定性: 解的存在性, 唯一性, 稳定性

利用方程的性质或其物理 (几何) 背景等, 找到恰当的定解条件, 确定合理的拓扑空间 X , 使得 (1) X 上的映射 $P(u) = F(x, u, Du, \dots, D^m u)$ 的像集包含 0 点 (存在性); (2) 核 $\text{Ker}(P) = \{u : P(u) = 0\}$ 是单点集, 或 P 是单射 (唯一性); (3) P 有连续的逆映射 $P(X) \rightarrow X$ (稳定性).

定解条件、定解问题、适定性

偏微分方程的解空间一般来说是无限维的. (事物的统一性 / 多样性 — 同一个 PDE, 它可以存在丰富多彩各不相同的解, 代表看上去完全不同的自然现象)

♣ 定解问题三要素: 方程, 区域, 边界条件

- 方程 (已介绍), 区域
 - 自由边界问题 (区域未知, 需要和定义在其上的解同时求出) 例: 水波 (水和气体交界面); 激波; Stefan 问题 (冰 / 水混合物中水所占区域的求解)
 - 固定边界问题 (区域已知): 边界光滑 / 不光滑; 区域紧致 / 非紧
- 边界条件: 区域边界各点定解条件的个数, 给定条件的方式
 - 按物理意义分类: 初值条件 / 边值条件; 内部衔接条件 (如果方程或解有不连续性时, 如不同材料的交界面)
 - 常见的三种边值条件: Dirichlet 条件, Neumann 条件, Robin 条件

♣ 定解问题的适定性: 解的存在性, 唯一性, 稳定性

利用方程的性质或其物理 (几何) 背景等, 找到恰当的定解条件, 确定合理的拓扑空间 X , 使得 (1) X 上的映射 $P(u) = F(x, u, Du, \dots, D^m u)$ 的像集包含 0 点 (存在性); (2) 核 $\text{Ker}(P) = \{u : P(u) = 0\}$ 是单点集, 或 P 是单射 (唯一性); (3) P 有连续的逆映射 $P(X) \rightarrow X$ (稳定性).

定解条件、定解问题、适定性

偏微分方程的解空间一般来说是无限维的. (事物的统一性 / 多样性 — 同一个 PDE, 它可以存在丰富多彩各不相同的解, 代表看上去完全不同的自然现象)

♣ 定解问题三要素: 方程, 区域, 边界条件

- 方程 (已介绍), 区域
 - 自由边界问题 (区域未知, 需要和定义在其上的解同时求出) 例: 水波 (水和气体交界面); 激波; Stefan 问题 (冰 / 水混合物中水所占区域的求解)
 - 固定边界问题 (区域已知): 边界光滑 / 不光滑; 区域紧致 / 非紧
- 边界条件: 区域边界各点定解条件的个数, 给定条件的方式
 - 按物理意义分类: 初值条件 / 边值条件; 内部衔接条件 (如果方程或解有不连续性时, 如不同材料的交界面)
 - 常见的三种边值条件: Dirichlet 条件, Neumann 条件, Robin 条件

♣ 定解问题的适定性: 解的存在性, 唯一性, 稳定性

利用方程的性质或其物理 (几何) 背景等, 找到恰当的定解条件, 确定合理的拓扑空间 X , 使得 (1) X 上的映射 $P(u) = F(x, u, Du, \dots, D^m u)$ 的像集包含 0 点 (存在性); (2) 核 $\text{Ker}(P) = \{u : P(u) = 0\}$ 是单点集, 或 P 是单射 (唯一性); (3) P 有连续的逆映射 $P(X) \rightarrow X$ (稳定性).

定解条件、定解问题、适定性

偏微分方程的解空间一般来说是无限维的. (事物的统一性 / 多样性 — 同一个 PDE, 它可以存在丰富多彩各不相同的解, 代表看上去完全不同的自然现象)

♣ 定解问题三要素: 方程, 区域, 边界条件

- 方程 (已介绍), 区域
 - 自由边界问题 (区域未知, 需要和定义在其上的解同时求出) 例: 水波 (水和气体交界面); 激波; Stefan 问题 (冰 / 水混合物中水所占区域的求解)
 - 固定边界问题 (区域已知): 边界光滑 / 不光滑; 区域紧致 / 非紧
- 边界条件: 区域边界各点定解条件的个数, 给定条件的方式
 - 按物理意义分类: 初值条件 / 边值条件; 内部衔接条件 (如果方程或解有不连续性时, 如不同材料的交界面)
 - 常见的三种边值条件: Dirichlet 条件, Neumann 条件, Robin 条件

♣ 定解问题的适定性: 解的存在性, 唯一性, 稳定性

利用方程的性质或其物理 (几何) 背景等, 找到恰当的定解条件, 确定合理的拓扑空间 X , 使得 (1) X 上的映射 $P(u) = F(x, u, Du, \dots, D^m u)$ 的像集包含 0 点 (存在性); (2) 核 $\text{Ker}(P) = \{u : P(u) = 0\}$ 是单点集, 或 P 是单射 (唯一性); (3) P 有连续的逆映射 $P(X) \rightarrow X$ (稳定性).

定解条件、定解问题、适定性

偏微分方程的解空间一般来说是无限维的. (事物的统一性 / 多样性 — 同一个 PDE, 它可以存在丰富多彩各不相同的解, 代表看上去完全不同的自然现象)

♣ 定解问题三要素: 方程, 区域, 边界条件

- 方程 (已介绍), 区域
 - 自由边界问题 (区域未知, 需要和定义在其上的解同时求出) 例: 水波 (水和气体交界面); 激波; Stefan 问题 (冰 / 水混合物中水所占区域的求解)
 - 固定边界问题 (区域已知): 边界光滑 / 不光滑; 区域紧致 / 非紧
- 边界条件: 区域边界各点定解条件的个数, 给定条件的方式
 - 按物理意义分类: 初值条件 / 边值条件; 内部衔接条件 (如果方程或解有不连续性时, 如不同材料的交界面)
 - 常见的三种边值条件: Dirichlet 条件, Neumann 条件, Robin 条件

♣ 定解问题的适定性: 解的存在性, 唯一性, 稳定性

利用方程的性质或其物理 (几何) 背景等, 找到恰当的定解条件, 确定合理的拓扑空间 X , 使得 (1) X 上的映射 $P(u) = F(x, u, Du, \dots, D^m u)$ 的像集包含 0 点 (存在性); (2) 核 $\text{Ker}(P) = \{u : P(u) = 0\}$ 是单点集, 或 P 是单射 (唯一性); (3) P 有连续的逆映射 $P(X) \rightarrow X$ (稳定性).

定解问题的例：两端固定的由两种材料拼接构成的弹性杆的纵振动

- 区域: $0 < x < l, t > 0$; 未知函数 $u(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t), & \text{若 } 0 < x < d, t > 0, \\ u_2(x, t), & \text{若 } d < x < l, t > 0. \end{cases}$
- 方程 ($a_1 \neq a_2$): $\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, & \text{若 } 0 < x < d, t > 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, & \text{若 } d < x < l, t > 0. \end{cases}$
- 初值条件: $u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l.$
- 边界条件: $u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0.$
- 内部衔接条件: $\begin{cases} u_1|_{x=d} = u_2|_{x=d}, & (\text{位移连续}), \\ E_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}|_{x=d} = E_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}|_{x=d}, & (\text{纵向应力连续}). \end{cases}$ 这里 E_1, E_2 分别是两种材料的杨氏模量. (杨氏模量 = 张应力/张应变, 张应力 = 张力/力作用的截面面积; 张应变 = 柱体 (杆) 在张力下的伸长量/柱体 (杆) 的原长度)

定解问题的例: 两端固定的由两种材料拼接构成的弹性杆的纵振动

- 区域: $0 < x < l, t > 0$; 未知函数 $u(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t), & \text{若 } 0 < x < d, t > 0, \\ u_2(x, t), & \text{若 } d < x < l, t > 0. \end{cases}$
- 方程 ($a_1 \neq a_2$): $\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, & \text{若 } 0 < x < d, t > 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, & \text{若 } d < x < l, t > 0. \end{cases}$
- 初值条件: $u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l.$
- 边界条件: $u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0.$
- 内部衔接条件: $\begin{cases} u_1|_{x=d} = u_2|_{x=d}, & (\text{位移连续}), \\ E_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}|_{x=d} = E_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}|_{x=d}, & (\text{纵向应力连续}). \end{cases}$ 这里 E_1, E_2 分别是两种材料的杨氏模量. (杨氏模量 = 张应力/张应变, 张应力 = 张力/力作用的截面面积; 张应变 = 柱体 (杆) 在张力下的伸长量/柱体 (杆) 的原长度)

定解问题的例： 两端固定的由两种材料拼接构成的弹性杆的纵振动

- 区域: $0 < x < l, t > 0$; 未知函数 $u(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t), & \text{若 } 0 < x < d, \quad t > 0, \\ u_2(x, t), & \text{若 } d < x < l, \quad t > 0. \end{cases}$
- 方程 ($a_1 \neq a_2$): $\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, & \text{若 } 0 < x < d, \quad t > 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, & \text{若 } d < x < l, \quad t > 0. \end{cases}$
- 初值条件: $u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l.$
- 边界条件: $u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0.$
- 内部衔接条件: $\begin{cases} u_1|_{x=d} = u_2|_{x=d}, & (\text{位移连续}), \\ E_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}|_{x=d} = E_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}|_{x=d}, & (\text{纵向应力连续}). \end{cases}$ 这里 E_1, E_2 分别是两种材料的杨氏模量. (杨氏模量 = 张应力/张应变, 张应力 = 张力/力作用的截面面积; 张应变 = 柱体 (杆) 在张力下的伸长量/柱体 (杆) 的原长度)

定解问题的例：两端固定的由两种材料拼接构成的弹性杆的纵振动

- 区域: $0 < x < l, t > 0$; 未知函数 $u(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t), & \text{若 } 0 < x < d, t > 0, \\ u_2(x, t), & \text{若 } d < x < l, t > 0. \end{cases}$
- 方程 ($a_1 \neq a_2$): $\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, & \text{若 } 0 < x < d, t > 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, & \text{若 } d < x < l, t > 0. \end{cases}$
- 初值条件: $u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l.$
- 边界条件: $u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0.$
- 内部衔接条件: $\begin{cases} u_1|_{x=d} = u_2|_{x=d}, & (\text{位移连续}), \\ E_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}|_{x=d} = E_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}|_{x=d}, & (\text{纵向应力连续}). \end{cases}$ 这里 E_1, E_2 分别是两种材料的杨氏模量. (杨氏模量 = 张应力/张应变, 张应力 = 张力/力作用的截面面积; 张应变 = 柱体(杆)在张力下的伸长量/柱体(杆)的原长度)

定解问题的例： 两端固定的由两种材料拼接构成的弹性杆的纵振动

- 区域: $0 < x < l, t > 0$; 未知函数 $u(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t), & \text{若 } 0 < x < d, t > 0, \\ u_2(x, t), & \text{若 } d < x < l, t > 0. \end{cases}$
- 方程 ($a_1 \neq a_2$): $\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, & \text{若 } 0 < x < d, t > 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, & \text{若 } d < x < l, t > 0. \end{cases}$
- 初值条件: $u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l.$
- 边界条件: $u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0.$
- 内部衔接条件: $\begin{cases} u_1|_{x=d} = u_2|_{x=d}, & (\text{位移连续}), \\ E_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}|_{x=d} = E_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}|_{x=d}, & (\text{纵向应力连续}). \end{cases}$ 这里 E_1, E_2 分别是两种材料的杨氏模量. (杨氏模量 = 张应力/张应变, 张应力 = 张力/力作用的截面面积; 张应变 = 柱体 (杆) 在张力下的伸长量/柱体 (杆) 的原长度)

定解问题的例: 两端固定的由两种材料拼接构成的弹性杆的纵振动

- 区域: $0 < x < l, t > 0$; 未知函数 $u(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t), & \text{若 } 0 < x < d, t > 0, \\ u_2(x, t), & \text{若 } d < x < l, t > 0. \end{cases}$
- 方程 ($a_1 \neq a_2$): $\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, & \text{若 } 0 < x < d, t > 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, & \text{若 } d < x < l, t > 0. \end{cases}$
- 初值条件: $u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l.$
- 边界条件: $u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0.$
- 内部衔接条件: $\begin{cases} u_1|_{x=d} = u_2|_{x=d}, & (\text{位移连续}), \\ E_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}|_{x=d} = E_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}|_{x=d}, & (\text{纵向应力连续}). \end{cases}$ 这里 E_1, E_2 分别是两种材料的杨氏模量. (杨氏模量 = 张应力/张应变, 张应力 = 张力/力作用的截面面积; 张应变 = 柱体 (杆) 在张力下的伸长量/柱体 (杆) 的原长度)

例 1. Laplace 方程的初边值问题: 一个不适定的定解问题 (Hadamard, 1917 年), 其中 $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{若 } 0 < x < \pi, y > 0, \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi} = 0, & \text{若 } y > 0, \\ u|_{y=0} = 0, u_y|_{y=0} = \frac{1}{n} \sin nx, & \text{若 } x \in (0, \pi). \end{cases}$$

第一步: 验证 $u_n(x, y) \doteq \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny)$ 是上述问题的解, 这里 $\sinh x \doteq \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 是双曲正弦函数.

第二步: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 上述问题的极限问题是 $\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{若 } 0 < x < \pi, y > 0, \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi} = 0, & \text{若 } y > 0, \\ u|_{y=0} = 0, u_y|_{y=0} = 0, & \text{若 } x \in (0, \pi). \end{cases}$ 证明它只有平凡解

$u \equiv 0$. (请在后续学习中一直思考如何解决此问题!)

第三步: 说明对所有的 $x \in (0, \pi)$, 对任意固定的 $y > 0, \{u_n(x, y)\}_{n=1}^{\infty}$ 是无界的. (通过此处体会: 为什么对函数的研究引导出对复杂点集的研究? 记 $\langle r \rangle$ 是实数 r 的小数部分, 对 $x = r\pi, r \in (0, 1)$, 有 $|\sin(nx)| = |\sin(\langle nr \rangle \pi)|$; 当 r 是无理数时, 根据 Weyl 等分布定理, $\langle nr \rangle$ 在 $(0, 1)$ 中稠密; 参见 E.M. Stein, R. Shakarchi: Fourier Analysis, An Introduction, Princeton Lectures in Analysis 1, p.105). 参考: Hadamard, Jacques: Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. Yale University Press, 1923. [§18, p.33]

例 1. Laplace 方程的初边值问题: 一个不适定的定解问题 (Hadamard, 1917 年), 其中 $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{若 } 0 < x < \pi, y > 0, \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi} = 0, & \text{若 } y > 0, \\ u|_{y=0} = 0, u_y|_{y=0} = \frac{1}{n} \sin nx, & \text{若 } x \in (0, \pi). \end{cases}$$

第一步: 验证 $u_n(x, y) \doteq \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny)$ 是上述问题的解, 这里 $\sinh x \doteq \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 是双曲正弦函数.

第二步: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 上述问题的极限问题是 $\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{若 } 0 < x < \pi, y > 0, \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi} = 0, & \text{若 } y > 0, \\ u|_{y=0} = 0, u_y|_{y=0} = 0, & \text{若 } x \in (0, \pi). \end{cases}$ 证明它只有平凡解

$u \equiv 0$. (请在后续学习中一直思考如何解决此问题!)

第三步: 说明对所有的 $x \in (0, \pi)$, 对任意固定的 $y > 0, \{u_n(x, y)\}_{n=1}^{\infty}$ 是无界的. (通过此处体会: 为什么对函数的研究引导出对复杂点集的研究? 记 $\langle r \rangle$ 是实数 r 的小数部分, 对 $x = r\pi, r \in (0, 1)$, 有 $|\sin(nx)| = |\sin(\langle nr \rangle \pi)|$; 当 r 是无理数时, 根据 Weyl 等分布定理, $\langle nr \rangle$ 在 $(0, 1)$ 中稠密; 参见 E.M. Stein, R. Shakarchi: Fourier Analysis, An Introduction, Princeton Lectures in Analysis 1, p.105). 参考: Hadamard, Jacques: Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. Yale University Press, 1923. [§18, p.33]

例 1. Laplace 方程的初边值问题: 一个不适定的定解问题 (Hadamard, 1917 年), 其中 $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{若 } 0 < x < \pi, y > 0, \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi} = 0, & \text{若 } y > 0, \\ u|_{y=0} = 0, u_y|_{y=0} = \frac{1}{n} \sin nx, & \text{若 } x \in (0, \pi). \end{cases}$$

第一步: 验证 $u_n(x, y) \doteq \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny)$ 是上述问题的解, 这里 $\sinh x \doteq \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 是双曲正弦函数.

第二步: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 上述问题的极限问题是
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{若 } 0 < x < \pi, y > 0, \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi} = 0, & \text{若 } y > 0, \\ u|_{y=0} = 0, u_y|_{y=0} = 0, & \text{若 } x \in (0, \pi). \end{cases}$$
 证明它只有平凡解

$u \equiv 0$. (请在后续学习中一直思考如何解决此问题!)

第三步: 说明对所有的 $x \in (0, \pi)$, 对任意固定的 $y > 0, \{u_n(x, y)\}_{n=1}^{\infty}$ 是无界的. (通过此处体会: 为什么对函数的研究引导出对复杂点集的研究? 记 $\langle r \rangle$ 是实数 r 的小数部分, 对 $x = r\pi, r \in (0, 1)$, 有 $|\sin(nx)| = |\sin(\langle nr \rangle \pi)|$; 当 r 是无理数时, 根据 Weyl 等分布定理, $\langle nr \rangle$ 在 $(0, 1)$ 中稠密; 参见 E.M. Stein, R. Shakarchi: Fourier Analysis, An Introduction, Princeton Lectures in Analysis 1, p.105). 参考: Hadamard, Jacques: Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. Yale University Press, 1923. [§18, p.33]

例 1. Laplace 方程的初边值问题: 一个不适定的定解问题 (Hadamard, 1917 年), 其中 $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{若 } 0 < x < \pi, y > 0, \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi} = 0, & \text{若 } y > 0, \\ u|_{y=0} = 0, u_y|_{y=0} = \frac{1}{n} \sin nx, & \text{若 } x \in (0, \pi). \end{cases}$$

第一步: 验证 $u_n(x, y) \doteq \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny)$ 是上述问题的解, 这里 $\sinh x \doteq \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 是双曲正弦函数.

第二步: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 上述问题的极限问题是 $\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{若 } 0 < x < \pi, y > 0, \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi} = 0, & \text{若 } y > 0, \\ u|_{y=0} = 0, u_y|_{y=0} = 0, & \text{若 } x \in (0, \pi). \end{cases}$ 证明它只有平凡解

$u \equiv 0$. (请在后续学习中一直思考如何解决此问题!)

第三步: 说明对所有的 $x \in (0, \pi)$, 对任意固定的 $y > 0, \{u_n(x, y)\}_{n=1}^{\infty}$ 是无界的. (通过此处体会: 为什么对函数的研究引导出对复杂点集的研究? 记 $\langle r \rangle$ 是实数 r 的小数部分, 对 $x = r\pi, r \in (0, 1)$, 有 $|\sin(nx)| = |\sin(\langle nr \rangle \pi)|$; 当 r 是无理数时, 根据 Weyl 等分布定理, $\langle nr \rangle$ 在 $(0, 1)$ 中稠密; 参见 E.M. Stein, R. Shakarchi: Fourier Analysis, An Introduction, Princeton Lectures in Analysis 1, p.105). 参考: Hadamard, Jacques: Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. Yale University Press, 1923. [§18, p.33]

例 2. 求方程 $(x - y)u_{xy} - u_x + u_y = 0$ 的通解.

解: 该方程可以写为 $[(x - y)u_x]_y + u_y = 0$. 关于 y 积分, 得到 $(x - y)u_x + u = f(x)$, 其中 f 是一个任意的关于 x 的可积函数. 注意到 $(x - y)u_x + u = [(x - y)u]_x$, 关于 x 积分, 得到 $(x - y)u(x, y) = \int f(x) dx + G(y)$. 这里 G 是关于 y 的一个函数. 记 $F(x) = \int f(x) dx$, 由于 f 的任意性, F 也是一个任意的 (可微) 函数. 由此得到

$$u(x, y) = \frac{F(x) + G(y)}{x - y}.$$

容易验证, 当 $F, G \in C^1$ 时这就是一个经典解.

注: 由于这里 F 和 G 是两个独立的任意的函数, 这样的解叫作上述二阶偏微分方程 $(x - y)u_{xy} - u_x + u_y = 0$ 的通解.

课堂练习题

习题 1. 求解函数 $u(\xi, \eta)$ 使得 $u_\xi = 0$.

习题 2. 求解函数 $u(\xi, \eta)$ 使得 $u_{\xi\eta} = 0$.

习题 3. 求解函数 $u(x, t)$ 使得
$$\begin{cases} u_t = x^2, & t > 0, -\infty < x < +\infty, \\ u(x, 0) = x^2. \end{cases}$$

习题 4. 验证函数 $\ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, e^x \sin y, x^2 - y^2$ 都是二维 Laplace 方程 $\Delta u(x, y) = 0$ 的解.

习题 5. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, $x \in \mathbb{R}^n$ 是列向量, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 代表 $\mathbb{R}^n$ 的标准内积. 问: 当 A 满足什么条件时 $u(x) \doteq \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle$ 是 Poisson 方程 $\Delta u = 1$ 的解?

阅读任务和作业

郇中丹, 黄海洋: 偏微分方程 (第二版), 高等教育出版社, 2013. 前言—第 9 页

作业: P.3: (2, 3, 4); P.9: (2)

最后更新: 2022-9-9

偏微分方程

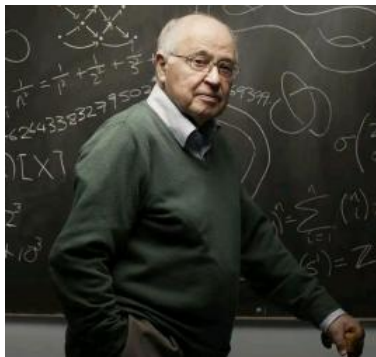
(第二讲 一阶拟线性方程式)

袁海荣 (华东师范大学 数学科学学院)

2022 年 9 月 8 日

在例子和理论之间没有明确的界限. ……一个好的例子是一个美丽的东西, 它光芒四射又能说服人, 它给人以洞察和理解, 它是信念的基石.

— Michael Atiyah (1929 年 4 月 22 日—2019 年 1 月 11 日)



传记 <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Atiyah/>

学习要点

- 熟练掌握特征线的数学概念和几何意义
- 会用特征线法求解两个自变量一阶拟线性方程初值问题的局部经典解 (难点: ODE 的求解, 隐函数定理)
- 掌握交通流模型的建模方法
- 准确理解特征线的物理意义, 辨别流速和波速的异同

学习要点

- 熟练掌握特征线的数学概念和几何意义
- 会用特征线法求解两个自变量一阶拟线性方程初值问题的局部经典解 (难点: ODE 的求解, 隐函数定理)
- 掌握交通流模型的建模方法
- 准确理解特征线的物理意义, 辨别流速和波速的异同

学习要点

- 熟练掌握特征线的数学概念和几何意义
- 会用特征线法求解两个自变量一阶拟线性方程初值问题的局部经典解 (难点: ODE 的求解, 隐函数定理)
- 掌握交通流模型的建模方法
- 准确理解特征线的物理意义, 辨别流速和波速的异同

学习要点

- 熟练掌握特征线的数学概念和几何意义
- 会用特征线法求解两个自变量一阶拟线性方程初值问题的局部经典解 (难点: ODE 的求解, 隐函数定理)
- 掌握交通流模型的建模方法
- 准确理解特征线的物理意义, 辨别流速和波速的异同

学习要点

- 熟练掌握特征线的数学概念和几何意义
- 会用特征线法求解两个自变量一阶拟线性方程初值问题的局部经典解 (难点: ODE 的求解, 隐函数定理)
- 掌握交通流模型的建模方法
- 准确理解特征线的物理意义, 辨别流速和波速的异同

一阶拟线性 PDE 的研究思路和方法

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u)$$

- 体会如下研究 PDE 的一般思路: (1) 假设要找的经典解或特殊解存在, 利用各种方法 (包括物理直觉或实验结论) 找到解所满足的条件 (简单的问题), 阐明复杂与简单如何转化/过渡; (2) 给出适当条件, 用数学工具严格证明对解的上述刻画; (3) 在对特解的性质研究的基础上探讨合理的定解条件的提法及定解问题的适定性, 建立数学理论; (4) 构建高效稳定的数值算法, 帮助解决实际问题
- 经典解的局部存在性 (特征线法)
 - 几何角度: 将 $u = u(x, y)$ 的函数图像看作曲面 $\Rightarrow$ 特征曲线织成解曲面;
 - 分析角度: 含参变量的一阶非线性 ODE (常微分方程) 的解的存在唯一性及对参数的可微性定理 + 隐函数定理 (都是仅在局部有效的工具)
- 经典解的爆破 (解不再连续-典型例子: 无粘的 Burgers 方程 $u_t + uu_x = 0$; 一般散度形方程 $u_t + f(u)_x = g(u)$) [L.C. Evans 《Partial Differential Equations》第三章]
- 弱解的概念 (需方程有散度形结构), 熵条件, 非线性特解 (接触间断, 激波, 疏散波); Riemann 问题; Cauchy 问题弱解的 Lax-Oleinik 公式
- 多个自变量单个守恒律方程 Cauchy 问题弱解的适定性 (Kruzkov 定理): 间断追踪法 + 算子分裂法, 补偿紧性方法, 粘性消失方法, 有限差分法, 非线性半群等 [双曲守恒律方程的专著]

一阶拟线性 PDE 的研究思路和方法

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u)$$

- 体会如下研究 PDE 的一般思路: (1) 假设要找的经典解或特殊解存在, 利用各种方法 (包括物理直觉或实验结论) 找到解所满足的条件 (简单的问题), 阐明复杂与简单如何转化/过渡; (2) 给出适当条件, 用数学工具严格证明对解的上述刻画; (3) 在对特解的性质研究的基础上探讨合理的定解条件的提法及定解问题的适定性, 建立数学理论; (4) 构建高效稳定的数值算法, 帮助解决实际问题
- 经典解的局部存在性 (特征线法)
 - 几何角度: 将 $u = u(x, y)$ 的函数图像看作曲面 $\Rightarrow$ 特征曲线织成解曲面;
 - 分析角度: 含参变量的一阶非线性 ODE (常微分方程) 的解的存在唯一性及对参数的可微性定理 + 隐函数定理 (都是仅在局部有效的工具)
- 经典解的爆破 (解不再连续-典型例子: 无粘的 Burgers 方程 $u_t + uu_x = 0$; 一般散度形方程 $u_t + f(u)_x = g(u)$) [L.C. Evans 《Partial Differential Equations》第三章]
- 弱解的概念 (需方程有散度形结构), 熵条件, 非线性特解 (接触间断, 激波, 疏散波); Riemann 问题; Cauchy 问题弱解的 Lax-Oleinik 公式
- 多个自变量单个守恒律方程 Cauchy 问题弱解的适定性 (Kruzkov 定理): 间断追踪法 + 算子分裂法, 补偿紧性方法, 粘性消失方法, 有限差分法, 非线性半群等 [双曲守恒律方程的专著]

一阶拟线性 PDE 的研究思路和方法

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u)$$

- 体会如下研究 PDE 的一般思路: (1) 假设要找的经典解或特殊解存在, 利用各种方法 (包括物理直觉或实验结论) 找到解所满足的条件 (简单的问题), 阐明复杂与简单如何转化/过渡; (2) 给出适当条件, 用数学工具严格证明对解的上述刻画; (3) 在对特解的性质研究的基础上探讨合理的定解条件的提法及定解问题的适定性, 建立数学理论; (4) 构建高效稳定的数值算法, 帮助解决实际问题
- 经典解的局部存在性 (特征线法)
 - 几何角度: 将 $u = u(x, y)$ 的函数图像看作曲面 $\Rightarrow$ 特征曲线织成解曲面;
 - 分析角度: 含参变量的一阶非线性 ODE (常微分方程) 的解的存在唯一性及对参数的可微性定理 + 隐函数定理 (都是仅在局部有效的工具)
- 经典解的爆破 (解不再连续-典型例子: 无粘的 Burgers 方程 $u_t + uu_x = 0$; 一般散度形方程 $u_t + f(u)_x = g(u)$) [L.C. Evans 《Partial Differential Equations》第三章]
- 弱解的概念 (需方程有散度形结构), 熵条件, 非线性特解 (接触间断, 激波, 疏散波); Riemann 问题; Cauchy 问题弱解的 Lax-Oleinik 公式
- 多个自变量单个守恒律方程 Cauchy 问题弱解的适定性 (Kruzkov 定理): 间断追踪法 + 算子分裂法, 补偿紧性方法, 粘性消失方法, 有限差分法, 非线性半群等 [双曲守恒律方程的专著]

一阶拟线性 PDE 的研究思路和方法

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u)$$

- 体会如下研究 PDE 的一般思路: (1) 假设要找的经典解或特殊解存在, 利用各种方法 (包括物理直觉或实验结论) 找到解所满足的条件 (简单的问题), 阐明复杂与简单如何转化/过渡; (2) 给出适当条件, 用数学工具严格证明对解的上述刻画; (3) 在对特解的性质研究的基础上探讨合理的定解条件的提法及定解问题的适定性, 建立数学理论; (4) 构建高效稳定的数值算法, 帮助解决实际问题
- 经典解的局部存在性 (特征线法)
 - 几何角度: 将 $u = u(x, y)$ 的函数图像看作曲面 $\Rightarrow$ 特征曲线织成解曲面;
 - 分析角度: 含参变量的一阶非线性 ODE (常微分方程) 的解的存在唯一性及对参数的可微性定理 + 隐函数定理 (都是仅在局部有效的工具)
- 经典解的爆破 (解不再连续-典型例子: 无粘的 Burgers 方程 $u_t + uu_x = 0$; 一般散度形方程 $u_t + f(u)_x = g(u)$) [L.C. Evans 《Partial Differential Equations》第三章]
- 弱解的概念 (需方程有散度形结构), 熵条件, 非线性特解 (接触间断, 激波, 疏散波); Riemann 问题; Cauchy 问题弱解的 Lax-Oleinik 公式
- 多个自变量单个守恒律方程 Cauchy 问题弱解的适定性 (Kruzkov 定理): 间断追踪法 + 算子分裂法, 补偿紧性方法, 粘性消失方法, 有限差分法, 非线性半群等 [双曲守恒律方程的专著]

一阶拟线性 PDE 的研究思路和方法

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u)$$

- 体会如下研究 PDE 的一般思路: (1) 假设要找的经典解或特殊解存在, 利用各种方法 (包括物理直觉或实验结论) 找到解所满足的条件 (简单的问题), 阐明复杂与简单如何转化/过渡; (2) 给出适当条件, 用数学工具严格证明对解的上述刻画; (3) 在对特解的性质研究的基础上探讨合理的定解条件的提法及定解问题的适定性, 建立数学理论; (4) 构建高效稳定的数值算法, 帮助解决实际问题
- 经典解的局部存在性 (特征线法)
 - 几何角度: 将 $u = u(x, y)$ 的函数图像看作曲面 $\Rightarrow$ 特征曲线织成解曲面;
 - 分析角度: 含参变量的一阶非线性 ODE (常微分方程) 的解的存在唯一性及对参数的可微性定理 + 隐函数定理 (都是仅在局部有效的工具)
- 经典解的爆破 (解不再连续-典型例子: 无粘的 Burgers 方程 $u_t + uu_x = 0$; 一般散度形方程 $u_t + f(u)_x = g(u)$) [L.C. Evans 《Partial Differential Equations》第三章]
- 弱解的概念 (需方程有散度形结构), 熵条件, 非线性特解 (接触间断, 激波, 疏散波); Riemann 问题; Cauchy 问题弱解的 Lax-Oleinik 公式
- 多个自变量单个守恒律方程 Cauchy 问题弱解的适定性 (Kruzkov 定理): 间断追踪法 + 算子分裂法, 补偿紧性方法, 粘性消失方法, 有限差分法, 非线性半群等 [双曲守恒律方程的专著]

一阶拟线性 PDE 的研究思路和方法

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u)$$

- 体会如下研究 PDE 的一般思路: (1) 假设要找的经典解或特殊解存在, 利用各种方法 (包括物理直觉或实验结论) 找到解所满足的条件 (简单的问题), 阐明复杂与简单如何转化/过渡; (2) 给出适当条件, 用数学工具严格证明对解的上述刻画; (3) 在对特解的性质研究的基础上探讨合理的定解条件的提法及定解问题的适定性, 建立数学理论; (4) 构建高效稳定的数值算法, 帮助解决实际问题
- 经典解的局部存在性 (特征线法)
 - 几何角度: 将 $u = u(x, y)$ 的函数图像看作曲面 $\Rightarrow$ 特征曲线织成解曲面;
 - 分析角度: 含参变量的一阶非线性 ODE (常微分方程) 的解的存在唯一性及对参数的可微性定理 + 隐函数定理 (都是仅在局部有效的工具)
- 经典解的爆破 (解不再连续-典型例子: 无粘的 Burgers 方程 $u_t + uu_x = 0$; 一般散度形方程 $u_t + f(u)_x = g(u)$) [L.C. Evans 《Partial Differential Equations》第三章]
- 弱解的概念 (需方程有散度形结构), 熵条件, 非线性特解 (接触间断, 激波, 疏散波); Riemann 问题; Cauchy 问题弱解的 Lax-Oleinik 公式
- 多个自变量单个守恒律方程 Cauchy 问题弱解的适定性 (Kruzkov 定理): 间断追踪法 + 算子分裂法, 补偿紧性方法, 粘性消失方法, 有限差分法, 非线性半群等 [双曲守恒律方程的专著]

一阶拟线性 PDE 的研究思路和方法

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u)$$

- 体会如下研究 PDE 的一般思路: (1) 假设要找的经典解或特殊解存在, 利用各种方法 (包括物理直觉或实验结论) 找到解所满足的条件 (简单的问题), 阐明复杂与简单如何转化/过渡; (2) 给出适当条件, 用数学工具严格证明对解的上述刻画; (3) 在对特解的性质研究的基础上探讨合理的定解条件的提法及定解问题的适定性, 建立数学理论; (4) 构建高效稳定的数值算法, 帮助解决实际问题
- 经典解的局部存在性 (特征线法)
 - 几何角度: 将 $u = u(x, y)$ 的函数图像看作曲面 $\Rightarrow$ 特征曲线织成解曲面;
 - 分析角度: 含参变量的一阶非线性 ODE (常微分方程) 的解的存在唯一性及对参数的可微性定理 + 隐函数定理 (都是仅在局部有效的工具)
- 经典解的爆破 (解不再连续-典型例子: 无粘的 Burgers 方程 $u_t + uu_x = 0$; 一般散度形方程 $u_t + f(u)_x = g(u)$) [L.C. Evans 《Partial Differential Equations》第三章]
- 弱解的概念 (需方程有散度形结构), 熵条件, 非线性特解 (接触间断, 激波, 疏散波); Riemann 问题; Cauchy 问题弱解的 Lax-Oleinik 公式
- 多个自变量单个守恒律方程 Cauchy 问题弱解的适定性 (Kruzkov 定理): 间断追踪法 + 算子分裂法, 补偿紧性方法, 粘性消失方法, 有限差分法, 非线性半群等 [双曲守恒律方程的专著]

一阶拟线性 PDE 的研究思路和方法

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u)$$

- 体会如下研究 PDE 的一般思路: (1) 假设要找的经典解或特殊解存在, 利用各种方法 (包括物理直觉或实验结论) 找到解所满足的条件 (简单的问题), 阐明复杂与简单如何转化/过渡; (2) 给出适当条件, 用数学工具严格证明对解的上述刻画; (3) 在对特解的性质研究的基础上探讨合理的定解条件的提法及定解问题的适定性, 建立数学理论; (4) 构建高效稳定的数值算法, 帮助解决实际问题
- 经典解的局部存在性 (特征线法)
 - 几何角度: 将 $u = u(x, y)$ 的函数图像看作曲面 $\Rightarrow$ 特征曲线织成解曲面;
 - 分析角度: 含参变量的一阶非线性 ODE (常微分方程) 的解的存在唯一性及对参数的可微性定理 + 隐函数定理 (都是仅在局部有效的工具)
- 经典解的爆破 (解不再连续-典型例子: 无粘的 Burgers 方程 $u_t + uu_x = 0$; 一般散度形方程 $u_t + f(u)_x = g(u)$) [L.C. Evans 《Partial Differential Equations》第三章]
- 弱解的概念 (需方程有散度形结构), 熵条件, 非线性特解 (接触间断, 激波, 疏散波); Riemann 问题; Cauchy 问题弱解的 Lax-Oleinik 公式
- 多个自变量单个守恒律方程 Cauchy 问题弱解的适定性 (Kruzkov 定理): 间断追踪法 + 算子分裂法, 补偿紧性方法, 粘性消失方法, 有限差分法, 非线性半群等 [双曲守恒律方程的专著]

一阶拟线性 PDE 的研究思路和方法

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u)$$

- 体会如下研究 PDE 的一般思路: (1) 假设要找的经典解或特殊解存在, 利用各种方法 (包括物理直觉或实验结论) 找到解所满足的条件 (简单的问题), 阐明复杂与简单如何转化/过渡; (2) 给出适当条件, 用数学工具严格证明对解的上述刻画; (3) 在对特解的性质研究的基础上探讨合理的定解条件的提法及定解问题的适定性, 建立数学理论; (4) 构建高效稳定的数值算法, 帮助解决实际问题
- 经典解的局部存在性 (特征线法)
 - 几何角度: 将 $u = u(x, y)$ 的函数图像看作曲面 $\Rightarrow$ 特征曲线织成解曲面;
 - 分析角度: 含参变量的一阶非线性 ODE (常微分方程) 的解的存在唯一性及对参数的可微性定理 + 隐函数定理 (都是仅在局部有效的工具)
- 经典解的爆破 (解不再连续-典型例子: 无粘的 Burgers 方程 $u_t + uu_x = 0$; 一般散度形方程 $u_t + f(u)_x = g(u)$) [L.C. Evans 《Partial Differential Equations》第三章]
- 弱解的概念 (需方程有散度形结构), 熵条件, 非线性特解 (接触间断, 激波, 疏散波); Riemann 问题; Cauchy 问题弱解的 Lax-Oleinik 公式
- 多个自变量单个守恒律方程 Cauchy 问题弱解的适定性 (Kruzkov 定理): 间断追踪法 + 算子分裂法, 补偿紧性方法, 粘性消失方法, 有限差分法, 非线性半群等 [双曲守恒律方程的专著]

一阶拟线性 PDE 的研究思路和方法

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u)$$

- 体会如下研究 PDE 的一般思路: (1) 假设要找的经典解或特殊解存在, 利用各种方法 (包括物理直觉或实验结论) 找到解所满足的条件 (简单的问题), 阐明复杂与简单如何转化/过渡; (2) 给出适当条件, 用数学工具严格证明对解的上述刻画; (3) 在对特解的性质研究的基础上探讨合理的定解条件的提法及定解问题的适定性, 建立数学理论; (4) 构建高效稳定的数值算法, 帮助解决实际问题
- 经典解的局部存在性 (特征线法)
 - 几何角度: 将 $u = u(x, y)$ 的函数图像看作曲面 $\Rightarrow$ 特征曲线织成解曲面;
 - 分析角度: 含参变量的一阶非线性 ODE (常微分方程) 的解的存在唯一性及对参数的可微性定理 + 隐函数定理 (都是仅在局部有效的工具)
- 经典解的爆破 (解不再连续-典型例子: 无粘的 Burgers 方程 $u_t + uu_x = 0$; 一般散度形方程 $u_t + f(u)_x = g(u)$) [L.C. Evans 《Partial Differential Equations》第三章]
- 弱解的概念 (需方程有散度形结构), 熵条件, 非线性特解 (接触间断, 激波, 疏散波); Riemann 问题; Cauchy 问题弱解的 Lax-Oleinik 公式
- 多个自变量单个守恒律方程 Cauchy 问题弱解的适定性 (Kruzkov 定理): 间断追踪法 + 算子分裂法, 补偿紧性方法, 粘性消失方法, 有限差分法, 非线性半群等 [双曲守恒律方程的专著]

一阶拟线性 PDE 的研究思路和方法

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u)$$

- 体会如下研究 PDE 的一般思路: (1) 假设要找的经典解或特殊解存在, 利用各种方法 (包括物理直觉或实验结论) 找到解所满足的条件 (简单的问题), 阐明复杂与简单如何转化/过渡; (2) 给出适当条件, 用数学工具严格证明对解的上述刻画; (3) 在对特解的性质研究的基础上探讨合理的定解条件的提法及定解问题的适定性, 建立数学理论; (4) 构建高效稳定的数值算法, 帮助解决实际问题
- 经典解的局部存在性 (特征线法)
 - 几何角度: 将 $u = u(x, y)$ 的函数图像看作曲面 $\Rightarrow$ 特征曲线织成解曲面;
 - 分析角度: 含参变量的一阶非线性 ODE (常微分方程) 的解的存在唯一性及对参数的可微性定理 + 隐函数定理 (都是仅在局部有效的工具)
- 经典解的爆破 (解不再连续-典型例子: 无粘的 Burgers 方程 $u_t + uu_x = 0$; 一般散度形方程 $u_t + f(u)_x = g(u)$) [L.C. Evans 《Partial Differential Equations》第三章]
- 弱解的概念 (需方程有散度形结构), 熵条件, 非线性特解 (接触间断, 激波, 疏散波); Riemann 问题; Cauchy 问题弱解的 Lax-Oleinik 公式
- 多个自变量单个守恒律方程 Cauchy 问题弱解的适定性 (Kruzkov 定理): 间断追踪法 + 算子分裂法, 补偿紧性方法, 粘性消失方法, 有限差分法, 非线性半群等 [双曲守恒律方程的专著]

一阶拟线性 PDE 的研究思路和方法

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u)$$

- 体会如下研究 PDE 的一般思路: (1) 假设要找的经典解或特殊解存在, 利用各种方法 (包括物理直觉或实验结论) 找到解所满足的条件 (简单的问题), 阐明复杂与简单如何转化/过渡; (2) 给出适当条件, 用数学工具严格证明对解的上述刻画; (3) 在对特解的性质研究的基础上探讨合理的定解条件的提法及定解问题的适定性, 建立数学理论; (4) 构建高效稳定的数值算法, 帮助解决实际问题
- 经典解的局部存在性 (特征线法)
 - 几何角度: 将 $u = u(x, y)$ 的函数图像看作曲面 $\Rightarrow$ 特征曲线织成解曲面;
 - 分析角度: 含参变量的一阶非线性 ODE (常微分方程) 的解的存在唯一性及对参数的可微性定理 + 隐函数定理 (都是仅在局部有效的工具)
- 经典解的爆破 (解不再连续-典型例子: 无粘的 Burgers 方程 $u_t + uu_x = 0$; 一般散度形方程 $u_t + f(u)_x = g(u)$) [L.C. Evans 《Partial Differential Equations》第三章]
- 弱解的概念 (需方程有散度形结构), 熵条件, 非线性特解 (接触间断, 激波, 疏散波); Riemann 问题; Cauchy 问题弱解的 Lax-Oleinik 公式
- 多个自变量单个守恒律方程 Cauchy 问题弱解的适定性 (Kruzkov 定理): 间断追踪法 + 算子分裂法, 补偿紧性方法, 粘性消失方法, 有限差分法, 非线性半群等 [双曲守恒律方程的专著]

一阶拟线性 PDE 的特征线法 ($\Rightarrow$ ODE 问题)

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u) \quad (\heartsuit)$$

准确理解上述记号; 带着问题学习—思考如何将这里的特征线方法推广到一般情形 $\sum_{i=1}^n a_i(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x, u), x \in \mathbb{R}^n$

- 解曲面 $\Sigma = \{z = u(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$, 法向量: $\mathbf{n}(x, y) = (u_x(x, y), u_y(x, y), -1)$
- 方程的几何意义: 向量 $\mathbf{t} = (a(x, y, u(x, y)), b(x, y, u(x, y)), c(x, y, u(x, y)))$ 与 $\mathbf{n}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中垂直 $\Rightarrow \mathbf{t}$ 是 Σ 的切向量

想法: 切向量 $\xrightarrow[\text{求解单个 ODE 的解}]{\text{拼接}}$ 曲线 $\xrightarrow[\text{求含参量 ODE 的解}]{\text{拼接}}$ 曲面 Σ (由简单对象构造复杂对象) $\xrightarrow[\text{隐函数定理}]{\text{从几何回到分析}}$ 曲面是函数图像 $\rightarrow$ 函数

定义 (特征线)

设 $a, b, c \in C^1$. 常微分方程组 $\frac{dx}{dt} = a(x, y, z), \frac{dy}{dt} = b(x, y, z), \frac{dz}{dt} = c(x, y, z) \quad (\diamond)$ 的解 (积分) 曲线称为一阶

PDE($\heartsuit$) 的 (全) 特征线; ODE($\diamond$) 叫作 PDE($\heartsuit$) 的特征方程组. 注意: 也把全特征线在自变量空间的投影

$(x(t), y(t))$ 叫作 特征线, 其切向 $(x', y') = (a, b)$ 叫作 特征方向. (阅读文献时, 要注意根据上下文具体判别.)

一阶拟线性 PDE 的特征线法 ($\Rightarrow$ ODE 问题)

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u) \quad (\heartsuit)$$

准确理解上述记号; 带着问题学习—思考如何将这里的特征线方法推广到一般情形 $\sum_{i=1}^n a_i(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x, u), x \in \mathbb{R}^n$

- 解曲面 $\Sigma = \{z = u(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$, 法向量: $\mathbf{n}(x, y) = (u_x(x, y), u_y(x, y), -1)$
- 方程的几何意义: 向量 $\mathbf{t} = (a(x, y, u(x, y)), b(x, y, u(x, y)), c(x, y, u(x, y)))$ 与 $\mathbf{n}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中垂直 $\Rightarrow \mathbf{t}$ 是 Σ 的切向量

想法: 切向量 $\xrightarrow[\text{求解单个 ODE 的解}]{\text{拼接}}$ 曲线 $\xrightarrow[\text{求含参量 ODE 的解}]{\text{拼接}}$ 曲面 Σ (由简单对象构造复杂对象) $\xrightarrow[\text{隐函数定理}]{\text{从几何回到分析}}$ 曲面是函数图像 $\rightarrow$ 函数

定义 (特征线)

设 $a, b, c \in C^1$. 常微分方程组 $\frac{dx}{dt} = a(x, y, z), \frac{dy}{dt} = b(x, y, z), \frac{dz}{dt} = c(x, y, z) \quad (\diamond)$ 的解 (积分) 曲线称为一阶

PDE($\heartsuit$) 的 (全) 特征线; ODE($\diamond$) 叫作 PDE($\heartsuit$) 的特征方程组. 注意: 也把全特征线在自变量空间的投影

$(x(t), y(t))$ 叫作特征线, 其切向 $(x', y') = (a, b)$ 叫作特征方向. (阅读文献时, 要注意根据上下文具体判别.)

一阶拟线性 PDE 的特征线法 ($\Rightarrow$ ODE 问题)

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u) \quad (\heartsuit)$$

准确理解上述记号; 带着问题学习—思考如何将这里的特征线方法推广到一般情形 $\sum_{i=1}^n a_i(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x, u), x \in \mathbb{R}^n$

- 解曲面 $\Sigma = \{z = u(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$, 法向量: $\mathbf{n}(x, y) = (u_x(x, y), u_y(x, y), -1)$
- 方程的几何意义: 向量 $\mathbf{t} = (a(x, y, u(x, y)), b(x, y, u(x, y)), c(x, y, u(x, y)))$ 与 $\mathbf{n}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中垂直 $\Rightarrow \mathbf{t}$ 是 Σ 的切向量

想法: 切向量 $\xrightarrow[\text{求解单个 ODE 的解}]{\text{拼接}}$ 曲线 $\xrightarrow[\text{求含参量 ODE 的解}]{\text{拼接}}$ 曲面 Σ (由简单对象构造复杂对象) $\xrightarrow[\text{隐函数定理}]{\text{从几何回到分析}}$ 曲面是函数图像 $\rightarrow$ 函数

定义 (特征线)

设 $a, b, c \in C^1$. 常微分方程组 $\frac{dx}{dt} = a(x, y, z), \frac{dy}{dt} = b(x, y, z), \frac{dz}{dt} = c(x, y, z) \quad (\diamond)$ 的解 (积分) 曲线称为一阶

PDE($\heartsuit$) 的 (全) 特征线; ODE($\diamond$) 叫作 PDE($\heartsuit$) 的特征方程组. 注意: 也把全特征线在自变量空间的投影

$(x(t), y(t))$ 叫作特征线, 其切向 $(x', y') = (a, b)$ 叫作特征方向. (阅读文献时, 要注意根据上下文具体判别.)

一阶拟线性 PDE 的特征线法 ($\Rightarrow$ ODE 问题)

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u) \quad (\heartsuit)$$

准确理解上述记号; 带着问题学习—思考如何将这里的特征线方法推广到一般情形 $\sum_{i=1}^n a_i(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x, u), x \in \mathbb{R}^n$

- 解曲面 $\Sigma = \{z = u(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$, 法向量: $\mathbf{n}(x, y) = (u_x(x, y), u_y(x, y), -1)$
- 方程的几何意义: 向量 $\mathbf{t} = (a(x, y, u(x, y)), b(x, y, u(x, y)), c(x, y, u(x, y)))$ 与 $\mathbf{n}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中垂直 $\Rightarrow \mathbf{t}$ 是 Σ 的切向量

想法: 切向量 $\xrightarrow[\text{求解单个 ODE 的解}]{\text{拼接}}$ 曲线 $\xrightarrow[\text{求含参量 ODE 的解}]{\text{拼接}}$ 曲面 Σ (由简单对象构造复杂对象) $\xrightarrow[\text{隐函数定理}]{\text{从几何回到分析}}$ 曲面是函数图像 $\rightarrow$ 函数

定义 (特征线)

设 $a, b, c \in C^1$. 常微分方程组 $\frac{dx}{dt} = a(x, y, z), \frac{dy}{dt} = b(x, y, z), \frac{dz}{dt} = c(x, y, z) \quad (\diamond)$ 的解 (积分) 曲线称为一阶

PDE($\heartsuit$) 的 (全) 特征线; ODE($\diamond$) 叫作 PDE($\heartsuit$) 的特征方程组. 注意: 也把全特征线在自变量空间的投影

$(x(t), y(t))$ 叫作 特征线, 其切向 $(x', y') = (a, b)$ 叫作 特征方向. (阅读文献时, 要注意根据上下文具体判别.)

一阶拟线性 PDE 的特征线法 ($\Rightarrow$ ODE 问题)

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u) \quad (\heartsuit)$$

准确理解上述记号; 带着问题学习—思考如何将这里的特征线方法推广到一般情形 $\sum_{i=1}^n a_i(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x, u), x \in \mathbb{R}^n$

- 解曲面 $\Sigma = \{z = u(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$, 法向量: $\mathbf{n}(x, y) = (u_x(x, y), u_y(x, y), -1)$
- 方程的几何意义: 向量 $\mathbf{t} = (a(x, y, u(x, y)), b(x, y, u(x, y)), c(x, y, u(x, y)))$ 与 $\mathbf{n}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中垂直 $\Rightarrow \mathbf{t}$ 是 Σ 的切向量

想法: 切向量 $\xrightarrow[\text{求解单个 ODE 的解}]{\text{拼接}}$ 曲线 $\xrightarrow[\text{求含参量 ODE 的解}]{\text{拼接}}$ 曲面 Σ (由简单对象构造复杂对象) $\xrightarrow[\text{隐函数定理}]{\text{从几何回到分析}}$ 曲面是函数图像 $\rightarrow$ 函数

定义 (特征线)

设 $a, b, c \in C^1$. 常微分方程组 $\frac{dx}{dt} = a(x, y, z), \frac{dy}{dt} = b(x, y, z), \frac{dz}{dt} = c(x, y, z) \quad (\diamond)$ 的解 (积分) 曲线称为一阶

PDE($\heartsuit$) 的 (全) 特征线; ODE($\diamond$) 叫作 PDE($\heartsuit$) 的特征方程组. 注意: 也把全特征线在自变量空间的投影

$(x(t), y(t))$ 叫作特征线, 其切向 $(x', y') = (a, b)$ 叫作特征方向. (阅读文献时, 要注意根据上下文具体判别.)

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u) \quad (\heartsuit)$$

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = c(x, y, z) \quad (\diamond)$$

定理

函数 $u = u(x, y)$ 是 $(\heartsuit)$ 的经典解 $\Leftrightarrow$ 过 C^1 曲面 $\Sigma : z = u(x, y)$ 上任意一点的全特征线完全落在曲面 Σ 内.

该定理的意义: 建立了分析对象(函数)与几何对象(曲线/曲面)间的联系, 由此刻画了经典解的结构——由特征线拼接成的 C^1 曲面, 将构造曲面转化为构造特征线; 缺点: 没有明确什么条件下特征线可以拼接成一张 C^1 曲面.

证明. 充分性 $\Leftarrow$: 设 $\Sigma : z = u(x, y)$ 是特征线织成的 C^1 曲面: 取定 Σ 上任意一点 $P_0 = (x_0, y_0, z_0 = u(x_0, y_0))$, 考虑过该点的特征线, 即 $(\diamond)$ 满足初始条件 $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0$ 的积分曲线 $\Gamma : x = x(t), y = y(t), z = z(t)$. 由于 Σ 是特征线织成的, 即 $\Gamma \subset \Sigma$, 则 $z(t) = u(x(t), y(t))$. 于是

$$\begin{aligned} c(x(t), y(t), \underbrace{u(x(t), y(t))}_{z(t)}) &\stackrel{(\diamond) \text{第三式}}{\leftarrow} = \frac{dz(t)}{dt} = \frac{d}{dt} u(x(t), y(t)) \stackrel{u \in C^1, \text{链式法则}}{\rightarrow} = x'(t) \partial_x u(x(t), y(t)) + y'(t) \partial_y u(x(t), y(t)) \\ &= a(x(t), y(t), u(x(t), y(t))) \partial_x u(x(t), y(t)) + b(x(t), y(t), u(x(t), y(t))) \partial_y u(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

特别地, 取 $t = 0$, 就得到等式 $a(x_0, y_0, u(x_0, y_0)) u_x(x_0, y_0) + b(x_0, y_0, u(x_0, y_0)) u_y(x_0, y_0) = c(x_0, y_0, u(x_0, y_0))$, 即 u 在 (x_0, y_0) 点满足 PDE. 于是 u 是 $(\heartsuit)$ 的一个经典解.

注意: 这一部分用到了积分曲线的存在性. 为了保证 ODE 可解, 需要 a, b, c 是连续函数.

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u) \quad (\heartsuit)$$

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = c(x, y, z) \quad (\diamond)$$

定理

函数 $u = u(x, y)$ 是 $(\heartsuit)$ 的经典解 $\Leftrightarrow$ 过 C^1 曲面 $\Sigma : z = u(x, y)$ 上任意一点的 (全) 特征线完全落在曲面 Σ 内.

该定理的意义: 建立了分析对象 (函数) 与几何对象 (曲线/曲面) 间的联系, 由此刻画了经典解的结构—由特征线拼接成的 C^1 曲面, 将构造曲面转化为构造特征线; 缺点: 没有明确什么条件下特征线可以拼接成一张 C^1 曲面.

证明. 充分性 $\Leftarrow$: 设 $\Sigma : z = u(x, y)$ 是特征线织成的 C^1 曲面: 取定 Σ 上任意一点 $P_0 = (x_0, y_0, z_0 = u(x_0, y_0))$, 考虑过该点的特征线, 即 $(\diamond)$ 满足初始条件 $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0$ 的积分曲线 $\Gamma : x = x(t), y = y(t), z = z(t)$. 由于 Σ 是特征线织成的, 即 $\Gamma \subset \Sigma$, 则 $z(t) = u(x(t), y(t))$. 于是

$$\begin{aligned} c(x(t), y(t), \underbrace{u(x(t), y(t))}_{z(t)}) &\stackrel{(\diamond) \text{第三式}}{\leftarrow} = \frac{dz(t)}{dt} = \frac{d}{dt} u(x(t), y(t)) \stackrel{u \in C^1, \text{链式法则}}{\rightarrow} = x'(t) \partial_x u(x(t), y(t)) + y'(t) u_y(x(t), y(t)) \\ &= a(x(t), y(t), u(x(t), y(t))) \partial_x u(x(t), y(t)) + b(x(t), y(t), u(x(t), y(t))) u_y(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

特别地, 取 $t = 0$, 就得到等式 $a(x_0, y_0, u(x_0, y_0)) u_x(x_0, y_0) + b(x_0, y_0, u(x_0, y_0)) u_y(x_0, y_0) = c(x_0, y_0, u(x_0, y_0))$, 即 u 在 (x_0, y_0) 点满足 PDE. 于是 u 是 $(\heartsuit)$ 的一个经典解.

注意: 这一部分用到了积分曲线的存在性. 为了保证 ODE 可解, 需要 a, b, c 是连续函数.

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u) \quad (\heartsuit)$$

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = c(x, y, z) \quad (\diamond)$$

定理

函数 $u = u(x, y)$ 是 $(\heartsuit)$ 的经典解 $\Leftrightarrow$ 过 C^1 曲面 $\Sigma : z = u(x, y)$ 上任意一点的全特征线完全落在曲面 Σ 内.

该定理的意义: 建立了分析对象(函数)与几何对象(曲线/曲面)间的联系, 由此刻画了经典解的结构—由特征线拼接成的 C^1 曲面, 将构造曲面转化为构造特征线; 缺点: 没有明确什么条件下特征线可以拼接成一张 C^1 曲面.

证明. 充分性 $\Leftarrow$: 设 $\Sigma : z = u(x, y)$ 是特征线织成的 C^1 曲面: 取定 Σ 上任意一点 $P_0 = (x_0, y_0, z_0 = u(x_0, y_0))$, 考虑过该点的特征线, 即 $(\diamond)$ 满足初始条件 $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0$ 的积分曲线 $\Gamma : x = x(t), y = y(t), z = z(t)$. 由于 Σ 是特征线织成的, 即 $\Gamma \subset \Sigma$, 则 $z(t) = u(x(t), y(t))$. 于是

$$\begin{aligned} c(x(t), y(t), \underbrace{u(x(t), y(t))}_{z(t)}) &\stackrel{(\diamond) \text{第三式}}{\leftarrow} = \frac{dz(t)}{dt} = \frac{d}{dt} u(x(t), y(t)) \stackrel{u \in C^1, \text{链式法则}}{\rightarrow} = x'(t) \partial_x u(x(t), y(t)) + y'(t) \partial_y u(x(t), y(t)) \\ &= a(x(t), y(t), u(x(t), y(t))) \partial_x u(x(t), y(t)) + b(x(t), y(t), u(x(t), y(t))) \partial_y u(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

特别地, 取 $t = 0$, 就得到等式 $a(x_0, y_0, u(x_0, y_0)) u_x(x_0, y_0) + b(x_0, y_0, u(x_0, y_0)) u_y(x_0, y_0) = c(x_0, y_0, u(x_0, y_0))$, 即 u 在 (x_0, y_0) 点满足 PDE. 于是 u 是 $(\heartsuit)$ 的一个经典解.

注意: 这一部分用到了积分曲线的存在性. 为了保证 ODE 可解, 需要 a, b, c 是连续函数.

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u) \quad (\heartsuit); \quad \frac{dx}{dt} = a(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = c(x, y, z) \quad (\diamond)$$

定理

函数 $u = u(x, y)$ 是 $(\heartsuit)$ 的古典解 $\Leftrightarrow$ 过 C^1 曲面 $\Sigma : z = u(x, y)$ 上任意一点的全特征线完全落在曲面 Σ 内.

证明. 必要性 $\Rightarrow$: 设 $\Sigma : z = u(x, y)$ 是 PDE 经典解确定的 C^1 曲面, $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$. 记 $\Gamma : x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ 是过 P_0 点的特征线, 即 ODE $(\diamond)$ 的积分曲线, 要证明 $\Gamma \subset \Sigma$, 即成立 $z(t) \equiv u(x(t), y(t))$. [注意下面的证明方法, 构造一条在曲面上的曲线, 说明它就是这条特征线 Γ ! 这里是难点, 值得借鉴]

第一步: 由于函数 $u \in C^1$ 已知, 现在解出曲线 $X(t), Y(t)$ 使得 $X'(t) = a(X(t), Y(t), u(X(t), Y(t)))$, $Y'(t) = b(X(t), Y(t), u(X(t), Y(t)))$, $X(0) = x_0, Y(0) = y_0$. 再

令 $Z(t) \doteq u(X(t), Y(t))$, 那它是已知了的. 用链式法则, $\frac{dZ(t)}{dt} = X'(t)u_x(X(t), Y(t)) + Y'(t)u_y(X(t), Y(t)) \xrightarrow[u \text{ 满足 } (\heartsuit)]{=} c(X(t), Y(t), Z(t)) \Rightarrow$
在 $x = X(t), y = Y(t)$ 点成立

$(X(t), Y(t), Z(t))$ 也是特征线.

第二步: 注意 $Z(0) = u(x(0), y(0)) = u(x_0, y_0) = z_0 = z(0)$, 从而 $(X(t), Y(t), Z(t))$ 也是经过 P_0 的特征线, 即与特征线 Γ 满足相同初值条件

$\xrightarrow{\text{ODE 初值问题解的唯一性}} x(t) \equiv X(t), y(t) \equiv Y(t), z(t) \equiv Z(t) \doteq u(X(t), Y(t)) = u(x(t), y(t))$. 证毕!

注意: 需要 a, b, c 是 Lipschitz 连续的, 保证 ODE $(\diamond)$ 初值问题解的唯一性.

定理 (复习 Picard 定理: ODE 初值问题解的存在唯一性)

对初值问题 $y'(x) = f(x, y), y(x_0) = y_0$, 设 f 在区域 $R : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$ 内连续且关于变量 y 满足 Lipschitz 条件, 则它在区间 $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ 上有且只有一个解, 其中 $h = \max \{a, \frac{b}{M}\}$, $M = \max_R |f(x, y)|$.

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u) \quad (\heartsuit); \quad \frac{dx}{dt} = a(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = c(x, y, z) \quad (\diamond)$$

定理

函数 $u = u(x, y)$ 是 $(\heartsuit)$ 的古典解 $\Leftrightarrow$ 过 C^1 曲面 $\Sigma : z = u(x, y)$ 上任意一点的全特征线完全落在曲面 Σ 内.

证明. 必要性 $\Rightarrow$: 设 $\Sigma : z = u(x, y)$ 是 PDE 经典解确定的 C^1 曲面, $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$. 记 $\Gamma : x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ 是过 P_0 点的特征线, 即 ODE $(\diamond)$ 的积分曲线, 要证明 $\Gamma \subset \Sigma$, 即成立 $z(t) \equiv u(x(t), y(t))$. [注意下面的证明方法, 构造一条在曲面上的曲线, 说明它就是这条特征线 Γ ! 这里是难点, 值得借鉴]

第一步: 由于函数 $u \in C^1$ 已知, 现在解出曲线 $X(t), Y(t)$ 使得 $X'(t) = a(X(t), Y(t), u(X(t), Y(t)))$, $Y'(t) = b(X(t), Y(t), u(X(t), Y(t)))$, $X(0) = x_0, Y(0) = y_0$. 再

令 $Z(t) \doteq u(X(t), Y(t))$, 那它是已知了的. 用链式法则, $\frac{dZ(t)}{dt} = X'(t)u_x(X(t), Y(t)) + Y'(t)u_y(X(t), Y(t)) \xrightarrow[u \text{ 满足 } (\heartsuit)]{=} c(X(t), Y(t), Z(t)) \Rightarrow$
在 $x = X(t), y = Y(t)$ 点成立

$(X(t), Y(t), Z(t))$ 也是特征线.

第二步: 注意 $Z(0) = u(x(0), y(0)) = u(x_0, y_0) = z_0 = z(0)$, 从而 $(X(t), Y(t), Z(t))$ 也是经过 P_0 的特征线, 即与特征线 Γ 满足相同初值条件

$\xrightarrow[\text{ODE 初值问题解的唯一性}]{} x(t) \equiv X(t), y(t) \equiv Y(t), z(t) \equiv Z(t) \doteq u(X(t), Y(t)) = u(x(t), y(t))$. 证毕!

注意: 需要 a, b, c 是 Lipschitz 连续的, 保证 ODE $(\diamond)$ 初值问题解的唯一性.

定理 (复习 Picard 定理: ODE 初值问题解的存在唯一性)

对初值问题 $y'(x) = f(x, y), y(x_0) = y_0$, 设 f 在区域 $R : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$ 内连续且关于变量 y 满足 Lipschitz 条件, 则它在区间 $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ 上有且只有一个解, 其中 $h = \max \{a, \frac{b}{M}\}, M = \max_R |f(x, y)|$.

一阶拟线性 PDE 初值问题的局部经典解

定解问题: 给定平面曲线 $C: x = X(s), y = Y(s)$ (参数 $s \in I$) 上函数 u 的取值 $Z(s)$, 求 $u(x, y)$ 使得

$$(\clubsuit) \quad \begin{cases} a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u), \\ u(X(s), Y(s)) = Z(s), \end{cases} \quad s \in I.$$

第一步: 求解特征线族 $x = x(t, s), y = y(t, s), z = z(t, s)$:

$$\text{含参变量的非线性 ODE 初值问题: } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y, z), & \frac{dy}{dt} = b(x, y, z), & \frac{dz}{dt} = c(x, y, z), \\ x(0, s) = X(s), & y(0, s) = Y(s), & z(0, s) = Z(s). \end{cases}$$

第二步: 用反函数定理, 由特征线族来编织曲面. 从 $x = x(t, s), y = y(t, s)$ 反解出 $t = t(x, y), s = s(x, y)$, 得到 $u(x, y) \doteq z(t(x, y), s(x, y))$.

充分条件 (在曲线 C 附近, 即 $t \sim 0$ 时): Jacobi 行列式 $J \doteq \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t}(0, s) & \frac{\partial x}{\partial s}(0, s) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(0, s) & \frac{\partial y}{\partial s}(0, s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a(X(s), Y(s), Z(s)) & X'(s) \\ b(X(s), Y(s), Z(s)) & Y'(s) \end{vmatrix} \neq 0$ 时可以实现.

注意 说明 $u \in C^1$: 根据链式法则, 要求 $z \in C^1, t, s \in C^1$ 即可. 前者由 ODE 初值问题的解对参数的连续可微性定理保证, 后者在 $J \neq 0$ 时由隐函数定理保证.

定理 (存在唯一性)

设 $a, b, c \in C^1, X, Y, Z \in C^1(I)$. (i) 当 $J \neq 0$ 时, $(\clubsuit)$ 在初值曲线 C 的一个邻域内有且只有一个经典解; (ii) 当 $J = 0$ 时, $(\clubsuit)$ 可能无解 (例如 u 不能表示为函数图像), 也可能有无穷多个解 (例如 C 本身是一条特征线时).

一阶拟线性 PDE 初值问题的局部经典解

定解问题: 给定平面曲线 $C: x = X(s), y = Y(s)$ (参数 $s \in I$) 上函数 u 的取值 $Z(s)$, 求 $u(x, y)$ 使得

$$(\clubsuit) \quad \begin{cases} a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u), \\ u(X(s), Y(s)) = Z(s), \end{cases} \quad s \in I.$$

第一步: 求解特征线族 $x = x(t, s), y = y(t, s), z = z(t, s)$:

$$\text{含参变量的非线性 ODE 初值问题: } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y, z), & \frac{dy}{dt} = b(x, y, z), & \frac{dz}{dt} = c(x, y, z), \\ x(0, s) = X(s), & y(0, s) = Y(s), & z(0, s) = Z(s). \end{cases}$$

第二步: 用反函数定理, 由特征线族来编织曲面. 从 $x = x(t, s), y = y(t, s)$ 反解出 $t = t(x, y), s = s(x, y)$, 得到 $u(x, y) \doteq z(t(x, y), s(x, y))$.

充分条件 (在曲线 C 附近, 即 $t \sim 0$ 时): Jacobi 行列式 $J \doteq \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t}(0, s) & \frac{\partial x}{\partial s}(0, s) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(0, s) & \frac{\partial y}{\partial s}(0, s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a(X(s), Y(s), Z(s)) & X'(s) \\ b(X(s), Y(s), Z(s)) & Y'(s) \end{vmatrix} \neq 0$ 时可以实现.

注意 说明 $u \in C^1$: 根据链式法则, 要求 $z \in C^1, t, s \in C^1$ 即可. 前者由 ODE 初值问题的解对参数的连续可微性定理保证, 后者在 $J \neq 0$ 时由隐函数定理保证.

定理 (存在唯一性)

设 $a, b, c \in C^1, X, Y, Z \in C^1(I)$. (i) 当 $J \neq 0$ 时, $(\clubsuit)$ 在初值曲线 C 的一个邻域内有且只有一个经典解; (ii) 当 $J = 0$ 时, $(\clubsuit)$ 可能无解 (例如 u 不能表示为函数图像), 也可能有无穷多个解 (例如 C 本身是一条特征线时).

一阶拟线性 PDE 初值问题的局部经典解

定解问题: 给定平面曲线 $C: x = X(s), y = Y(s)$ (参数 $s \in I$) 上函数 u 的取值 $Z(s)$, 求 $u(x, y)$ 使得

$$(\clubsuit) \quad \begin{cases} a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u), \\ u(X(s), Y(s)) = Z(s), \end{cases} \quad s \in I.$$

第一步: 求解特征线族 $x = x(t, s), y = y(t, s), z = z(t, s)$:

$$\text{含参变量的非线性 ODE 初值问题: } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y, z), & \frac{dy}{dt} = b(x, y, z), & \frac{dz}{dt} = c(x, y, z), \\ x(0, s) = X(s), & y(0, s) = Y(s), & z(0, s) = Z(s). \end{cases}$$

第二步: 用反函数定理, 由特征线族来编织曲面. 从 $x = x(t, s), y = y(t, s)$ 反解出 $t = t(x, y), s = s(x, y)$, 得到 $u(x, y) \doteq z(t(x, y), s(x, y))$.

充分条件 (在曲线 C 附近, 即 $t \sim 0$ 时): Jacobi 行列式 $J \doteq \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t}(0, s) & \frac{\partial x}{\partial s}(0, s) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(0, s) & \frac{\partial y}{\partial s}(0, s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a(X(s), Y(s), Z(s)) & X'(s) \\ b(X(s), Y(s), Z(s)) & Y'(s) \end{vmatrix} \neq 0$ 时可以实现.

注意

说明 $u \in C^1$: 根据链式法则, 要求 $z \in C^1, t, s \in C^1$ 即可. 前者由 ODE 初值问题的解对参数的连续可微性定理保证, 后者在 $J \neq 0$ 时由隐函数定理保证.

定理 (存在唯一性)

设 $a, b, c \in C^1, X, Y, Z \in C^1(I)$. (i) 当 $J \neq 0$ 时, $(\clubsuit)$ 在初值曲线 C 的一个邻域内有且只有一个经典解; (ii) 当 $J = 0$ 时, $(\clubsuit)$ 可能无解 (例如 u 不能表示为函数图像), 也可能有无穷多个解 (例如 C 本身是一条特征线时).

一阶拟线性 PDE 初值问题的局部经典解

定解问题: 给定平面曲线 $C: x = X(s), y = Y(s)$ (参数 $s \in I$) 上函数 u 的取值 $Z(s)$, 求 $u(x, y)$ 使得

$$(\clubsuit) \quad \begin{cases} a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u), \\ u(X(s), Y(s)) = Z(s), \end{cases} \quad s \in I.$$

第一步: 求解特征线族 $x = x(t, s), y = y(t, s), z = z(t, s)$:

$$\text{含参变量的非线性 ODE 初值问题: } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y, z), & \frac{dy}{dt} = b(x, y, z), & \frac{dz}{dt} = c(x, y, z), \\ x(0, s) = X(s), & y(0, s) = Y(s), & z(0, s) = Z(s). \end{cases}$$

第二步: 用反函数定理, 由特征线族来编织曲面. 从 $x = x(t, s), y = y(t, s)$ 反解出 $t = t(x, y), s = s(x, y)$, 得到 $u(x, y) \doteq z(t(x, y), s(x, y))$.

充分条件 (在曲线 C 附近, 即 $t \sim 0$ 时): Jacobi 行列式 $J \doteq \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t}(0, s) & \frac{\partial x}{\partial s}(0, s) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(0, s) & \frac{\partial y}{\partial s}(0, s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a(X(s), Y(s), Z(s)) & X'(s) \\ b(X(s), Y(s), Z(s)) & Y'(s) \end{vmatrix} \neq 0$ 时可以实现.

注意

说明 $u \in C^1$: 根据链式法则, 要求 $z \in C^1, t, s \in C^1$ 即可. 前者由 ODE 初值问题的解对参数的连续可微性定理保证, 后者在 $J \neq 0$ 时由隐函数定理保证.

定理 (存在唯一性)

设 $a, b, c \in C^1, X, Y, Z \in C^1(I)$. (i) 当 $J \neq 0$ 时, $(\clubsuit)$ 在初值曲线 C 的一个邻域内有且只有一个经典解; (ii) 当 $J = 0$ 时, $(\clubsuit)$ 可能无解 (例如 u 不能表示为函数图像), 也可能有无穷多个解 (例如 C 本身是一条特征线时).

一阶拟线性 PDE 初值问题的局部经典解

定解问题: 给定平面曲线 $C: x = X(s), y = Y(s)$ (参数 $s \in I$) 上函数 u 的取值 $Z(s)$, 求 $u(x, y)$ 使得

$$(\clubsuit) \quad \begin{cases} a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u), \\ u(X(s), Y(s)) = Z(s), \end{cases} \quad s \in I.$$

第一步: 求解特征线族 $x = x(t, s), y = y(t, s), z = z(t, s)$:

$$\text{含参变量的非线性 ODE 初值问题: } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y, z), & \frac{dy}{dt} = b(x, y, z), & \frac{dz}{dt} = c(x, y, z), \\ x(0, s) = X(s), & y(0, s) = Y(s), & z(0, s) = Z(s). \end{cases}$$

第二步: 用反函数定理, 由特征线族来编织曲面. 从 $x = x(t, s), y = y(t, s)$ 反解出 $t = t(x, y), s = s(x, y)$, 得到 $u(x, y) \doteq z(t(x, y), s(x, y))$.

充分条件 (在曲线 C 附近, 即 $t \sim 0$ 时): Jacobi 行列式 $J \doteq \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t}(0, s) & \frac{\partial x}{\partial s}(0, s) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(0, s) & \frac{\partial y}{\partial s}(0, s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a(X(s), Y(s), Z(s)) & X'(s) \\ b(X(s), Y(s), Z(s)) & Y'(s) \end{vmatrix} \neq 0$ 时可以实现.

注意

说明 $u \in C^1$: 根据链式法则, 要求 $z \in C^1, t, s \in C^1$ 即可. 前者由 ODE 初值问题的解对参数的连续可微性定理保证, 后者在 $J \neq 0$ 时由隐函数定理保证.

定理 (存在唯一性)

设 $a, b, c \in C^1, X, Y, Z \in C^1(I)$. (i) 当 $J \neq 0$ 时, $(\clubsuit)$ 在初值曲线 C 的一个邻域内有且只有一个经典解; (ii) 当 $J = 0$ 时, $(\clubsuit)$ 可能无解 (例如 u 不能表示为函数图像), 也可能有无穷多个解 (例如 C 本身是一条特征线时).

复习: 常微分方程

- ODE 初值问题 (E_λ) : $\frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda)$, $y(0) = 0$.
- **解对参数的连续依赖性定理** [稳定性]: 设 f 在区域 $G: |x| \leq a, |y| \leq b, |\lambda - \lambda_0| \leq c$ 上连续, 且对变量 y 满足 Lipschitz 条件: $\exists L > 0$ 使得 $\forall (x, y_1, \lambda), (x, y_2, \lambda) \in G$, 成立 $|f(x, y_1, \lambda) - f(x, y_2, \lambda)| \leq L|y_1 - y_2|$. 记 M 是 f 在 G 中的一个上界, 令 $h \doteq \min\{a, b/M\}$, 则初值问题 (E_λ) 的解 $y = \varphi(x, \lambda)$ 在区域 $D: |x| \leq h, |\lambda - \lambda_0| \leq C$ 上连续.
- **解对参数的连续可微性定理** [稳定性]: 设 f 在区域 G 上连续, 对 y 和 λ 有连续的偏导函数, 则问题 (E_λ) 的解 $y = \varphi(x, \lambda)$ 在 D 上是连续可微的.
- 推论-解关于初值的连续可微性: 设 $f(x, y)$ 在区域 $R: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$ 上连续, 关于 y 有连续的偏导函数 $\partial f / \partial y$, 则初值问题 $\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = \eta$ 的解 $y = \varphi(x, \eta)$ 在区域 $D: |x - x_0| \leq \frac{h}{2}, |\eta - y_0| \leq \frac{b}{2}$ 上连续可微.

特别的, 只要 $X(s), Y(s), Z(s) \in C^1(I)$, 由上述推论和复合函数, 设 $a, b, c \in C^1$, 则

含参变量的非线性 ODE 初值问题:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y, z), & \frac{dy}{dt} = b(x, y, z), & \frac{dz}{dt} = c(x, y, z), \\ x(0, s) = X(s), & y(0, s) = Y(s), & z(0, s) = Z(s) \end{cases}$$
 的解 $x = x(t, s), y = y(t, s), z = z(t, s) \in C^1$.

参考: 丁同仁, 李承治: 常微分方程教程, 高等教育出版社, 1991. 第五章第 3, 4 节.

复习: 隐函数定理

- **隐函数定理:** 设 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 是 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 的一个邻域. 设 f 及 $\partial f / \partial y$ 在 $U \times V$ 内连续, 而且 $f(x_0, y_0) = 0$, $\det[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)] \neq 0$, 则存在 (x_0, y_0) 的一个邻域 $U_0 \times V_0 \subset U \times V$ 以及唯一的连续函数 $\varphi: U_0 \rightarrow V_0$, 满足 $\forall x \in U_0, f(x, \varphi(x)) = 0, \varphi(x_0) = y_0$. 进一步, 如果 $f \in C^k(U \times V)$, ($k \geq 1$), 那么 $\varphi \in C^k(U_0)$; 如果 f 在 (x_0, y_0) 的邻域内解析, 那么 φ 也在 x_0 的邻域内解析 (可展开为收敛的幂级数).
- **推论-反函数定理:** 设 $1 \leq k \leq \infty, f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 在 $p \in U$ 的一个邻域内是 C^k 的, 而且 $\det Df(p) \neq 0$, 则存在 p 的邻域 $V(p)$ 和 $f(p)$ 的邻域 $W(p)$, 使得 $f^{-1}: W(p) \rightarrow V(p)$ 存在且是 C^k 的.

局部微分同胚, 定义微分流形的基础.

- 参考: Eberhard Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications, I, Fixed-Point Theorems. Springer, 1988. (Theorem 4.B; Corollary 4.23.)

华东师大《数学分析》第四版下册第十八章.

交通流

实际问题: 考虑一条很长的中间无进口和出口的单行道 (不允许超车), 研究其车流通行状况. 何时何地何事?

- **何时何地** — 物理空间的坐标系 (自变量): $t > 0$ -时间; $x \in [0, L]$ -公路上某点与进口的距离 (公路的长度设为 L)
- **何事** — 相空间 (状态空间, 未知量):
 - 交通密度 $\rho(x, t)$ -在 t 时刻, 公路 x 处单位长度路面上车辆数 (例如可定义为该点前后 200 米范围内公路上的车辆数. 具体操作时的要点—宏观小, 微观大); (空间变化角度)
 - 交通流量 $q(x, t)$ -在 x 处, t 时刻单位时间内 (如每 10 分钟) 通过的车辆数; (时间变化角度)
 - 车流速度 $v(x, t) = q(x, t)/\rho(x, t)$ -刻画车辆行驶快慢 (时空耦合角度)
- 状态量之间的依赖关系 – 物理规律 (车辆数守恒): 对任意区间 $(a, b) \subset [0, L]$, 在 dt 时间内车辆的增加数等于 dt 时间内进入车辆数减去离开车辆数 (考验对微元法和微分概念的准确理解)

$$d\left(\int_a^b \rho(x, t) dx\right) = (q(a, t) - q(b, t)) dt \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) dx \Rightarrow \int_a^b (\partial_t \rho(x, t) + \partial_x q(x, t)) dx = 0$$

由 (a, b) 的任意性, 假设 $\rho, q \in C^1$, 得到微分方程 $\partial_t \rho(x, t) + \partial_x q(x, t) = 0$. (为什么一个在任意区间上积分都是零的连续函数只能是零函数?)

- 状态量之间的依赖关系 – 状态方程: $v = v(\rho)$, 且 $v'(\rho) \leq 0 \Rightarrow$ 交通流方程 $\partial_t \rho + \partial_x (v(\rho)\rho) = 0$. 例:

$$v(\rho) = v_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right) \quad (v_{\max}\text{-限速}; \rho_{\max}\text{-车距限制导致的最大允许交通密度})$$

交通流

实际问题: 考虑一条很长的中间无进口和出口的单行道 (不允许超车), 研究其车流通行状况. 何时何地何事?

- **何时何地** — 物理空间的坐标系 (自变量): $t > 0$ -时间; $x \in [0, L]$ -公路上某点与进口的距离 (公路的长度设为 L)
- **何事** — 相空间 (状态空间, 未知量):
 - 交通密度 $\rho(x, t)$ - 在 t 时刻, 公路 x 处单位长度路面上车辆数 (例如可定义为该点前后 200 米范围内公路上的车辆数. 具体操作时的要点—宏观小, 微观大); (空间变化角度)
 - 交通流量 $q(x, t)$ - 在 x 处, t 时刻单位时间内 (如每 10 分钟) 通过的车辆数; (时间变化角度)
 - 车流速度 $v(x, t) = q(x, t)/\rho(x, t)$ - 刻画车辆行驶快慢 (时空耦合角度)
- 状态量之间的依赖关系 – 物理规律 (车辆数守恒): 对任意区间 $(a, b) \subset [0, L]$, 在 dt 时间内车辆的增加数等于 dt 时间内进入车辆数减去离开车辆数 (考验对微元法和微分概念的准确理解)

$$d\left(\int_a^b \rho(x, t) dx\right) = (q(a, t) - q(b, t)) dt \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) dx \Rightarrow \int_a^b (\partial_t \rho(x, t) + \partial_x q(x, t)) dx = 0$$

由 (a, b) 的任意性, 假设 $\rho, q \in C^1$, 得到微分方程 $\partial_t \rho(x, t) + \partial_x q(x, t) = 0$. (为什么一个在任意区间上积分都是零的连续函数只能是零函数?)

- 状态量之间的依赖关系 – 状态方程: $v = v(\rho)$, 且 $v'(\rho) \leq 0 \Rightarrow$ 交通流方程 $\partial_t \rho + \partial_x (v(\rho)\rho) = 0$. 例:

$$v(\rho) = v_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right) \quad (v_{\max}\text{-限速}; \rho_{\max}\text{-车距限制导致的最大允许交通密度})$$

交通流

实际问题: 考虑一条很长的中间无进口和出口的单行道 (不允许超车), 研究其车流通行状况. 何时何地何事?

- **何时何地** — 物理空间的坐标系 (自变量): $t > 0$ -时间; $x \in [0, L]$ -公路上某点与进口的距离 (公路的长度设为 L)
- **何事** — 相空间 (状态空间, 未知量):
 - **交通密度** $\rho(x, t)$ - 在 t 时刻, 公路 x 处单位长度路面上车辆数 (例如可定义为该点前后 200 米范围内公路上的车辆数. 具体操作时的要点—宏观小, 微观大); (空间变化角度)
 - **交通流量** $q(x, t)$ - 在 x 处, t 时刻单位时间内 (如每 10 分钟) 通过的车辆数; (时间变化角度)
 - **车流速度** $v(x, t) = q(x, t)/\rho(x, t)$ - 刻画车辆行驶快慢 (时空耦合角度)
- **状态量之间的依赖关系 – 物理规律 (车辆数守恒):** 对任意区间 $(a, b) \subset [0, L]$, 在 dt 时间内车辆的增加数等于 dt 时间内进入车辆数减去离开车辆数 (考验对微元法和微分概念的准确理解)

$$d\left(\int_a^b \rho(x, t) dx\right) = (q(a, t) - q(b, t)) dt \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) dx \Rightarrow \int_a^b (\partial_t \rho(x, t) + \partial_x q(x, t)) dx = 0$$

由 (a, b) 的任意性, 假设 $\rho, q \in C^1$, 得到微分方程 $\partial_t \rho(x, t) + \partial_x q(x, t) = 0$. (为什么一个在任意区间上积分都是零的连续函数只能是零函数?)

- **状态量之间的依赖关系 – 状态方程:** $v = v(\rho)$, 且 $v'(\rho) \leq 0 \Rightarrow$ 交通流方程 $\partial_t \rho + \partial_x (v(\rho)\rho) = 0$. 例:

$$v(\rho) = v_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right) \quad (v_{\max}\text{-限速}; \rho_{\max}\text{-车距限制导致的最大允许交通密度})$$

交通流

实际问题: 考虑一条很长的中间无进口和出口的单行道 (不允许超车), 研究其车流通行状况. 何时何地何事?

- **何时何地** — 物理空间的坐标系 (自变量): $t > 0$ -时间; $x \in [0, L]$ -公路上某点与进口的距离 (公路的长度设为 L)
- **何事** — 相空间 (状态空间, 未知量):
 - **交通密度** $\rho(x, t)$ - 在 t 时刻, 公路 x 处单位长度路面上车辆数 (例如可定义为该点前后 200 米范围内公路上的车辆数. 具体操作时的要点—宏观小, 微观大); (空间变化角度)
 - **交通流量** $q(x, t)$ - 在 x 处, t 时刻单位时间内 (如每 10 分钟) 通过的车辆数; (时间变化角度)
 - **车流速度** $v(x, t) = q(x, t)/\rho(x, t)$ - 刻画车辆行驶快慢 (时空耦合角度)
- **状态量之间的依赖关系 – 物理规律 (车辆数守恒):** 对任意区间 $(a, b) \subset [0, L]$, 在 dt 时间内车辆的增加数等于 dt 时间内进入车辆数减去离开车辆数 (考验对微元法和微分概念的准确理解)

$$d\left(\int_a^b \rho(x, t) dx\right) = (q(a, t) - q(b, t)) dt \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) dx \Rightarrow \int_a^b (\partial_t \rho(x, t) + \partial_x q(x, t)) dx = 0$$

由 (a, b) 的任意性, 假设 $\rho, q \in C^1$, 得到微分方程 $\partial_t \rho(x, t) + \partial_x q(x, t) = 0$. (为什么一个在任意区间上积分都是零的连续函数只能是零函数?)

- **状态量之间的依赖关系 – 状态方程:** $v = v(\rho)$, 且 $v'(\rho) \leq 0 \Rightarrow$ 交通流方程 $\partial_t \rho + \partial_x (v(\rho)\rho) = 0$. 例:

$$v(\rho) = v_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right) \quad (v_{\max}\text{-限速}; \rho_{\max}\text{-车距限制导致的最大允许交通密度})$$

交通流

实际问题: 考虑一条很长的中间无进口和出口的单行道 (不允许超车), 研究其车流通行状况. 何时何地何事?

- **何时何地** — 物理空间的坐标系 (自变量): $t > 0$ -时间; $x \in [0, L]$ -公路上某点与进口的距离 (公路的长度设为 L)
- **何事** — 相空间 (状态空间, 未知量):
 - **交通密度** $\rho(x, t)$ -在 t 时刻, 公路 x 处单位长度路面上车辆数 (例如可定义为该点前后 200 米范围内公路上的车辆数. 具体操作时的要点—宏观小, 微观大); (空间变化角度)
 - **交通流量** $q(x, t)$ -在 x 处, t 时刻单位时间内 (如每 10 分钟) 通过的车辆数; (时间变化角度)
 - **车流速度** $v(x, t) = q(x, t)/\rho(x, t)$ -刻画车辆行驶快慢 (时空耦合角度)
- **状态量之间的依赖关系 – 物理规律 (车辆数守恒):** 对任意区间 $(a, b) \subset [0, L]$, 在 dt 时间内车辆的增加数等于 dt 时间内进入车辆数减去离开车辆数 (考验对微元法和微分概念的准确理解)

$$d\left(\int_a^b \rho(x, t) dx\right) = (q(a, t) - q(b, t)) dt \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) dx \Rightarrow \int_a^b (\partial_t \rho(x, t) + \partial_x q(x, t)) dx = 0$$

由 (a, b) 的任意性, 假设 $\rho, q \in C^1$, 得到微分方程 $\partial_t \rho(x, t) + \partial_x q(x, t) = 0$. (为什么一个在任意区间上积分都是零的连续函数只能是零函数?)

- **状态量之间的依赖关系 – 状态方程:** $v = v(\rho)$, 且 $v'(\rho) \leq 0 \Rightarrow$ 交通流方程 $\partial_t \rho + \partial_x (v(\rho)\rho) = 0$. 例:

$$v(\rho) = v_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right) \quad (v_{\max}\text{-限速}; \rho_{\max}\text{-车距限制导致的最大允许交通密度})$$

交通流

实际问题: 考虑一条很长的中间无进口和出口的单行道 (不允许超车), 研究其车流通行状况. 何时何地何事?

- **何时何地** — 物理空间的坐标系 (自变量): $t > 0$ -时间; $x \in [0, L]$ -公路上某点与进口的距离 (公路的长度设为 L)
- **何事** — 相空间 (状态空间, 未知量):
 - **交通密度** $\rho(x, t)$ -在 t 时刻, 公路 x 处单位长度路面上车辆数 (例如可定义为该点前后 200 米范围内公路上的车辆数. 具体操作时的要点—宏观小, 微观大); (空间变化角度)
 - **交通流量** $q(x, t)$ -在 x 处, t 时刻单位时间内 (如每 10 分钟) 通过的车辆数; (时间变化角度)
 - **车流速度** $v(x, t) = q(x, t)/\rho(x, t)$ -刻画车辆行驶快慢 (时空耦合角度)
- **状态量之间的依赖关系 – 物理规律 (车辆数守恒):** 对任意区间 $(a, b) \subset [0, L]$, 在 dt 时间内车辆的增加数等于 dt 时间内进入车辆数减去离开车辆数 (考验对微元法和微分概念的准确理解)

$$d\left(\int_a^b \rho(x, t) dx\right) = (q(a, t) - q(b, t)) dt \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) dx \Rightarrow \int_a^b (\partial_t \rho(x, t) + \partial_x q(x, t)) dx = 0$$

由 (a, b) 的任意性, 假设 $\rho, q \in C^1$, 得到微分方程 $\partial_t \rho(x, t) + \partial_x q(x, t) = 0$. (为什么一个在任意区间上积分都是零的连续函数只能是零函数?)

- **状态量之间的依赖关系 – 状态方程:** $v = v(\rho)$, 且 $v'(\rho) \leq 0 \Rightarrow$ 交通流方程 $\partial_t \rho + \partial_x (v(\rho)\rho) = 0$. 例:

$$v(\rho) = v_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right) \quad (v_{\max}\text{-限速}; \rho_{\max}\text{-车距限制导致的最大允许交通密度})$$

交通流

实际问题: 考虑一条很长的中间无进口和出口的单行道 (不允许超车), 研究其车流通行状况. 何时何地何事?

- **何时何地** — 物理空间的坐标系 (自变量): $t > 0$ -时间; $x \in [0, L]$ -公路上某点与进口的距离 (公路的长度设为 L)
- **何事** — 相空间 (状态空间, 未知量):
 - **交通密度** $\rho(x, t)$ -在 t 时刻, 公路 x 处单位长度路面上车辆数 (例如可定义为该点前后 200 米范围内公路上的车辆数. 具体操作时的要点—宏观小, 微观大); (空间变化角度)
 - **交通流量** $q(x, t)$ -在 x 处, t 时刻单位时间内 (如每 10 分钟) 通过的车辆数; (时间变化角度)
 - **车流速度** $v(x, t) = q(x, t)/\rho(x, t)$ -刻画车辆行驶快慢 (时空耦合角度)
- **状态量之间的依赖关系 – 物理规律 (车辆数守恒):** 对任意区间 $(a, b) \subset [0, L]$, 在 dt 时间内车辆的增加数等于 dt 时间内进入车辆数减去离开车辆数 (考验对微元法和微分概念的准确理解)

$$d\left(\int_a^b \rho(x, t) dx\right) = (q(a, t) - q(b, t)) dt \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) dx \Rightarrow \int_a^b (\partial_t \rho(x, t) + \partial_x q(x, t)) dx = 0$$

由 (a, b) 的任意性, 假设 $\rho, q \in C^1$, 得到微分方程 $\partial_t \rho(x, t) + \partial_x q(x, t) = 0$. (为什么一个在任意区间上积分都是零的连续函数只能是零函数?)

- **状态量之间的依赖关系 – 状态方程:** $v = v(\rho)$, 且 $v'(\rho) \leq 0 \Rightarrow$ 交通流方程 $\partial_t \rho + \partial_x (v(\rho)\rho) = 0$. 例:

$$v(\rho) = v_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right) \quad (v_{\max}\text{-限速}; \rho_{\max}\text{-车距限制导致的最大允许交通密度})$$

交通流

实际问题: 考虑一条很长的中间无进口和出口的单行道 (不允许超车), 研究其车流通行状况. 何时何地何事?

- **何时何地** — 物理空间的坐标系 (自变量): $t > 0$ -时间; $x \in [0, L]$ -公路上某点与进口的距离 (公路的长度设为 L)
- **何事** — 相空间 (状态空间, 未知量):
 - **交通密度** $\rho(x, t)$ -在 t 时刻, 公路 x 处单位长度路面上车辆数 (例如可定义为该点前后 200 米范围内公路上的车辆数. 具体操作时的要点—宏观小, 微观大); (空间变化角度)
 - **交通流量** $q(x, t)$ -在 x 处, t 时刻单位时间内 (如每 10 分钟) 通过的车辆数; (时间变化角度)
 - **车流速度** $v(x, t) = q(x, t)/\rho(x, t)$ -刻画车辆行驶快慢 (时空耦合角度)
- **状态量之间的依赖关系 – 物理规律 (车辆数守恒):** 对任意区间 $(a, b) \subset [0, L]$, 在 dt 时间内车辆的增加数等于 dt 时间内进入车辆数减去离开车辆数 (考验对微元法和微分概念的准确理解)

$$d\left(\int_a^b \rho(x, t) dx\right) = (q(a, t) - q(b, t)) dt \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) dx \Rightarrow \int_a^b (\partial_t \rho(x, t) + \partial_x q(x, t)) dx = 0$$

由 (a, b) 的任意性, 假设 $\rho, q \in C^1$, 得到微分方程 $\partial_t \rho(x, t) + \partial_x q(x, t) = 0$. (为什么一个在任意区间上积分都是零的连续函数只能是零函数?)

- **状态量之间的依赖关系 – 状态方程:** $v = v(\rho)$, 且 $v'(\rho) \leq 0 \Rightarrow$ 交通流方程 $\partial_t \rho + \partial_x (v(\rho)\rho) = 0$. 例:

$$v(\rho) = v_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right) \quad (v_{\max}\text{-限速}; \rho_{\max}\text{-车距限制导致的最大允许交通密度})$$

交通流

实际问题: 考虑一条很长的中间无进口和出口的单行道 (不允许超车), 研究其车流通行状况. 何时何地何事?

- **何时何地** — 物理空间的坐标系 (自变量): $t > 0$ -时间; $x \in [0, L]$ -公路上某点与进口的距离 (公路的长度设为 L)
- **何事** — 相空间 (状态空间, 未知量):
 - **交通密度** $\rho(x, t)$ -在 t 时刻, 公路 x 处单位长度路面上车辆数 (例如可定义为该点前后 200 米范围内公路上的车辆数. 具体操作时的要点—宏观小, 微观大); (空间变化角度)
 - **交通流量** $q(x, t)$ -在 x 处, t 时刻单位时间内 (如每 10 分钟) 通过的车辆数; (时间变化角度)
 - **车流速度** $v(x, t) = q(x, t)/\rho(x, t)$ -刻画车辆行驶快慢 (时空耦合角度)
- **状态量之间的依赖关系 – 物理规律 (车辆数守恒):** 对任意区间 $(a, b) \subset [0, L]$, 在 dt 时间内车辆的增加数等于 dt 时间内进入车辆数减去离开车辆数 (考验对微元法和微分概念的准确理解)

$$d\left(\int_a^b \rho(x, t) dx\right) = (q(a, t) - q(b, t)) dt \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) dx \Rightarrow \int_a^b (\partial_t \rho(x, t) + \partial_x q(x, t)) dx = 0$$

由 (a, b) 的任意性, 假设 $\rho, q \in C^1$, 得到微分方程 $\partial_t \rho(x, t) + \partial_x q(x, t) = 0$. (为什么一个在任意区间上积分都是零的连续函数只能是零函数?)

- **状态量之间的依赖关系 – 状态方程:** $v = v(\rho)$, 且 $v'(\rho) \leq 0 \Rightarrow$ 交通流方程 $\partial_t \rho + \partial_x (v(\rho)\rho) = 0$. 例:

$$v(\rho) = v_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right) \quad (v_{\max}\text{-限速}; \rho_{\max}\text{-车距限制导致的最大允许交通密度})$$

交通流

实际问题: 考虑一条很长的中间无进口和出口的单行道 (不允许超车), 研究其车流通行状况. 何时何地何事?

- **何时何地** — 物理空间的坐标系 (自变量): $t > 0$ -时间; $x \in [0, L]$ -公路上某点与进口的距离 (公路的长度设为 L)
- **何事** — 相空间 (状态空间, 未知量):
 - **交通密度** $\rho(x, t)$ -在 t 时刻, 公路 x 处单位长度路面上车辆数 (例如可定义为该点前后 200 米范围内公路上的车辆数. 具体操作时的要点—宏观小, 微观大); (空间变化角度)
 - **交通流量** $q(x, t)$ -在 x 处, t 时刻单位时间内 (如每 10 分钟) 通过的车辆数; (时间变化角度)
 - **车流速度** $v(x, t) = q(x, t)/\rho(x, t)$ -刻画车辆行驶快慢 (时空耦合角度)
- **状态量之间的依赖关系 – 物理规律 (车辆数守恒):** 对任意区间 $(a, b) \subset [0, L]$, 在 dt 时间内车辆的增加数等于 dt 时间内进入车辆数减去离开车辆数 (考验对微元法和微分概念的准确理解)

$$d\left(\int_a^b \rho(x, t) dx\right) = (q(a, t) - q(b, t)) dt \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) dx \Rightarrow \int_a^b (\partial_t \rho(x, t) + \partial_x q(x, t)) dx = 0$$

由 (a, b) 的任意性, 假设 $\rho, q \in C^1$, 得到微分方程 $\partial_t \rho(x, t) + \partial_x q(x, t) = 0$. (为什么一个在任意区间上积分都是零的连续函数只能是零函数?)

- **状态量之间的依赖关系 – 状态方程:** $v = v(\rho)$, 且 $v'(\rho) \leq 0 \Rightarrow$ 交通流方程 $\partial_t \rho + \partial_x (v(\rho)\rho) = 0$. 例:

$$v(\rho) = v_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right) \quad (v_{\max}\text{-限速}; \rho_{\max}\text{-车距限制导致的最大允许交通密度})$$

交通流

实际问题: 考虑一条很长的中间无进口和出口的单行道 (不允许超车), 研究其车流通行状况. 何时何地何事?

- **何时何地** — 物理空间的坐标系 (自变量): $t > 0$ -时间; $x \in [0, L]$ -公路上某点与进口的距离 (公路的长度设为 L)
- **何事** — 相空间 (状态空间, 未知量):
 - **交通密度** $\rho(x, t)$ -在 t 时刻, 公路 x 处单位长度路面上车辆数 (例如可定义为该点前后 200 米范围内公路上的车辆数. 具体操作时的要点—宏观小, 微观大); (空间变化角度)
 - **交通流量** $q(x, t)$ -在 x 处, t 时刻单位时间内 (如每 10 分钟) 通过的车辆数; (时间变化角度)
 - **车流速度** $v(x, t) = q(x, t)/\rho(x, t)$ -刻画车辆行驶快慢 (时空耦合角度)
- **状态量之间的依赖关系 – 物理规律 (车辆数守恒):** 对任意区间 $(a, b) \subset [0, L]$, 在 dt 时间内车辆的增加数等于 dt 时间内进入车辆数减去离开车辆数 (考验对微元法和微分概念的准确理解)

$$d\left(\int_a^b \rho(x, t) dx\right) = (q(a, t) - q(b, t)) dt \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) dx \Rightarrow \int_a^b (\partial_t \rho(x, t) + \partial_x q(x, t)) dx = 0$$

由 (a, b) 的任意性, 假设 $\rho, q \in C^1$, 得到微分方程 $\partial_t \rho(x, t) + \partial_x q(x, t) = 0$. (为什么一个在任意区间上积分都是零的连续函数只能是零函数?)

- **状态量之间的依赖关系 – 状态方程:** $v = v(\rho)$, 且 $v'(\rho) \leq 0 \Rightarrow$ 交通流方程 $\partial_t \rho + \partial_x (v(\rho)\rho) = 0$. 例:

$$v(\rho) = v_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right) \quad (v_{\max}\text{-限速}; \rho_{\max}\text{-车距限制导致的最大允许交通密度})$$

$$\partial_t \rho + \partial_x (v(\rho)\rho) = 0.$$

- 例: $v(\rho) = v_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)$ ($v_{\max}$ -限速; $\rho_{\max}$ -车距限制导致的最大允许交通密度; l -单辆车的平均长度)

- 无量纲化: $x' = x/l, t' = t/(l/v_{\max}), \rho' = \frac{\rho}{\rho_{\max}}, v' = \frac{v}{v_{\max}} \Rightarrow$

$$\partial_{t'} \rho' + \partial_{x'} ((1 - \rho')\rho') = 0 \Rightarrow \rho'_{t'} + (1 - 2\rho')\rho'_{x'} = 0$$

- 特征线方程: $\frac{dx'}{dt'} = 1 - 2\rho', \frac{d\rho'}{dt'} = 0 (\Rightarrow)$ 沿着特征线 $x' = x'(t'), \rho'$ 不变.
- 信息 (车流密度) 沿特征线 $x' = x(t')$ 传播, 注意车辆速度为 $v' = 1 - \rho'$, 特征速度 $\lambda \doteq 1 - 2\rho' < v'$, 即信息向车辆后方传播 (重要!! 交通流模型合理性的基本要求, 与波动方程或可压缩 Euler 方程组不同) 初学者特别注意区分两种不同速度及其意义.
- 红灯变绿灯后的交通流: Riemann 问题及其疏散波解 (为简单起见, 这里把 x' 写作 x, t' 写作 t, ρ' 写作 ρ)
* 初值: $t = 0, x < 0$ 时 $\rho = 1$; $t = 0, x > 0$ 时 $\rho = 0$. [注意: 建模过程中假设未知函数都很光滑, 但实际问题中是未必的; 所以如何从数学角度研究模型的适用范围, 即推广解的定义, 是重要的课题!]

$$* \text{证明解为 } \rho(x, t) = \begin{cases} 1, & x < -t, \\ \frac{1}{2}(1 - \frac{x}{t}), & -t \leq x \leq t, \\ 0, & x > t. \end{cases}$$

- 习题: 对一般情形, 验证是否成立特征速度小于车辆速度? 思考题: 如何从数学角度 (例如用什么函数或指标) 刻画“交通拥堵”?

$$\partial_t \rho + \partial_x (v(\rho)\rho) = 0.$$

- 例: $v(\rho) = v_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)$ ($v_{\max}$ -限速; $\rho_{\max}$ -车距限制导致的最大允许交通密度; l -单辆车的平均长度)

- 无量纲化: $x' = x/l, t' = t/(l/v_{\max}), \rho' = \frac{\rho}{\rho_{\max}}, v' = \frac{v}{v_{\max}} \Rightarrow$

$$\partial_{t'} \rho' + \partial_{x'} ((1 - \rho')\rho') = 0 \Rightarrow \rho'_{t'} + (1 - 2\rho')\rho'_{x'} = 0$$

- 特征线方程: $\frac{dx'}{dt'} = 1 - 2\rho', \frac{d\rho'}{dt'} = 0 (\Rightarrow)$ 沿着特征线 $x' = x'(t'), \rho'$ 不变.

- 信息 (车流密度) 沿特征线 $x' = x(t')$ 传播, 注意车辆速度为 $v' = 1 - \rho'$, 特征速度 $\lambda \doteq 1 - 2\rho' < v'$, 即信息向车辆后方传播 (重要!! 交通流模型合理性的基本要求, 与波动方程或可压缩 Euler 方程组不同) 初学者特别注意区分两种不同速度及其意义.

- 红灯变绿灯后的交通流: Riemann 问题及其疏散波解 (为简单起见, 这里把 x' 写作 x, t' 写作 t, ρ' 写作 ρ)

* 初值: $t = 0, x < 0$ 时 $\rho = 1$; $t = 0, x > 0$ 时 $\rho = 0$. [注意: 建模过程中假设未知函数都很光滑, 但实际问题中是未必的; 所以如何从数学角度研究模型的适用范围, 即推广解的定义, 是重要的课题!]

$$* \text{ 证明解为 } \rho(x, t) = \begin{cases} 1, & x < -t, \\ \frac{1}{2}(1 - \frac{x}{t}), & -t \leq x \leq t, \\ 0, & x > t. \end{cases}$$

- 习题: 对一般情形, 验证是否成立特征速度小于车辆速度? 思考题: 如何从数学角度 (例如用什么函数或指标) 刻画“交通拥堵”?

$$\partial_t \rho + \partial_x (v(\rho) \rho) = 0.$$

- 例: $v(\rho) = v_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)$ ($v_{\max}$ -限速; $\rho_{\max}$ -车距限制导致的最大允许交通密度; l -单辆车的平均长度)
- 无量纲化: $x' = x/l, t' = t/(l/v_{\max}), \rho' = \frac{\rho}{\rho_{\max}}, v' = \frac{v}{v_{\max}} \Rightarrow$
 $\partial_{t'} \rho' + \partial_{x'} ((1 - \rho') \rho') = 0 \Rightarrow \rho'_{t'} + (1 - 2\rho') \rho'_{x'} = 0$
- 特征线方程: $\frac{dx'}{dt'} = 1 - 2\rho', \frac{d\rho'}{dt'} = 0 (\Rightarrow)$ 沿着特征线 $x' = x'(t'), \rho'$ 不变.
- 信息 (车流密度) 沿特征线 $x' = x'(t')$ 传播, 注意车辆速度为 $v' = 1 - \rho'$, 特征速度 $\lambda \doteq 1 - 2\rho' < v'$, 即信息向车辆后方传播 (重要!! 交通流模型合理性的基本要求, 与波动方程或可压缩 Euler 方程组不同) 初学者特别注意区分两种不同速度及其意义.
- 红灯变绿灯后的交通流: Riemann 问题及其疏散波解 (为简单起见, 这里把 x' 写作 x, t' 写作 t, ρ' 写作 ρ)
* 初值: $t = 0, x < 0$ 时 $\rho = 1$; $t = 0, x > 0$ 时 $\rho = 0$. [注意: 建模过程中假设未知函数都很光滑, 但实际问题中是未必的; 所以如何从数学角度研究模型的适用范围, 即推广解的定义, 是重要的课题!]
* 证明解为 $\rho(x, t) = \begin{cases} 1, & x < -t, \\ \frac{1}{2}(1 - \frac{x}{t}), & -t \leq x \leq t, \\ 0, & x > t. \end{cases}$
- 习题: 对一般情形, 验证是否成立特征速度小于车辆速度? 思考题: 如何从数学角度 (例如用什么函数或指标) 刻画“交通拥堵”?

$$\partial_t \rho + \partial_x (v(\rho) \rho) = 0.$$

- 例: $v(\rho) = v_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)$ ($v_{\max}$ -限速; $\rho_{\max}$ -车距限制导致的最大允许交通密度; l -单辆车的平均长度)
- 无量纲化: $x' = x/l, t' = t/(l/v_{\max}), \rho' = \frac{\rho}{\rho_{\max}}, v' = \frac{v}{v_{\max}} \Rightarrow$

$$\partial_{t'} \rho' + \partial_{x'} ((1 - \rho') \rho') = 0 \Rightarrow \rho'_{t'} + (1 - 2\rho') \rho'_{x'} = 0$$
- 特征线方程: $\frac{dx'}{dt'} = 1 - 2\rho', \frac{d\rho'}{dt'} = 0 (\Rightarrow)$ 沿着特征线 $x' = x'(t'), \rho'$ 不变.
- 信息 (车流密度) 沿特征线 $x' = x(t')$ 传播, 注意车辆速度为 $v' = 1 - \rho'$, 特征速度 $\lambda \doteq 1 - 2\rho' < v'$, 即信息向车辆后方传播 (重要!! 交通流模型合理性的基本要求, 与波动方程或可压缩 Euler 方程组不同) 初学者特别注意区分两种不同速度及其意义.
- 红灯变绿灯后的交通流: Riemann 问题及其疏散波解 (为简单起见, 这里把 x' 写作 x, t' 写作 t, ρ' 写作 ρ)
 * 初值: $t = 0, x < 0$ 时 $\rho = 1$; $t = 0, x > 0$ 时 $\rho = 0$. [注意: 建模过程中假设未知函数都很光滑, 但实际问题中是未必的; 所以如何从数学角度研究模型的适用范围, 即推广解的定义, 是重要的课题!]

$$* \text{ 证明解为 } \rho(x, t) = \begin{cases} 1, & x < -t, \\ \frac{1}{2}(1 - \frac{x}{t}), & -t \leq x \leq t, \\ 0, & x > t. \end{cases}$$

- 习题: 对一般情形, 验证是否成立特征速度小于车辆速度? 思考题: 如何从数学角度 (例如用什么函数或指标) 刻画“交通拥堵”?

$$\partial_t \rho + \partial_x (v(\rho) \rho) = 0.$$

- 例: $v(\rho) = v_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)$ ($v_{\max}$ -限速; $\rho_{\max}$ -车距限制导致的最大允许交通密度; l -单辆车的平均长度)
- 无量纲化: $x' = x/l, t' = t/(l/v_{\max}), \rho' = \frac{\rho}{\rho_{\max}}, v' = \frac{v}{v_{\max}} \Rightarrow$

$$\partial_{t'} \rho' + \partial_{x'} ((1 - \rho') \rho') = 0 \Rightarrow \rho'_{t'} + (1 - 2\rho') \rho'_{x'} = 0$$
- 特征线方程: $\frac{dx'}{dt'} = 1 - 2\rho', \frac{d\rho'}{dt'} = 0 (\Rightarrow)$ 沿着特征线 $x' = x'(t'), \rho'$ 不变.
- 信息 (车流密度) 沿特征线 $x' = x'(t')$ 传播, 注意车辆速度为 $v' = 1 - \rho'$, 特征速度 $\lambda \doteq 1 - 2\rho' < v'$, 即信息向车辆后方传播 (重要!! 交通流模型合理性的基本要求, 与波动方程或可压缩 Euler 方程组不同) 初学者特别注意区分两种不同速度及其意义.
- 红灯变绿灯后的交通流: Riemann 问题及其疏散波解 (为简单起见, 这里把 x' 写作 x, t' 写作 t, ρ' 写作 ρ)
 * 初值: $t = 0, x < 0$ 时 $\rho = 1$; $t = 0, x > 0$ 时 $\rho = 0$. [注意: 建模过程中假设未知函数都很光滑, 但实际问题中是未必的; 所以如何从数学角度研究模型的适用范围, 即推广解的定义, 是重要的课题!]

$$* \text{ 证明解为 } \rho(x, t) = \begin{cases} 1, & x < -t, \\ \frac{1}{2}(1 - \frac{x}{t}), & -t \leq x \leq t, \\ 0, & x > t. \end{cases}$$

- 习题: 对一般情形, 验证是否成立特征速度小于车辆速度? 思考题: 如何从数学角度 (例如用什么函数或指标) 刻画“交通拥堵”?

$$\partial_t \rho + \partial_x (v(\rho) \rho) = 0.$$

- 例: $v(\rho) = v_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)$ ($v_{\max}$ -限速; $\rho_{\max}$ -车距限制导致的最大允许交通密度; l -单辆车的平均长度)
- 无量纲化: $x' = x/l, t' = t/(l/v_{\max}), \rho' = \frac{\rho}{\rho_{\max}}, v' = \frac{v}{v_{\max}} \Rightarrow$
 $\partial_{t'} \rho' + \partial_{x'} ((1 - \rho') \rho') = 0 \Rightarrow \rho'_{t'} + (1 - 2\rho') \rho'_{x'} = 0$
- 特征线方程: $\frac{dx'}{dt'} = 1 - 2\rho', \frac{d\rho'}{dt'} = 0 (\Rightarrow)$ 沿着特征线 $x' = x'(t'), \rho'$ 不变.
- 信息 (车流密度) 沿特征线 $x' = x'(t')$ 传播, 注意车辆速度为 $v' = 1 - \rho'$, 特征速度 $\lambda \doteq 1 - 2\rho' < v'$, 即信息向车辆后方传播 (重要!! 交通流模型合理性的基本要求, 与波动方程或可压缩 Euler 方程组不同) 初学者特别注意区分两种不同速度及其意义.
- 红灯变绿灯后的交通流: Riemann 问题及其疏散波解 (为简单起见, 这里把 x' 写作 x, t' 写作 t, ρ' 写作 ρ)
* 初值: $t = 0, x < 0$ 时 $\rho = 1$; $t = 0, x > 0$ 时 $\rho = 0$. [注意: 建模过程中假设未知函数都很光滑, 但实际问题中是未必的; 所以如何从数学角度研究模型的适用范围, 即推广解的定义, 是重要的课题!]

$$* \text{ 证明解为 } \rho(x, t) = \begin{cases} 1, & x < -t, \\ \frac{1}{2}(1 - \frac{x}{t}), & -t \leq x \leq t, \\ 0, & x > t. \end{cases}$$

- 习题: 对一般情形, 验证是否成立特征速度小于车辆速度? 思考题: 如何从数学角度 (例如用什么函数或指标) 刻画“交通拥堵”?

例 1. 求解 Cauchy 问题: $uu_x + u_y = 1$, 在 $C: x = s, y = s$ 上 $u = 0$.

解: 1) 记 $z(t) = u(x(t), y(t))$, 求特征线

$$\begin{cases} x'(t) = z, y'(t) = 1, z'(t) = 1, \\ x(0, s) = s, y(0, s) = s, z(0, s) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t, s) = t + s, z(t, s) = t, x(t, s) = \frac{t^2}{2} + s.$$

2) 由 $x(t, s) = \frac{t^2}{2} + s, y(t, s) = t + s$ 反解得 $t = 1 \pm \sqrt{1 + 2(x - y)}$, 从而得到 $u(x, y) = 1 \pm \sqrt{1 + 2(x - y)}$.

3) 用初始条件 $u(s, s) = 0$ 得到所要的解 $u(x, y) = 1 - \sqrt{1 + 2(x - y)}$. □

例 2. 求解 *Cauchy* 问题: $uu_x + u_y = 1$, 使得曲线 $C: x = s^2/2, y = s, z = s$ 在函数 u 确定的图像上.

解: 1). 解得特征线族为

$$x(t, s) = \frac{(s+t)^2}{2}, \quad y(t, s) = t+s, \quad z(t, s) = t+s.$$

2). 由此发现成立如下三个表达式: i) $u(x, y) = y$, ii) $u(x, y) = \pm\sqrt{2x}$. 可验证它们确实是解.

3). 注意 C 本身就是特征线. □

思考: 如何构造无限个解? (提示: 过 C 上一点尝试作无数条曲线, 它们都不是特征线. 以它们为初值曲线求解初值问题.)

例 3. 求解 *Cauchy* 问题: $u_x + u_y = u$, $C : x = s, y = s, z = 1$.

解: 解得特征线族为 $x(t, s) = s + t$, $y(t, s) = t + s$, $z(t, s) = e^t$. 它们织成的曲面为 $x = y$, 不能写作 $z = u(x, y)$ 的形式, 从而无 (经典) 解. □

例 4. 求解初值问题 $\sqrt{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u|_{z=1} = xy$.

解: 投影到 (x, y, z) -空间的特征线方程为

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dz}{z},$$

解得首次积分 $\sqrt{x} - \sqrt{y} = C_1$, $2\sqrt{y} - \ln z = C_2$. 由于上述方程是齐次的, u 沿特征线取值不变:

$$u(x(z), y(z), z) = u(x(1), y(1), 1) = x(1)y(1),$$

而 $z = 1$ 时解得 $y(1) = C_2^2/4$, $x(1) = (C_1 + \frac{C_2}{2})^2$, 从而

$$u(x(z), y(z), z) = \frac{C_2^2}{4}(C_1 + \frac{C_2}{2})^2 = \left(\sqrt{y} - \frac{\ln z}{2}\right)^2 \left(\sqrt{x} - \frac{\ln z}{2}\right)^2,$$

于是所求解为

$$u(x, y, z) = \left(\sqrt{y} - \frac{\ln z}{2}\right)^2 \left(\sqrt{x} - \frac{\ln z}{2}\right)^2.$$

思考 — 1) 为什么会一般理论, 却不会很好地解决具体题目? 因为缺少适用于解具体问题的技巧; 2) 琢磨上述例子, 学习具体的技巧; 3) 用上述方法得到解的表达式后需要验证它是解.

例 4. 求解初值问题 $\sqrt{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u|_{z=1} = xy$.

解: 投影到 (x, y, z) -空间的特征线方程为

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dz}{z},$$

解得首次积分 $\sqrt{x} - \sqrt{y} = C_1$, $2\sqrt{y} - \ln z = C_2$. 由于上述方程是齐次的, u 沿特征线取值不变:

$$u(x(z), y(z), z) = u(x(1), y(1), 1) = x(1)y(1),$$

而 $z = 1$ 时解得 $y(1) = C_2^2/4$, $x(1) = (C_1 + \frac{C_2}{2})^2$, 从而

$$u(x(z), y(z), z) = \frac{C_2^2}{4}(C_1 + \frac{C_2}{2})^2 = \left(\sqrt{y} - \frac{\ln z}{2}\right)^2 \left(\sqrt{x} - \frac{\ln z}{2}\right)^2,$$

于是所求解为

$$u(x, y, z) = \left(\sqrt{y} - \frac{\ln z}{2}\right)^2 \left(\sqrt{x} - \frac{\ln z}{2}\right)^2.$$

思考 — 1) 为什么会一般理论, 却不会很好地解决具体题目? 因为缺少适用于解具体问题的技巧; 2) 琢磨上述例子, 学习具体的技巧; 3) 用上述方法得到解的表达式后需要验证它是解.

例 5. 求解初值问题 $xu_y - yu_x = u$, $u|_{y=0} = \theta(x)$.

解: 求解特征线方程

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z} = dt,$$

其中 $z(t) = u(x(t), y(t))$, 得到 $x^2 + y^2 = C_1^2$, 从而

$$x(t) = C_1 \cos t, \quad y(t) = C_1 \sin t, \quad z(t) = C_2 e^t.$$

注意到 $u(x(0), y(0)) = u(x(0), 0) = \theta(x(0)) = \theta(C_1) = \theta(\pm\sqrt{x^2 + y^2})$. 又 $u(x(0), 0) = u(x(0), y(0)) = z(0) = C_2$, 于是 $C_2 = \theta(\pm\sqrt{x^2 + y^2})$, 那么 $u(x(t), y(t)) = C_2 e^t = \theta(\text{sign}(x(t))\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2})e^{\arctan \frac{y(t)}{x(t)}}$. 于是所求解为

$$u(x, y) = \theta(\text{sign}(x)\sqrt{x^2 + y^2})e^{\arctan \frac{y}{x}}.$$

这里为保证 $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 开平方处当 $x > 0$ 时取 $C_1 > 0$, $x < 0$ 时取 $C_1 < 0$.

评注: 除了解常微分方程的技巧(变换, 积分因子, 分离变量等), 一个值得注意的灵活性源于特征线的参数表示, 需要选取恰当的参数以简化运算. 思考: 上一例题中为什么可以取 z 为参数, 而这一题需要引入额外的参数 t ?

例 6. 求解初值问题 $u_t = xu_x + yu_y + u + xy$, $u|_{t=0} = \phi(x, y)$.

解: 在 (t, x, y) -空间投影的特征线方程为

$$\frac{dt}{1} = -\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y},$$

解得 $x(t) = C_1 e^{-t}$, $y(t) = C_2 e^{-t}$. 置 $z(t) = u(x(t), y(t), t)$, 那么利用方程, $\frac{dz(t)}{dt} = z(t) + x(t)y(t) = z(t) + C_1 C_2 e^{-2t}$, 从而

$$e^{-t}z(t) = z(0) + C_1 C_2 \int_0^t e^{-3s} ds = u(C_1, C_2, 0) - \frac{1}{3}C_1 C_2 (e^{-3t} - 1),$$

于是

$$u(x(t), y(t), t) = z(t) = \phi(C_1, C_2)e^t - \frac{1}{3}C_1 C_2 (e^{-2t} - e^t),$$

由此可得

$$u(x, y, t) = \phi(xe^t, ye^t)e^t - \frac{1}{3}xy(1 - e^{3t}).$$

思考题: 我们已经定义了一个偏微分方程的经典解的概念. 如何定义一个定解问题的经典解?

习题 1. 求解初值问题 (其中 a 是给定的常数)

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0, & t > 0, -\infty < x < +\infty, \\ u|_{t=0} = \phi(x). \end{cases}$$

习题 2. 考虑区域 $\{x > 0, t > 0\}$ 上的线性输运方程 $u_t + au_x = 0$, 讨论合适的定解问题的提法并求出它的解. [提示: 需分 $a > 0, a = 0, a < 0$ 的情形讨论.]

习题 3. 当 g, f 满足什么条件时, 可以使 $u(x, t) = g(x - tb) + \int_0^t f(x + sb - tb, s) \, ds$ 是初值问题

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du = f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

的解? 这里 $b \in \mathbb{R}^n$ 是常向量. 请证明你的结论. [提示: 复习如下重要公式]

定理 (含参变量积分求导公式)

设 $f(x, t)$ 和 $\partial_t f(x, t)$ 是 $[A, B] \times [c, d]$ 上的连续函数, 定义在 $[c, d]$ 上的连续可微函数 $a(t), b(t)$ 的值域在区间 $[A, B]$ 内. 定义含参变量积分 $I(t) \doteq \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) \, dx$, 则它是 $[c, d]$ 上连续可微函数, 且

$$\frac{d}{dt} I(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, dx + f(b(t), t)b'(t) - f(a(t), t)a'(t).$$

习题 4. 对无粘 Burgers 方程 $u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$, 在 $\{t = 0\}$ 上给定初值条件 $u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 1 - x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x \geq 1, \end{cases}$

证明: (1) 当 $0 \leq t \leq 1$ 时该初值问题的解是 $u(x, t) = \begin{cases} 1, & x < t, \\ \frac{1-x}{1-t}, & t \leq x \leq 1, \\ 0, & x \geq 1; \end{cases}$

(2) 当 $t \rightarrow 1-$ 时 $\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, t)|$ 保持有界, 但 $\lim_{t \rightarrow 1-} u_x(1, t) = -\infty$.

习题 5. 求方程 $yu_x - xu_y = x^2 - y^2$ 的通解 (即包含一个任意函数的解).

习题 6. 求解定解问题 $\begin{cases} \sqrt{x}u_x + \sqrt{y}u_y + \sqrt{z}u_z = 0, & x > 0, y > 0, z > 0, \\ u|_{x=1} = y - z. \end{cases}$

阅读任务和作业

- 必读– 郇中丹, 黄海洋: 偏微分方程 (第二版), 高等教育出版社, 2013. [pp.9–14]
- 选读– Sam Howison: Practical Applied Mathematics: Modeling, Analysis, Approximation. Cambridge University Press, 2005. (影印版: Sam Howison, 实用数学-建模, 分析, 逼近. 高等教育出版社, 2008 年) [第 8 章]
- 作业: p.14: 3 (v)–(ix); 4, 5.

注: 输运方程 $f_x = f_y$ 对应平移变换 (其通解形如 $g(x + y)$). 适当推广这里导数的定义, 可研究一类 q -级数求和问题, 参考 [Aslan, Hatice; Ismail, Mourad E. H.: A q -translation approach to Liu's calculus. Ann. Comb. 23 (2019), no. 3-4, 465–488] 及其对刘治国教授结合了微分方程、特殊函数和数论的工作的介绍.

最后更新: 2022-9-24

偏微分方程

第三讲 有限差分格式与数值解

袁海荣 (华东师范大学 数学科学学院)

2022 年 9 月 15 日

在讨论数学问题时, 我们相信特殊化比一般化起着更为重要的作用. 可能在大多数场合, 我们寻找一个问题的答案而未能成功的原因, 是在于这样的事实, 即有一些比手头的问题更简单、更容易的问题没有完全解决或是完全没有解决. 这时, 一切都有赖于找出这些比较容易的问题并使用尽可能完善的方法和能够推广的概念来解决它们. 这种方法是克服数学困难的最重要的杠杆之一, 我认为人们是经常使用它的, 虽然也许并不自觉.

—David Hilbert (1862 年 1 月 23 日—1943 年 2 月 14 日)



传记: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hilbert/>

学习要点

- 了解逼近导数的常见的差分格式
- 了解迎风格式、显式格式、隐式格式的特点及作用
- 了解偏微分方程数值计算与差分方程、线性代数的联系
- 理解理论分析 / 特解 (精确解) 对于设计合理的计算方法的重要性
- 初步理解数值解法是以对偏微分方程解的概念的不同理解为出发点的

一阶导数

假设下面出现的函数 f 都充分光滑, 步长 $h > 0$ 是个数.

- 一阶前差: $\Delta_+ f(\hat{x}) \doteq f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}); \quad \frac{\Delta_+ f(\hat{x})}{h} = f'(\hat{x}) + \frac{h}{2} f''(\hat{x}) + o(h) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (一阶精度)}$
- 一阶后差: $\Delta_- f(\hat{x}) \doteq f(\hat{x}) - f(\hat{x} - h); \quad \frac{\Delta_- f(\hat{x})}{h} = f'(\hat{x}) - \frac{h}{2} f''(\hat{x}) + o(h) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (一阶精度)}$
- 一阶中心差: $\Delta_0 f(\hat{x}) \doteq f(\hat{x} + h) - f(\hat{x} - h); \quad \frac{\Delta_0 f(\hat{x})}{2h} = f'(\hat{x}) + \frac{h^2}{6} f'''(\hat{x}) + o(h^2) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (二阶精度)}$

注意这里体现的“抵消”(cancellation), 从而提高精度.

证明工具 — Taylor 公式: 设 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \hat{x} \in \Omega, \exists R > 0$ 使得 f 在 $B_R(\hat{x})$ 上有 m 阶连续的偏导函数, 那么

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \underbrace{D^k f(\hat{x})(x - \hat{x})^k}_{\doteq \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(\hat{x})(x - \hat{x})^\alpha} + R_m(x), \quad \forall x \in B_R(\hat{x}),$$

$$\text{其中余项 } R_m(x) = \begin{cases} o(|x - \hat{x}|^m), & (x \rightarrow \hat{x}), \\ \frac{1}{(m+1)!} D^{m+1} f(\hat{x} + \theta(x - \hat{x}))(x - \hat{x})^{m+1}, \forall x \in B_R(\hat{x}) \text{ (这里 } \theta \in (0, 1)), & \text{要求 } f \in C^{m+1}(B_R(\hat{x})). \end{cases}$$

(只需用一元函数情形结论. 课堂练习.)

一阶导数

假设下面出现的函数 f 都充分光滑, 步长 $h > 0$ 是个数.

- 一阶前差: $\Delta_+ f(\hat{x}) \doteq f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}); \quad \boxed{\frac{\Delta_+ f(\hat{x})}{h}} = f'(\hat{x}) + \frac{h}{2} f''(\hat{x}) + o(h) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (一阶精度)}$
- 一阶后差: $\Delta_- f(\hat{x}) \doteq f(\hat{x}) - f(\hat{x} - h); \quad \boxed{\frac{\Delta_- f(\hat{x})}{h}} = f'(\hat{x}) - \frac{h}{2} f''(\hat{x}) + o(h) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (一阶精度)}$
- 一阶中心差: $\Delta_0 f(\hat{x}) \doteq f(\hat{x} + h) - f(\hat{x} - h); \quad \boxed{\frac{\Delta_0 f(\hat{x})}{2h}} = f'(\hat{x}) + \frac{h^2}{6} f'''(\hat{x}) + o(h^2) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (二阶精度)}$

注意这里体现的“抵消”(cancellation), 从而提高精度.

证明工具 — Taylor 公式: 设 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \hat{x} \in \Omega, \exists R > 0$ 使得 f 在 $B_R(\hat{x})$ 上有 m 阶连续的偏导函数, 那么

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \underbrace{D^k f(\hat{x})(x - \hat{x})^k}_{\doteq \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(\hat{x})(x - \hat{x})^\alpha} + R_m(x), \quad \forall x \in B_R(\hat{x}),$$

$$\text{其中余项 } R_m(x) = \begin{cases} o(|x - \hat{x}|^m), & (x \rightarrow \hat{x}), \\ \frac{1}{(m+1)!} D^{m+1} f(\hat{x} + \theta(x - \hat{x}))(x - \hat{x})^{m+1}, \forall x \in B_R(\hat{x}) \text{ (这里 } \theta \in (0, 1)), & \text{要求 } f \in C^{m+1}(B_R(\hat{x})). \end{cases}$$

(只需用一元函数情形结论. 课堂练习.)

一阶导数

假设下面出现的函数 f 都充分光滑, 步长 $h > 0$ 是个数.

- 一阶前差: $\Delta_+ f(\hat{x}) \doteq f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}); \quad \boxed{\frac{\Delta_+ f(\hat{x})}{h}} = f'(\hat{x}) + \frac{h}{2} f''(\hat{x}) + o(h) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (一阶精度)}$
- 一阶后差: $\Delta_- f(\hat{x}) \doteq f(\hat{x}) - f(\hat{x} - h); \quad \boxed{\frac{\Delta_- f(\hat{x})}{h}} = f'(\hat{x}) - \frac{h}{2} f''(\hat{x}) + o(h) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (一阶精度)}$
- 一阶中心差: $\Delta_0 f(\hat{x}) \doteq f(\hat{x} + h) - f(\hat{x} - h); \quad \boxed{\frac{\Delta_0 f(\hat{x})}{2h}} = f'(\hat{x}) + \frac{h^2}{6} f'''(\hat{x}) + o(h^2) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (二阶精度)}$

注意这里体现的“抵消”(cancellation), 从而提高精度.

证明工具 — Taylor 公式: 设 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \hat{x} \in \Omega, \exists R > 0$ 使得 f 在 $B_R(\hat{x})$ 上有 m 阶连续的偏导函数, 那么

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \underbrace{D^k f(\hat{x})(x - \hat{x})^k}_{\doteq \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(\hat{x})(x - \hat{x})^\alpha} + R_m(x), \quad \forall x \in B_R(\hat{x}),$$

$$\text{其中余项 } R_m(x) = \begin{cases} o(|x - \hat{x}|^m), & (x \rightarrow \hat{x}), \\ \frac{1}{(m+1)!} D^{m+1} f(\hat{x} + \theta(x - \hat{x}))(x - \hat{x})^{m+1}, \forall x \in B_R(\hat{x}) \text{ (这里 } \theta \in (0, 1)), & \text{要求 } f \in C^{m+1}(B_R(\hat{x})). \end{cases}$$

(只需用一元函数情形结论. 课堂练习.)

一阶导数

假设下面出现的函数 f 都充分光滑, 步长 $h > 0$ 是个数.

- 一阶前差: $\Delta_+ f(\hat{x}) \doteq f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}); \quad \boxed{\frac{\Delta_+ f(\hat{x})}{h}} = f'(\hat{x}) + \frac{h}{2} f''(\hat{x}) + o(h) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (一阶精度)}$
- 一阶后差: $\Delta_- f(\hat{x}) \doteq f(\hat{x}) - f(\hat{x} - h); \quad \boxed{\frac{\Delta_- f(\hat{x})}{h}} = f'(\hat{x}) - \frac{h}{2} f''(\hat{x}) + o(h) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (一阶精度)}$
- 一阶中心差: $\Delta_0 f(\hat{x}) \doteq f(\hat{x} + h) - f(\hat{x} - h); \quad \boxed{\frac{\Delta_0 f(\hat{x})}{2h}} = f'(\hat{x}) + \frac{h^2}{6} f'''(\hat{x}) + o(h^2) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (二阶精度)}$

注意这里体现的“抵消”(cancellation), 从而提高精度.

证明工具 — Taylor 公式: 设 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \hat{x} \in \Omega, \exists R > 0$ 使得 f 在 $B_R(\hat{x})$ 上有 m 阶连续的偏导函数, 那么

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \underbrace{D^k f(\hat{x})(x - \hat{x})^k}_{\doteq \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(\hat{x})(x - \hat{x})^\alpha} + R_m(x), \quad \forall x \in B_R(\hat{x}),$$

$$\text{其中余项 } R_m(x) = \begin{cases} o(|x - \hat{x}|^m), & (x \rightarrow \hat{x}), \\ \frac{1}{(m+1)!} D^{m+1} f(\hat{x} + \theta(x - \hat{x}))(x - \hat{x})^{m+1}, \forall x \in B_R(\hat{x}) \text{ (这里 } \theta \in (0, 1)), & \text{要求 } f \in C^{m+1}(B_R(\hat{x})). \end{cases}$$

(只需用一元函数情形结论. 课堂练习.)

一阶导数

假设下面出现的函数 f 都充分光滑, 步长 $h > 0$ 是个数.

- 一阶前差: $\Delta_+ f(\hat{x}) \doteq f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}); \quad \boxed{\frac{\Delta_+ f(\hat{x})}{h}} = f'(\hat{x}) + \frac{h}{2} f''(\hat{x}) + o(h) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (一阶精度)}$
- 一阶后差: $\Delta_- f(\hat{x}) \doteq f(\hat{x}) - f(\hat{x} - h); \quad \boxed{\frac{\Delta_- f(\hat{x})}{h}} = f'(\hat{x}) - \frac{h}{2} f''(\hat{x}) + o(h) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (一阶精度)}$
- 一阶中心差: $\Delta_0 f(\hat{x}) \doteq f(\hat{x} + h) - f(\hat{x} - h); \quad \boxed{\frac{\Delta_0 f(\hat{x})}{2h}} = f'(\hat{x}) + \frac{h^2}{6} f'''(\hat{x}) + o(h^2) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (二阶精度)}$

注意这里体现的“抵消”(cancellation), 从而提高精度.

证明工具 — Taylor 公式: 设 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \hat{x} \in \Omega, \exists R > 0$ 使得 f 在 $B_R(\hat{x})$ 上有 m 阶连续的偏导函数, 那么

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \underbrace{D^k f(\hat{x})(x - \hat{x})^k}_{\doteq \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(\hat{x})(x - \hat{x})^\alpha} + R_m(x), \quad \forall x \in B_R(\hat{x}),$$

$$\text{其中余项 } R_m(x) = \begin{cases} o(|x - \hat{x}|^m), & (x \rightarrow \hat{x}), \\ \frac{1}{(m+1)!} D^{m+1} f(\hat{x} + \theta(x - \hat{x}))(x - \hat{x})^{m+1}, \forall x \in B_R(\hat{x}) \text{ (这里 } \theta \in (0, 1)), & \text{要求 } f \in C^{m+1}(B_R(\hat{x})). \end{cases}$$

(只需用一元函数情形结论. 课堂练习.)

一阶导数

假设下面出现的函数 f 都充分光滑, 步长 $h > 0$ 是个数.

- 一阶前差: $\Delta_+ f(\hat{x}) \doteq f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}); \quad \frac{\Delta_+ f(\hat{x})}{h} = f'(\hat{x}) + \frac{h}{2} f''(\hat{x}) + o(h) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (一阶精度)}$
- 一阶后差: $\Delta_- f(\hat{x}) \doteq f(\hat{x}) - f(\hat{x} - h); \quad \frac{\Delta_- f(\hat{x})}{h} = f'(\hat{x}) - \frac{h}{2} f''(\hat{x}) + o(h) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (一阶精度)}$
- 一阶中心差: $\Delta_0 f(\hat{x}) \doteq f(\hat{x} + h) - f(\hat{x} - h); \quad \frac{\Delta_0 f(\hat{x})}{2h} = f'(\hat{x}) + \frac{h^2}{6} f'''(\hat{x}) + o(h^2) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (二阶精度)}$

注意这里体现的“抵消”(cancellation), 从而提高精度.

证明工具 — Taylor 公式: 设 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \hat{x} \in \Omega, \exists R > 0$ 使得 f 在 $B_R(\hat{x})$ 上有 m 阶连续的偏导函数, 那么

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \underbrace{D^k f(\hat{x})(x - \hat{x})^k}_{\doteq \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(\hat{x})(x - \hat{x})^\alpha} + R_m(x), \quad \forall x \in B_R(\hat{x}),$$

$$\text{其中余项 } R_m(x) = \begin{cases} o(|x - \hat{x}|^m), & (x \rightarrow \hat{x}), \\ \frac{1}{(m+1)!} D^{m+1} f(\hat{x} + \theta(x - \hat{x}))(x - \hat{x})^{m+1}, \forall x \in B_R(\hat{x}) \text{ (这里 } \theta \in (0, 1)), & \text{要求 } f \in C^{m+1}(B_R(\hat{x})). \end{cases}$$

(只需用一元函数情形结论. 课堂练习.)

二阶导数

假设函数 f 充分光滑, 步长 $h > 0$ 是个数.

- 二阶前差: $\frac{\Delta_+^2 f(\hat{x})}{h^2} = \frac{f(\hat{x}+2h) - 2f(\hat{x}+h) + f(\hat{x})}{h^2} = f''(\hat{x}) + O(h) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (一阶精度)}$
- 二阶后差: $\frac{\Delta_-^2 f(\hat{x})}{h^2} = \frac{f(\hat{x}) - 2f(\hat{x}-h) + f(\hat{x}-2h)}{h^2} = f''(\hat{x}) + O(h) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (一阶精度)}$
- 二阶中心差: $\frac{\Delta_- \Delta_+ f(\hat{x})}{h^2} = \frac{f(\hat{x}+h) - 2f(\hat{x}) + f(\hat{x}-h)}{h^2} = f''(\hat{x}) + O(h^2) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (二阶精度)}$

证明: 习题.

二阶导数

假设函数 f 充分光滑, 步长 $h > 0$ 是个数.

- 二阶前差: $\frac{\Delta_+^2 f(\hat{x})}{h^2} = \frac{f(\hat{x}+2h) - 2f(\hat{x}+h) + f(\hat{x})}{h^2} = f''(\hat{x}) + O(h) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (一阶精度)}$
- 二阶后差: $\frac{\Delta_-^2 f(\hat{x})}{h^2} = \frac{f(\hat{x}) - 2f(\hat{x}-h) + f(\hat{x}-2h)}{h^2} = f''(\hat{x}) + O(h) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (一阶精度)}$
- 二阶中心差: $\frac{\Delta_- \Delta_+ f(\hat{x})}{h^2} = \frac{f(\hat{x}+h) - 2f(\hat{x}) + f(\hat{x}-h)}{h^2} = f''(\hat{x}) + O(h^2) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (二阶精度)}$

证明: 习题.

二阶导数

假设函数 f 充分光滑, 步长 $h > 0$ 是个数.

- 二阶前差: $\frac{\Delta_+^2 f(\hat{x})}{h^2} = \frac{f(\hat{x}+2h) - 2f(\hat{x}+h) + f(\hat{x})}{h^2} = f''(\hat{x}) + O(h) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (一阶精度)}$
- 二阶后差: $\frac{\Delta_-^2 f(\hat{x})}{h^2} = \frac{f(\hat{x}) - 2f(\hat{x}-h) + f(\hat{x}-2h)}{h^2} = f''(\hat{x}) + O(h) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (一阶精度)}$
- 二阶中心差: $\frac{\Delta_- \Delta_+ f(\hat{x})}{h^2} = \frac{f(\hat{x}+h) - 2f(\hat{x}) + f(\hat{x}-h)}{h^2} = f''(\hat{x}) + O(h^2) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (二阶精度)}$

证明: 习题.

二阶导数

假设函数 f 充分光滑, 步长 $h > 0$ 是个数.

- 二阶前差: $\frac{\Delta_+^2 f(\hat{x})}{h^2} = \frac{f(\hat{x}+2h) - 2f(\hat{x}+h) + f(\hat{x})}{h^2} = f''(\hat{x}) + O(h) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (一阶精度)}$
- 二阶后差: $\frac{\Delta_-^2 f(\hat{x})}{h^2} = \frac{f(\hat{x}) - 2f(\hat{x}-h) + f(\hat{x}-2h)}{h^2} = f''(\hat{x}) + O(h) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (一阶精度)}$
- 二阶中心差: $\frac{\Delta_- \Delta_+ f(\hat{x})}{h^2} = \frac{f(\hat{x}+h) - 2f(\hat{x}) + f(\hat{x}-h)}{h^2} = f''(\hat{x}) + O(h^2) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (二阶精度)}$

证明: 习题.

二阶导数

假设函数 f 充分光滑, 步长 $h > 0$ 是个数.

- 二阶前差: $\frac{\Delta_+^2 f(\hat{x})}{h^2} = \frac{f(\hat{x}+2h) - 2f(\hat{x}+h) + f(\hat{x})}{h^2} = f''(\hat{x}) + O(h) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (一阶精度)}$
- 二阶后差: $\frac{\Delta_-^2 f(\hat{x})}{h^2} = \frac{f(\hat{x}) - 2f(\hat{x}-h) + f(\hat{x}-2h)}{h^2} = f''(\hat{x}) + O(h) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (一阶精度)}$
- 二阶中心差: $\frac{\Delta_- \Delta_+ f(\hat{x})}{h^2} = \frac{f(\hat{x}+h) - 2f(\hat{x}) + f(\hat{x}-h)}{h^2} = f''(\hat{x}) + O(h^2) \quad (h \rightarrow 0+) \text{ (二阶精度)}$

证明: 习题.

二阶混合偏导数

假设函数 $f \in C^4(\mathbb{R}^2)$, 步长 $h_1, h_2 > 0$ 互相控制: $\exists c > 0$ 使得 $ch_1 \leq h_2 \leq \frac{1}{c}h_1$. 记 $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$.

- 定义 (偏) 差分算子: $\Delta_{1,+}f(x,y) = f(x+h_1,y) - f(x,y)$; $\Delta_{1,-}f(x,y) = f(x,y) - f(x-h_1,y)$;
 $\Delta_{2,+}f(x,y) = f(x,y+h_2) - f(x,y)$; $\Delta_{2,-}f(x,y) = f(x,y) - f(x,y-h_2)$; $\Delta_{1,0}f(x,y) = f(x+h_1,y) - f(x-h_1,y)$;
 $\Delta_{2,0}f(x,y) = f(x,y+h_2) - f(x,y-h_2)$
- 混合二阶前差: $\frac{\Delta_{1,+}\Delta_{2,+}f(\hat{x},\hat{y})}{h_1h_2} = f_{xy}(\hat{x},\hat{y}) + O(|h|) \quad (|h| \rightarrow 0+) \text{ (一阶精度)}$
- 混合二阶后差: $\frac{\Delta_{1,-}\Delta_{2,-}f(\hat{x},\hat{y})}{h_1h_2} = f_{xy}(\hat{x},\hat{y}) + O(|h|) \quad (|h| \rightarrow 0+) \text{ (一阶精度)}$
- 混合二阶中心差: $\frac{\Delta_{1,0}\Delta_{2,0}f(\hat{x},\hat{y})}{4h_1h_2} = f_{xy}(\hat{x},\hat{y}) + O(|h|^2) \quad (|h| \rightarrow 0+) \text{ (二阶精度)}$

证明: 习题.

例：一阶常系数线性方程组的 Lax-Wendroff 格式

- 目标方程: $q_t + Aq_x + Bq_y = 0$, 其中 $q(x, y, t) \in \mathbb{R}^n$, A, B 是 $n \times n$ 实矩阵.
- $q_t = -(A\partial_x + B\partial_y)q \Rightarrow q_{tt} = (A\partial_x + B\partial_y)^2 q = A^2 q_{xx} + (AB + BA)q_{xy} + B^2 q_{yy}$.
- 离散化: 设 $x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y, t_n = n\Delta t$, 其中 $i, j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$; $\Delta x, \Delta y, \Delta t$ 分别是空间和时间步长.
- 关于变量 t 作 Taylor 展开:

$$\begin{aligned} q(x_i, y_j, t_{n+1}) &= q(x_i, y_j, t_n) + \Delta t \cdot q_t(x_i, y_j, t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2} q_{tt}(x_i, y_j, t_n) \\ &= q - \Delta t \cdot (Aq_x + Bq_y) + \frac{(\Delta t)^2}{2} (A^2 q_{xx} + (AB + BA)q_{xy} + B^2 q_{yy}). \end{aligned}$$

- 置 $Q_{ij}^n \doteq q(x_i, y_j, t_n)$, 用中心差商代替上述展开式中的各项偏导数, 得到如下 Lax-Wendroff 格式:

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{n+1} = & Q_{ij}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A(Q_{i+1,j}^n - Q_{i-1,j}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta y} B(Q_{i,j+1}^n - Q_{i,j-1}^n) \\ & + \frac{(\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2} A^2(Q_{i+1,j}^n - 2Q_{ij}^n + Q_{i-1,j}^n) + \frac{(\Delta t)^2}{2(\Delta y)^2} B^2(Q_{i,j+1}^n - 2Q_{ij}^n + Q_{i,j-1}^n) \\ & + \frac{(\Delta t)^2}{8\Delta x\Delta y} (AB + BA) [(Q_{i+1,j+1}^n - 2Q_{i-1,j+1}^n) - (Q_{i+1,j-1}^n - 2Q_{i-1,j-1}^n)]. \end{aligned}$$

- 九点格式
- 有限体积格式 (守恒格式): 此时 $Q_{ij}^n = \frac{1}{|C_{ij}|} \int_{C_{ij}} q(x, y, t_n) dx dy$, 其中 $C_{ij} \doteq [x_i - \frac{\Delta x}{2}, x_i + \frac{\Delta x}{2}] \times [y_j - \frac{\Delta y}{2}, y_j + \frac{\Delta y}{2}]$.

典型问题: 一个输运—扩散方程的初边值问题

定解问题 (其中 a, b 是已知常数, $b > 0$, 包含输运和扩散两种基本效应):

$$\begin{cases} u_t + au_x - bu_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0, \text{ (方程及区域)} \\ u(x, 0) = x, & x \in (0, 1), \text{ (初值条件)} \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 1, & t > 0. \text{ (边值条件)} \end{cases}$$

- 第一步: 构建离散化问题 ($\Rightarrow$ 差分方程)

- 区域离散化

- 取定空间步长 $h = \Delta x$ 和时间步长 $\tau = \Delta t$, 得到格点 (x_k, t_l) ($0 \leq k \leq N, l \geq 0$). 这里 $Nh = 1$.

- 内格点 (需要计算函数近似值的格点): 满足 $(0 < k < N, l > 0)$ 的格点 (x_k, t_l) ; 其他格点叫外格点 (由初边值条件确定)

- 方程离散化: 在每个内格点, 将微分方程中的导数用选定的差分格式近似, 从而在每个内格点得到一个差分方程

- 初值和边值条件离散化: 利用初值和边值条件确定外格点要满足的约束条件

- 第二步: 求解差分方程, 得到离散化问题的解, 即原问题的近似解 (分片常值解)

- 第三步: 根据需要, 细化步长, 提高求解精度 [找到高效与精确这对矛盾的平衡]

典型问题: 一个输运—扩散方程的初边值问题

定解问题 (其中 a, b 是已知常数, $b > 0$, 包含输运和扩散两种基本效应):

$$\begin{cases} u_t + au_x - bu_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0, \text{ (方程及区域)} \\ u(x, 0) = x, & x \in (0, 1), \text{ (初值条件)} \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 1, & t > 0. \text{ (边值条件)} \end{cases}$$

● 第一步: 构建离散化问题 ($\Rightarrow$ 差分方程)

● 区域离散化

● 取定空间步长 $h = \Delta x$ 和时间步长 $\tau = \Delta t$, 得到格点 (x_k, t_l) ($0 \leq k \leq N, l \geq 0$). 这里 $Nh = 1$.

● 内格点 (需要计算函数近似值的格点): 满足 $(0 < k < N, l > 0)$ 的格点 (x_k, t_l) ; 其他格点叫外格点 (由初边值条件确定)

● 方程离散化: 在每个内格点, 将微分方程中的导数用选定的差分格式近似, 从而在每个内格点得到一个差分方程

● 初值和边值条件离散化: 利用初值和边值条件确定外格点要满足的约束条件

● 第二步: 求解差分方程, 得到离散化问题的解, 即原问题的近似解 (分片常值解)

● 第三步: 根据需要, 细化步长, 提高求解精度 [找到高效与精确这对矛盾的平衡]

典型问题: 一个输运—扩散方程的初边值问题

定解问题 (其中 a, b 是已知常数, $b > 0$, 包含输运和扩散两种基本效应):

$$\begin{cases} u_t + au_x - bu_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0, \text{ (方程及区域)} \\ u(x, 0) = x, & x \in (0, 1), \text{ (初值条件)} \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 1, & t > 0. \text{ (边值条件)} \end{cases}$$

● 第一步: 构建离散化问题 ($\Rightarrow$ 差分方程)

● 区域离散化

● 取定空间步长 $h = \Delta x$ 和时间步长 $\tau = \Delta t$, 得到格点 (x_k, t_l) ($0 \leq k \leq N, l \geq 0$). 这里 $Nh = 1$.

● 内格点 (需要计算函数近似值的格点): 满足 $(0 < k < N, l > 0)$ 的格点 (x_k, t_l) ; 其他格点叫外格点 (由初边值条件确定)

● 方程离散化: 在每个内格点, 将微分方程中的导数用选定的差分格式近似, 从而在每个内格点得到一个差分方程

● 初值和边值条件离散化: 利用初值和边值条件确定外格点要满足的约束条件

● 第二步: 求解差分方程, 得到离散化问题的解, 即原问题的近似解 (分片常值解)

● 第三步: 根据需要, 细化步长, 提高求解精度 [找到高效与精确这对矛盾的平衡]

典型问题: 一个输运—扩散方程的初边值问题

定解问题 (其中 a, b 是已知常数, $b > 0$, 包含输运和扩散两种基本效应):

$$\begin{cases} u_t + au_x - bu_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0, \text{ (方程及区域)} \\ u(x, 0) = x, & x \in (0, 1), \text{ (初值条件)} \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 1, & t > 0. \text{ (边值条件)} \end{cases}$$

- 第一步: 构建离散化问题 ($\Rightarrow$ 差分方程)

- 区域离散化

- 取定空间步长 $h = \Delta x$ 和时间步长 $\tau = \Delta t$, 得到格点 (x_k, t_l) ($0 \leq k \leq N, l \geq 0$). 这里 $Nh = 1$.

- 内格点 (需要计算函数近似值的格点): 满足 $(0 < k < N, l > 0)$ 的格点 (x_k, t_l) ; 其他格点叫外格点 (由初边值条件确定)

- 方程离散化: 在每个内格点, 将微分方程中的导数用选定的差分格式近似, 从而在每个内格点得到一个差分方程

- 初值和边值条件离散化: 利用初值和边值条件确定外格点要满足的约束条件

- 第二步: 求解差分方程, 得到离散化问题的解, 即原问题的近似解 (分片常值解)

- 第三步: 根据需要, 细化步长, 提高求解精度 [找到高效与精确这对矛盾的平衡]

典型问题: 一个输运—扩散方程的初边值问题

定解问题 (其中 a, b 是已知常数, $b > 0$, 包含输运和扩散两种基本效应):

$$\begin{cases} u_t + au_x - bu_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0, \text{ (方程及区域)} \\ u(x, 0) = x, & x \in (0, 1), \text{ (初值条件)} \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 1, & t > 0. \text{ (边值条件)} \end{cases}$$

● 第一步: 构建离散化问题 ($\Rightarrow$ 差分方程)

● 区域离散化

● 取定空间步长 $h = \Delta x$ 和时间步长 $\tau = \Delta t$, 得到格点 (x_k, t_l) ($0 \leq k \leq N, l \geq 0$). 这里 $Nh = 1$.

● 内格点 (需要计算函数近似值的格点): 满足 $(0 < k < N, l > 0)$ 的格点 (x_k, t_l) ; 其他格点叫外格点 (由初边值条件确定)

● 方程离散化: 在每个内格点, 将微分方程中的导数用选定的差分格式近似, 从而在每个内格点得到一个差分方程

● 初值和边值条件离散化: 利用初值和边值条件确定外格点要满足的约束条件

● 第二步: 求解差分方程, 得到离散化问题的解, 即原问题的近似解 (分片常值解)

● 第三步: 根据需要, 细化步长, 提高求解精度 [找到高效与精确这对矛盾的平衡]

典型问题: 一个输运—扩散方程的初边值问题

定解问题 (其中 a, b 是已知常数, $b > 0$, 包含输运和扩散两种基本效应):

$$\begin{cases} u_t + au_x - bu_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0, \text{ (方程及区域)} \\ u(x, 0) = x, & x \in (0, 1), \text{ (初值条件)} \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 1, & t > 0. \text{ (边值条件)} \end{cases}$$

- 第一步: 构建离散化问题 ($\Rightarrow$ 差分方程)

- 区域离散化

- 取定空间步长 $h = \Delta x$ 和时间步长 $\tau = \Delta t$, 得到格点 (x_k, t_l) ($0 \leq k \leq N, l \geq 0$). 这里 $Nh = 1$.

- 内格点 (需要计算函数近似值的格点): 满足 $(0 < k < N, l > 0)$ 的格点 (x_k, t_l) ; 其他格点叫外格点 (由初边值条件确定)

- 方程离散化: 在每个内格点, 将微分方程中的导数用选定的差分格式近似, 从而在每个内格点得到一个差分方程

- 初值和边值条件离散化: 利用初值和边值条件确定外格点要满足的约束条件

- 第二步: 求解差分方程, 得到离散化问题的解, 即原问题的近似解 (分片常值解)

- 第三步: 根据需要, 细化步长, 提高求解精度 [找到高效与精确这对矛盾的平衡]

典型问题: 一个输运—扩散方程的初边值问题

定解问题 (其中 a, b 是已知常数, $b > 0$, 包含输运和扩散两种基本效应):

$$\begin{cases} u_t + au_x - bu_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0, \text{ (方程及区域)} \\ u(x, 0) = x, & x \in (0, 1), \text{ (初值条件)} \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 1, & t > 0. \text{ (边值条件)} \end{cases}$$

- 第一步: 构建离散化问题 ($\Rightarrow$ 差分方程)

- 区域离散化

- 取定空间步长 $h = \Delta x$ 和时间步长 $\tau = \Delta t$, 得到格点 (x_k, t_l) ($0 \leq k \leq N, l \geq 0$). 这里 $Nh = 1$.

- 内格点 (需要计算函数近似值的格点): 满足 $(0 < k < N, l > 0)$ 的格点 (x_k, t_l) ; 其他格点叫外格点 (由初边值条件确定)

- 方程离散化: 在每个内格点, 将微分方程中的导数用选定的差分格式近似, 从而在每个内格点得到一个差分方程

- 初值和边值条件离散化: 利用初值和边值条件确定外格点要满足的约束条件

- 第二步: 求解差分方程, 得到离散化问题的解, 即原问题的近似解 (分片常值解)

- 第三步: 根据需要, 细化步长, 提高求解精度 [找到高效与精确这对矛盾的平衡]

典型问题: 一个输运—扩散方程的初边值问题

定解问题 (其中 a, b 是已知常数, $b > 0$, 包含输运和扩散两种基本效应):

$$\begin{cases} u_t + au_x - bu_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0, \text{ (方程及区域)} \\ u(x, 0) = x, & x \in (0, 1), \text{ (初值条件)} \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 1, & t > 0. \text{ (边值条件)} \end{cases}$$

- 第一步: 构建离散化问题 ($\Rightarrow$ 差分方程)

- 区域离散化

- 取定空间步长 $h = \Delta x$ 和时间步长 $\tau = \Delta t$, 得到格点 (x_k, t_l) ($0 \leq k \leq N, l \geq 0$). 这里 $Nh = 1$.

- 内格点 (需要计算函数近似值的格点): 满足 $(0 < k < N, l > 0)$ 的格点 (x_k, t_l) ; 其他格点叫外格点 (由初边值条件确定)

- 方程离散化: 在每个内格点, 将微分方程中的导数用选定的差分格式近似, 从而在每个内格点得到一个差分方程

- 初值和边值条件离散化: 利用初值和边值条件确定外格点要满足的约束条件

- 第二步: 求解差分方程, 得到离散化问题的解, 即原问题的近似解 (分片常值解)

- 第三步: 根据需要, 细化步长, 提高求解精度 [找到高效与精确这对矛盾的平衡]

典型问题: 一个输运—扩散方程的初边值问题

定解问题 (其中 a, b 是已知常数, $b > 0$, 包含输运和扩散两种基本效应):

$$\begin{cases} u_t + au_x - bu_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0, \text{ (方程及区域)} \\ u(x, 0) = x, & x \in (0, 1), \text{ (初值条件)} \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 1, & t > 0. \text{ (边值条件)} \end{cases}$$

- 第一步: 构建离散化问题 ($\Rightarrow$ 差分方程)

- 区域离散化

- 取定空间步长 $h = \Delta x$ 和时间步长 $\tau = \Delta t$, 得到格点 (x_k, t_l) ($0 \leq k \leq N, l \geq 0$). 这里 $Nh = 1$.

- 内格点 (需要计算函数近似值的格点): 满足 $(0 < k < N, l > 0)$ 的格点 (x_k, t_l) ; 其他格点叫外格点 (由初边值条件确定)

- 方程离散化: 在每个内格点, 将微分方程中的导数用选定的差分格式近似, 从而在每个内格点得到一个差分方程

- 初值和边值条件离散化: 利用初值和边值条件确定外格点要满足的约束条件

- 第二步: 求解差分方程, 得到离散化问题的解, 即原问题的近似解 (分片常值解)

- 第三步: 根据需要, 细化步长, 提高求解精度 [找到高效与精确这对矛盾的平衡]

典型问题: 一个输运—扩散方程的初边值问题

定解问题 (其中 a, b 是已知常数, $b > 0$, 包含输运和扩散两种基本效应):

$$\begin{cases} u_t + au_x - bu_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0, \text{ (方程及区域)} \\ u(x, 0) = x, & x \in (0, 1), \text{ (初值条件)} \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 1, & t > 0. \text{ (边值条件)} \end{cases}$$

● 第一步: 构建离散化问题 ($\Rightarrow$ 差分方程)

● 区域离散化

● 取定空间步长 $h = \Delta x$ 和时间步长 $\tau = \Delta t$, 得到格点 (x_k, t_l) ($0 \leq k \leq N, l \geq 0$). 这里 $Nh = 1$.

● 内格点 (需要计算函数近似值的格点): 满足 $(0 < k < N, l > 0)$ 的格点 (x_k, t_l) ; 其他格点叫外格点 (由初边值条件确定)

● 方程离散化: 在每个内格点, 将微分方程中的导数用选定的差分格式近似, 从而在每个内格点得到一个差分方程

● 初值和边值条件离散化: 利用初值和边值条件确定外格点要满足的约束条件

● 第二步: 求解差分方程, 得到离散化问题的解, 即原问题的近似解 (分片常值解)

● 第三步: 根据需要, 细化步长, 提高求解精度 [找到高效与精确这对矛盾的平衡]

典型问题: 一个输运—扩散方程的初边值问题

定解问题 (其中 a, b 是已知常数, $b > 0$, 包含输运和扩散两种基本效应):

$$\begin{cases} u_t + au_x - bu_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0, \text{ (方程及区域)} \\ u(x, 0) = x, & x \in (0, 1), \text{ (初值条件)} \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 1, & t > 0. \text{ (边值条件)} \end{cases}$$

- 第一步: 构建离散化问题 ($\Rightarrow$ 差分方程)

- 区域离散化

- 取定空间步长 $h = \Delta x$ 和时间步长 $\tau = \Delta t$, 得到格点 (x_k, t_l) ($0 \leq k \leq N, l \geq 0$). 这里 $Nh = 1$.

- 内格点 (需要计算函数近似值的格点): 满足 $(0 < k < N, l > 0)$ 的格点 (x_k, t_l) ; 其他格点叫外格点 (由初边值条件确定)

- 方程离散化: 在每个内格点, 将微分方程中的导数用选定的差分格式近似, 从而在每个内格点得到一个差分方程

- 初值和边值条件离散化: 利用初值和边值条件确定外格点要满足的约束条件

- 第二步: 求解差分方程, 得到离散化问题的解, 即原问题的近似解 (分片常值解)

- 第三步: 根据需要, 细化步长, 提高求解精度 [找到高效与精确这对矛盾的平衡]

一阶线性常系数输运方程的初值问题及其离散化

● PDE 问题: $u_t + au_x = 0$, $u(x, 0) = f(x)$; $x \in \mathbb{R}, t > 0$. 假设常数 $a > 0$. 精确解: $u(x, t) = f(x - at)$ (速度为 a 的右行波)

● 离散问题: τ -时间步长, h -空间步长. 置 $\lambda \doteq \tau/h$. 对时间导数, 采用一阶前差.

● 方案 1: 对空间导数, 采用一阶前差:

$$\frac{u(x, t+\tau) - u(x, t)}{\tau} + a \frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h} = 0 \Rightarrow u(x, t+\tau) = (1 + \lambda a)u(x, t) - \lambda a u(x+h, t).$$

稳定性分析: 记平移算子 $E: (Ef)(x) \doteq f(x+h)$, I : 恒等映射. 则 $u(x, t+\tau) = ((1 + \lambda a)I - \lambda aE)u(x, t) \Rightarrow u(x, n\tau) = ((1 + \lambda a)I - \lambda aE)^n u(x, 0) = \sum_{m=0}^n C_n^m (1 + \lambda a)^m (-\lambda aE)^{n-m} f(x) = \sum_{m=0}^n C_n^m (1 + \lambda a)^m (-\lambda a)^{n-m} f(x + (n-m)h)$. 对固定的 x, t, h , 设 $t = n\tau, \forall \varepsilon > 0$, 可构造 f 使得 $f(x + (n-m)h) = (-1)^{n-m} \varepsilon$, 从而 $u(x, t) = \varepsilon \sum_{m=0}^n C_n^m (1 + \lambda a)^m (\lambda a)^{n-m} = (1 + 2\lambda a)^n \varepsilon \rightarrow +\infty (\tau \rightarrow 0) \Rightarrow$ 计算不稳定性 (即使初值很小, 但多次迭代后近似值很大, 出现明显的误差. 此处 f 与 n 无关, 只依赖于 x, t, h). 出错原因: 不符合因果律—按特征线, 应当上游决定下游; 本格式中则是下游 (右侧的值) 决定上游 (左侧的值).

● 方案 2: 对空间导数, 采用一阶后差 (迎风差分格式):

$$\frac{u(x, t+\tau) - u(x, t)}{\tau} + a \frac{u(x, t) - u(x-h, t)}{h} = 0 \Rightarrow u(x, t+\tau) = (1 - \lambda a)u(x, t) + \lambda a u(x-h, t).$$

稳定性分析 (CFL 条件): $u(x, t) = u(x, n\tau) = ((1 - \lambda a)I + \lambda aE^{-1})^n f(x) = \sum_{m=0}^n C_n^m (1 - \lambda a)^m (\lambda a)^{n-m} f(x - (n-m)h)$. $\lambda a < 1 \Leftrightarrow \tau a < h$

(Courant-Friedrichs-Lewy 条件) $\Rightarrow$ i) 若 $|f| \leq \varepsilon$, 则 $|u(x, t)| \leq \varepsilon$ (有计算稳定性); ii) 所依赖初值区间 $[x - nh, x]$ 在 x 点上游 (左侧), 且包含过 (x, t) 点特征线 $X = a(T - t) + x$ (这里 T 是自变量, X 是因变量) 的初值 $x - at$ (注意 $nh = t/\lambda$, 所以 $at < nh$); iii) 收敛性: 差分格式的解收敛到精确解 (见下页证明).

一阶线性常系数输运方程的初值问题及其离散化

● PDE 问题: $u_t + au_x = 0$, $u(x, 0) = f(x)$; $x \in \mathbb{R}, t > 0$. 假设常数 $a > 0$. 精确解: $u(x, t) = f(x - at)$ (速度为 a 的右行波)

● 离散问题: τ -时间步长, h -空间步长. 置 $\lambda \doteq \tau/h$. 对时间导数, 采用一阶前差.

● 方案 1: 对空间导数, 采用一阶前差:

$$\frac{u(x, t+\tau) - u(x, t)}{\tau} + a \frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h} = 0 \Rightarrow u(x, t+\tau) = (1 + \lambda a)u(x, t) - \lambda a u(x+h, t).$$

稳定性分析: 记平移算子 $E: (Ef)(x) \doteq f(x+h)$, I : 恒等映射. 则 $u(x, t+\tau) = ((1 + \lambda a)I - \lambda aE)u(x, t) \Rightarrow u(x, n\tau) = ((1 + \lambda a)I - \lambda aE)^n u(x, 0) = \sum_{m=0}^n C_n^m (1 + \lambda a)^m (-\lambda aE)^{n-m} f(x) = \sum_{m=0}^n C_n^m (1 + \lambda a)^m (-\lambda a)^{n-m} f(x + (n-m)h)$. 对固定的 x, t, h , 设 $t = n\tau, \forall \varepsilon > 0$, 可构造 f 使得 $f(x + (n-m)h) = (-1)^{n-m} \varepsilon$, 从而 $u(x, t) = \varepsilon \sum_{m=0}^n C_n^m (1 + \lambda a)^m (\lambda a)^{n-m} = (1 + 2\lambda a)^n \varepsilon \rightarrow +\infty (\tau \rightarrow 0) \Rightarrow$ 计算不稳定性 (即使初值很小, 但多次迭代后近似值很大, 出现明显的误差. 此处 f 与 n 无关, 只依赖于 x, t, h). 出错原因: 不符合因果律—按特征线, 应当上游决定下游; 本格式中则是下游 (右侧的值) 决定上游 (左侧的值).

● 方案 2: 对空间导数, 采用一阶后差 (迎风差分格式):

$$\frac{u(x, t+\tau) - u(x, t)}{\tau} + a \frac{u(x, t) - u(x-h, t)}{h} = 0 \Rightarrow u(x, t+\tau) = (1 - \lambda a)u(x, t) + \lambda a u(x-h, t).$$

稳定性分析 (CFL 条件): $u(x, t) = u(x, n\tau) = ((1 - \lambda a)I + \lambda aE^{-1})^n f(x) = \sum_{m=0}^n C_n^m (1 - \lambda a)^m (\lambda a)^{n-m} f(x - (n-m)h)$. $\lambda a < 1 \Leftrightarrow \tau a < h$

(Courant-Friedrichs-Lewy 条件) $\Rightarrow$ i) 若 $|f| \leq \varepsilon$, 则 $|u(x, t)| \leq \varepsilon$ (有计算稳定性); ii) 所依赖初值区间 $[x - nh, x]$ 在 x 点上游 (左侧), 且包含过 (x, t) 点特征线 $X = a(T - t) + x$ (这里 T 是自变量, X 是因变量) 的初值 $x - at$ (注意 $nh = t/\lambda$, 所以 $at < nh$); iii) 收敛性: 差分格式的解收敛到精确解 (见下页证明).

一阶线性常系数输运方程的初值问题及其离散化

● PDE 问题: $u_t + au_x = 0$, $u(x, 0) = f(x)$; $x \in \mathbb{R}, t > 0$. 假设常数 $a > 0$. 精确解: $u(x, t) = f(x - at)$ (速度为 a 的右行波)

● 离散问题: τ -时间步长, h -空间步长. 置 $\lambda \doteq \tau/h$. 对时间导数, 采用一阶前差.

● 方案 1: 对空间导数, 采用一阶前差:

$$\frac{u(x, t+\tau) - u(x, t)}{\tau} + a \frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h} = 0 \Rightarrow u(x, t+\tau) = (1 + \lambda a)u(x, t) - \lambda a u(x+h, t).$$

稳定性分析: 记平移算子 $E: (Ef)(x) \doteq f(x+h)$, I : 恒等映射. 则 $u(x, t+\tau) = ((1 + \lambda a)I - \lambda aE)u(x, t) \Rightarrow u(x, n\tau) = ((1 + \lambda a)I - \lambda aE)^n u(x, 0) = \sum_{m=0}^n C_n^m (1 + \lambda a)^m (-\lambda aE)^{n-m} f(x) = \sum_{m=0}^n C_n^m (1 + \lambda a)^m (-\lambda a)^{n-m} f(x + (n-m)h)$. 对固定的 x, t, h , 设 $t = n\tau, \forall \varepsilon > 0$, 可构造 f 使得 $f(x + (n-m)h) = (-1)^{n-m} \varepsilon$, 从而 $u(x, t) = \varepsilon \sum_{m=0}^n C_n^m (1 + \lambda a)^m (\lambda a)^{n-m} = (1 + 2\lambda a)^n \varepsilon \rightarrow +\infty (\tau \rightarrow 0) \Rightarrow$ 计算不稳定性 (即使初值很小, 但多次迭代后近似值很大, 出现明显的误差. 此处 f 与 n 无关, 只依赖于 x, t, h). 出错原因: 不符合因果律—按特征线, 应当上游决定下游; 本格式中则是下游 (右侧的值) 决定上游 (左侧的值).

● 方案 2: 对空间导数, 采用一阶后差 (迎风差分格式):

$$\frac{u(x, t+\tau) - u(x, t)}{\tau} + a \frac{u(x, t) - u(x-h, t)}{h} = 0 \Rightarrow u(x, t+\tau) = (1 - \lambda a)u(x, t) + \lambda a u(x-h, t).$$

稳定性分析 (CFL 条件): $u(x, t) = u(x, n\tau) = ((1 - \lambda a)I + \lambda aE^{-1})^n f(x) = \sum_{m=0}^n C_n^m (1 - \lambda a)^m (\lambda a)^{n-m} f(x - (n-m)h)$. $\lambda a < 1 \Leftrightarrow \tau a < h$

(Courant-Friedrichs-Lewy 条件) $\Rightarrow$ i) 若 $|f| \leq \varepsilon$, 则 $|u(x, t)| \leq \varepsilon$ (有计算稳定性); ii) 所依赖初值区间 $[x - nh, x]$ 在 x 点上游 (左侧), 且包含过 (x, t) 点特征线 $X = a(T - t) + x$ (这里 T 是自变量, X 是因变量) 的初值 $x - at$ (注意 $nh = t/\lambda$, 所以 $at < nh$); iii) 收敛性: 差分格式的解收敛到精确解 (见下页证明).

一阶线性常系数输运方程的初值问题及其离散化

● PDE 问题: $u_t + au_x = 0$, $u(x, 0) = f(x)$; $x \in \mathbb{R}, t > 0$. 假设常数 $a > 0$. 精确解: $u(x, t) = f(x - at)$ (速度为 a 的右行波)

● 离散问题: τ -时间步长, h -空间步长. 置 $\lambda \doteq \tau/h$. 对时间导数, 采用一阶前差.

● 方案 1: 对空间导数, 采用一阶前差:

$$\frac{u(x, t+\tau) - u(x, t)}{\tau} + a \frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h} = 0 \Rightarrow u(x, t+\tau) = (1 + \lambda a)u(x, t) - \lambda a u(x+h, t).$$

稳定性分析: 记平移算子 $E: (Ef)(x) \doteq f(x+h)$, I : 恒等映射. 则 $u(x, t+\tau) = ((1 + \lambda a)I - \lambda aE)u(x, t) \Rightarrow u(x, n\tau) = ((1 + \lambda a)I - \lambda aE)^n u(x, 0) =$

$\sum_{m=0}^n C_n^m (1 + \lambda a)^m (-\lambda aE)^{n-m} f(x) = \sum_{m=0}^n C_n^m (1 + \lambda a)^m (-\lambda a)^{n-m} f(x + (n-m)h)$. 对固定的 x, t, h , 设 $t = n\tau, \forall \varepsilon > 0$, 可构造 f 使得

$f(x + (n-m)h) = (-1)^{n-m} \varepsilon$, 从而 $u(x, t) = \varepsilon \sum_{m=0}^n C_n^m (1 + \lambda a)^m (\lambda a)^{n-m} = (1 + 2\lambda a)^n \varepsilon \rightarrow +\infty (\tau \rightarrow 0) \Rightarrow$ 计算不稳定性 (即使初值很小, 但

多次迭代后近似值很大, 出现明显的误差. 此处 f 与 n 无关, 只依赖于 x, t, h). 出错原因: 不符合因果律—按特征线, 应当上游决定下游; 本格式中则是下游 (右侧的值) 决定上游 (左侧的值).

● 方案 2: 对空间导数, 采用一阶后差 (迎风差分格式):

$$\frac{u(x, t+\tau) - u(x, t)}{\tau} + a \frac{u(x, t) - u(x-h, t)}{h} = 0 \Rightarrow u(x, t+\tau) = (1 - \lambda a)u(x, t) + \lambda a u(x-h, t).$$

稳定性分析 (CFL 条件): $u(x, t) = u(x, n\tau) = ((1 - \lambda a)I + \lambda aE^{-1})^n f(x) = \sum_{m=0}^n C_n^m (1 - \lambda a)^m (\lambda a)^{n-m} f(x - (n-m)h)$. $\lambda a < 1 \Leftrightarrow \tau a < h$

(Courant-Friedrichs-Lewy 条件) $\Rightarrow$ i) 若 $|f| \leq \varepsilon$, 则 $|u(x, t)| \leq \varepsilon$ (有计算稳定性); ii) 所依赖初值区间 $[x - nh, x]$ 在 x 点上游 (左侧), 且包含过 (x, t) 点特征线 $X = a(T - t) + x$ (这里 T 是自变量, X 是因变量) 的初值 $x - at$ (注意 $nh = t/\lambda$, 所以 $at < nh$); iii) 收敛性: 差分格式的解收敛到精确解 (见下页证明).

一阶线性常系数输运方程的初值问题及其离散化

● PDE 问题: $u_t + au_x = 0$, $u(x, 0) = f(x)$; $x \in \mathbb{R}, t > 0$. 假设常数 $a > 0$. 精确解: $u(x, t) = f(x - at)$ (速度为 a 的右行波)

● 离散问题: τ -时间步长, h -空间步长. 置 $\lambda \doteq \tau/h$. 对时间导数, 采用一阶前差.

● 方案 1: 对空间导数, 采用一阶前差:

$$\frac{u(x, t+\tau) - u(x, t)}{\tau} + a \frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h} = 0 \Rightarrow u(x, t+\tau) = (1 + \lambda a)u(x, t) - \lambda a u(x+h, t).$$

稳定性分析: 记平移算子 $E: (Ef)(x) \doteq f(x+h)$, I : 恒等映射. 则 $u(x, t+\tau) = ((1 + \lambda a)I - \lambda aE)u(x, t) \Rightarrow u(x, n\tau) = ((1 + \lambda a)I - \lambda aE)^n u(x, 0) =$

$\sum_{m=0}^n C_n^m (1 + \lambda a)^m (-\lambda aE)^{n-m} f(x) = \sum_{m=0}^n C_n^m (1 + \lambda a)^m (-\lambda a)^{n-m} f(x + (n-m)h)$. 对固定的 x, t, h , 设 $t = n\tau, \forall \varepsilon > 0$, 可构造 f 使得

$f(x + (n-m)h) = (-1)^{n-m} \varepsilon$, 从而 $u(x, t) = \varepsilon \sum_{m=0}^n C_n^m (1 + \lambda a)^m (\lambda a)^{n-m} = (1 + 2\lambda a)^n \varepsilon \rightarrow +\infty (\tau \rightarrow 0) \Rightarrow$ 计算不稳定性 (即使初值很小, 但

多次迭代后近似值很大, 出现明显的误差. 此处 f 与 n 无关, 只依赖于 x, t, h). 出错原因: 不符合因果律—按特征线, 应当上游决定下游; 本格式中则是下游 (右侧的值) 决定上游 (左侧的值).

● 方案 2: 对空间导数, 采用一阶后差 (迎风差分格式):

$$\frac{u(x, t+\tau) - u(x, t)}{\tau} + a \frac{u(x, t) - u(x-h, t)}{h} = 0 \Rightarrow u(x, t+\tau) = (1 - \lambda a)u(x, t) + \lambda a u(x-h, t).$$

稳定性分析 (CFL 条件): $u(x, t) = u(x, n\tau) = ((1 - \lambda a)I + \lambda aE^{-1})^n f(x) = \sum_{m=0}^n C_n^m (1 - \lambda a)^m (\lambda a)^{n-m} f(x - (n-m)h)$. $\lambda a < 1 \Leftrightarrow \tau a < h$

(Courant-Friedrichs-Lewy 条件) $\Rightarrow$ i) 若 $|f| \leq \varepsilon$, 则 $|u(x, t)| \leq \varepsilon$ (有计算稳定性); ii) 所依赖初值区间 $[x-nh, x]$ 在 x 点上游 (左侧), 且包含过 (x, t) 点特征线 $X = a(T-t) + x$ (这里 T 是自变量, X 是因变量) 的初值 $x - at$ (注意 $nh = t/\lambda$, 所以 $at < nh$); iii) 收敛性: 差分格式的解收敛到精确解 (见下页证明).

一阶线性常系数输运方程的初值问题及其离散化

● PDE 问题: $u_t + au_x = 0$, $u(x, 0) = f(x)$; $x \in \mathbb{R}, t > 0$. 假设常数 $a > 0$. 精确解: $u(x, t) = f(x - at)$ (速度为 a 的右行波)

● 离散问题: τ -时间步长, h -空间步长. 置 $\lambda \doteq \tau/h$. 对时间导数, 采用一阶前差.

● 方案 1: 对空间导数, 采用一阶前差:

$$\frac{u(x, t+\tau) - u(x, t)}{\tau} + a \frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h} = 0 \Rightarrow u(x, t+\tau) = (1 + \lambda a)u(x, t) - \lambda a u(x+h, t).$$

稳定性分析: 记平移算子 $E: (Ef)(x) \doteq f(x+h)$, I : 恒等映射. 则 $u(x, t+\tau) = ((1 + \lambda a)I - \lambda aE)u(x, t) \Rightarrow u(x, n\tau) = ((1 + \lambda a)I - \lambda aE)^n u(x, 0) =$

$\sum_{m=0}^n C_n^m (1 + \lambda a)^m (-\lambda aE)^{n-m} f(x) = \sum_{m=0}^n C_n^m (1 + \lambda a)^m (-\lambda a)^{n-m} f(x + (n-m)h)$. 对固定的 x, t, h , 设 $t = n\tau, \forall \varepsilon > 0$, 可构造 f 使得

$f(x + (n-m)h) = (-1)^{n-m} \varepsilon$, 从而 $u(x, t) = \varepsilon \sum_{m=0}^n C_n^m (1 + \lambda a)^m (\lambda a)^{n-m} = (1 + 2\lambda a)^n \varepsilon \rightarrow +\infty (\tau \rightarrow 0) \Rightarrow$ 计算不稳定性 (即使初值很小, 但

多次迭代后近似值很大, 出现明显的误差. 此处 f 与 n 无关, 只依赖于 x, t, h). 出错原因: 不符合因果律—按特征线, 应当上游决定下游; 本格式中则是下游 (右侧的值) 决定上游 (左侧的值).

● 方案 2: 对空间导数, 采用一阶后差 (迎风差分格式):

$$\frac{u(x, t+\tau) - u(x, t)}{\tau} + a \frac{u(x, t) - u(x-h, t)}{h} = 0 \Rightarrow u(x, t+\tau) = (1 - \lambda a)u(x, t) + \lambda a u(x-h, t).$$

稳定性分析 (CFL 条件): $u(x, t) = u(x, n\tau) = ((1 - \lambda a)I + \lambda aE^{-1})^n f(x) = \sum_{m=0}^n C_n^m (1 - \lambda a)^m (\lambda a)^{n-m} f(x - (n-m)h)$. $\lambda a < 1 \Leftrightarrow \tau a < h$

(Courant-Friedrichs-Lewy 条件) $\Rightarrow$ i) 若 $|f| \leq \varepsilon$, 则 $|u(x, t)| \leq \varepsilon$ (有计算稳定性); ii) 所依赖初值区间 $[x - nh, x]$ 在 x 点上游 (左侧), 且包含过 (x, t) 点特征线 $X = a(T - t) + x$ (这里 T 是自变量, X 是因变量) 的初值 $x - at$ (注意 $nh = t/\lambda$, 所以 $at < nh$); iii) 收敛性: 差分格式的解收敛到精确解 (见下页证明).

CFL 条件 $|a|\Delta t < \Delta x \Rightarrow$ 迎风差分格式的收敛性

设 $f \in C^2$ 且一阶和两阶导数有界, 固定 $\lambda = \tau/h$. 记 $u(x, t) = f(x - at)$ 是精确解, $v(x, t)$ 是迎风差分格式得到的近似解, 由迭代关系 $v(x, t + \tau) = (1 - \lambda a)v(x, t) + \lambda a v(x - h, t)$ 确定. 置 $w = u - v$, 那么

$$\begin{aligned} & |w(x, t + \tau) - [(1 - \lambda a)w(x, t) + \lambda a w(x - h, t)]| = |u(x, t + \tau) - [(1 - \lambda a)u(x, t) + \lambda a u(x - h, t)]| \\ & = |f(x - at - a\tau) - [(1 - \lambda a)f(x - at) + \lambda a f(x - h - at)]| \quad (\text{Taylor 展开}) \\ & = |f(x - at) - f'(x - at)a\tau + O(\tau^2) - (1 - \lambda a)f(x - at) - \lambda a[f(x - at) - f'(x - at)h + O(h^2)]| = O(\tau^2 + h^2) = O(h^2), \\ & \text{从而 } \sup_x |w(x, t + \tau)| \leq (1 - \lambda a) \sup_x |w(x, t)| + \lambda a \sup_x |w(x - h, t)| + O(h^2) \xrightarrow[\text{CFL 条件: } 0 < \lambda a < 1]{=} \sup_x |w(x, t)| + O(h^2). \end{aligned}$$

对固定的 $t > 0$, 设 $t = n\tau$, 则

$$n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \tau \rightarrow 0 \Leftrightarrow h \rightarrow 0 \Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} |w(x, 0)| = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \max_{x \in [nh, (n+1)h]} |f(x) - f(nh)| = O(h) \quad (\text{Lagrange 中值定理}),$$

于是 $\sup_x |w(x, t)| \leq \sup_x |w(x, 0)| + nO(h^2) = O(h) + \frac{t}{\tau}hO(h) = (1 + \frac{t}{\lambda})O(h) = O(h) \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)$. 收敛性得证!

CFL 条件的物理意义: 不同网格内的波之间没有相互作用 (双曲型方程的本质性质—扰动 (波) 具有有限传播速度, 因果律)

热传导方程初边值问题的显式差分格式

- 典型问题 ($b > 0$): $u_t = bu_{xx}$, $x \in (0, 1)$, $t > 0$; $u(x, 0) = f(x)$, $x \in (0, 1)$; $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$, $t > 0$.
- 离散化: $h = 1/M$ — 空间步长, $\tau = T/N$ — 时间步长; $w_i^j \doteq u(ih, j\tau)$, $i = 0, 1, \dots, M$, $j = 0, \dots, N$; 齐次边界条件 $\Rightarrow w_0^j = 0 = w_M^j$; 时间导数用一阶前差, 空间导数用二阶中心差 $\Rightarrow$ 显式格式:

$$\frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} = \frac{b}{h^2} (u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)) \xrightarrow[\sigma = \frac{b\tau}{h^2}]{x=ih, t=j\tau} w_i^{j+1} = w_i^j + \sigma(w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j),$$

从而对 $i = 1, \dots, m \doteq M - 1$; $j = 1, \dots$, 有 $w_i^{j+1} = \sigma w_{i+1}^j + (1 - 2\sigma)w_i^j + \sigma w_{i-1}^j$. (✕)

- 稳定性分析: 置 $W^j \doteq (w_1^j, \dots, w_m^j)^\top$, 则 (✕) 可写为 $W^{j+1} = AW^j \Rightarrow W^j = A^j W^0$, W^0 由初值条件唯一确定.

$$A \doteq (1 - \sigma)I_m - \sigma T = \begin{pmatrix} 1 - 2\sigma & \sigma & 0 & \cdots & 0 \\ \sigma & 1 - 2\sigma & \sigma & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma & 1 - 2\sigma & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 - 2\sigma \end{pmatrix}_{m \times m}, \quad T \doteq \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{m \times m}.$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{m \times m}, \quad W^j = A^j W^0, \quad A = (1 - \sigma)I_m - \sigma T, \quad \sigma = \frac{b\tau}{h^2}, \quad I_m: m \text{ 阶单位阵}$$

定理

矩阵 T 的特征值为 $\lambda_j = 1 - 2 \cos \frac{j\pi}{m+1}$, ($j = 1, \dots, m$), 对应的右特征向量是 $r_j = (\sin \frac{j\pi}{m+1}, \sin \frac{2j\pi}{m+1}, \dots, \sin \frac{mj\pi}{m+1})^\top$.

证明. 由和差化积公式 $\sin(i-1)x + \sin(i+1)x = 2 \sin ix \cos x$ 得到 $-\sin(i-1)x + \sin ix - \sin(i+1)x = (1 - 2 \cos x) \sin ix$, 写作矩阵形式, 就是

$$T(\sin x, \sin 2x, \dots, \sin mx)^\top = (1 - 2 \cos x)(\sin x, \sin 2x, \dots, \sin mx)^\top.$$

取 $x = \frac{j\pi}{m+1}$, $j = 1, \dots, m$, 就得到互不相同的 λ_j 及其对应的右特征向量 r_j . □

● A 的特征值: $1 - \sigma - \sigma(1 - 2 \cos \frac{j\pi}{m+1}) = 1 - 2\sigma(1 - \cos \frac{j\pi}{m+1}) \in (1 - 4\sigma, 1)$.

● $W^j = A^j W^0$ 有界 $\Leftarrow$ 矩阵 A 的特征值在复平面单位圆内 $\Leftarrow 1 - 4\sigma > -1 \Leftarrow \boxed{0 < \sigma < 1/2}$ ($\Rightarrow$ 保证了 (⊗): $w_i^{j+1} = \sigma w_{i+1}^j + (1 - 2\sigma)w_i^j + \sigma w_{i-1}^j$ 的右端是凸组合)

结论- 显式格式稳定的条件: 对步长要求 $\boxed{2b\tau < h^2}$ (与双曲型方程的 CFL 条件对应! 但对时间步长要求更小, 所以算到指定时间需要更多迭代.)

热传导方程初边值问题的隐式差分格式

- 典型问题 ($b > 0$): $u_t = bu_{xx}, x \in (0, 1), t > 0; u(x, 0) = f(x), x \in (0, 1); u(0, t) = 0, u(1, t) = 0, t > 0.$
- 离散化: $h = 1/M$ — 空间步长, $\tau = T/N$ — 时间步长; $w_i^j \doteq u(ih, j\tau), i = 0, 1, \dots, M, j = 0, \dots, N$; 齐次边界条件 $\Rightarrow w_0^j = 0 = w_M^j$; 时间导数用一阶后差, 空间导数用二阶中心差 $\Rightarrow$ 隐式格式: $(\sigma \doteq \frac{b\tau}{h^2})$

$$\frac{1}{\tau}(w_i^j - w_i^{j-1}) = \frac{b}{h^2}(w_{i-1}^j - 2w_i^j + w_{i+1}^j) \Rightarrow w_i^j = w_i^{j-1} + \sigma(w_{i-1}^j - 2w_i^j + w_{i+1}^j)$$

$$\Rightarrow \boxed{-\sigma w_{i+1}^j + (1 + 2\sigma)w_i^j - \sigma w_{i-1}^j = w_i^{j-1}} \quad (\text{需解出左边的未知量})$$

- 稳定性分析: 矩阵形式 $BW^j = W^{j-1} \Rightarrow \boxed{W^j = (B^{-1})^j W^0}$, $B = (1 + \sigma)I_m + \sigma T$.
 B 的特征值是 $1 + \sigma + \sigma(1 - 2\cos \frac{j\pi}{m+1}) = 1 + 2\sigma(1 - \cos \frac{j\pi}{m+1}) \in (1, 1 + 4\sigma)$. 于是 B^{-1} 的特征值位于区间 $(\frac{1}{1+4\sigma}, 1)$ 内. 从而迭代 $W^j = (B^{-1})^j W^0$ 总是稳定的.
- 结论 — 隐式格式对计算步长无限制, 但迭代时需要反解一个代数方程组.

稳态方程: 扩散和输运效应的竞争

- 典型问题: $a, b \in \mathbb{R}, b > 0, au_x - bu_{xx} = 0, \forall x \in (0, 1); u(0) = 0, u(1) = 1$. 精确解:
$$u(x) = \frac{1 - e^{\alpha x}}{1 - e^{\alpha}}, \quad x \in [0, 1],$$

其中 $\alpha \doteq a/b$ 体现输运项与扩散项的相对强度.

- 离散化方案 (一): 对一阶导数和二阶导数都用中心差分格式, $u_k = u(kh), h = 1/N, k = 0, \dots, N; \beta \doteq \alpha h/2$. 则

$$a \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h} - b \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} = 0 \Rightarrow \text{差分方程} \quad (1 - \beta)u_{k+1} - 2u_k + (1 + \beta)u_{k-1} = 0, \quad 1 \leq k \leq N-1.$$

- 差分方程的求解 (类比常系数 ODE): 设 $u_k = \lambda^k \Rightarrow$ 特征方程 $(1 - \beta)\lambda^2 - 2\lambda + (1 + \beta) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 =$

$$\frac{1+\beta}{1-\beta} \Leftrightarrow u_k = C_1 + C_2 \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^k \xrightarrow[u_0=0, u_N=1]{\text{边界条件}} u_k = U^{(N)}(k) \doteq \frac{1 - r^k}{1 - r^N}, \quad r = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}, \quad \beta \doteq \alpha h/2$$

- 稳定性分析: $r < 0 \Leftrightarrow 1 - \beta^2 < 0 \Leftrightarrow |\beta| > 1 \Leftrightarrow h > 2/|\alpha|$ 时出现 r^k 正负交错, 从而 $U^{(N)}(k)$ 振荡 $\Rightarrow$ 计算不稳定性

- $h > 2/|\alpha| \Leftrightarrow |a|h > 2b:$

在 h 大小的尺度上输运效应强于扩散效应 (需要考虑关于输运方程的迎风差分格式, 上游确定下游).

- 典型问题: $a, b \in \mathbb{R}, b > 0, au_x - bu_{xx} = 0, \forall x \in (0, 1); u(0) = 0, u(1) = 1$. 精确解: $u(x) = \frac{1 - e^{\alpha x}}{1 - e^{\alpha}}, x \in [0, 1]$,

其中 $\alpha \doteq a/b$ 体现输运项与扩散项的相对强度

- 离散化方案 (二): 对一阶导数采用迎风格式 ($a > 0$ 时用后差, $a < 0$ 时用前差), 二阶导数用中心差分格式, $u_k = u(kh), h = 1/N, k = 0, \dots, N$;

$$a \frac{u_k^R - u_k^L}{h} - b \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} = 0, \quad 1 \leq k \leq N-1; \quad u_0 = 0, \quad u_N = 1; \quad u_k^R = \begin{cases} u_k, & \text{若 } a > 0, \\ u_{k+1}, & \text{若 } a < 0; \end{cases} \quad u_k^L = \begin{cases} u_{k-1}, & \text{若 } a > 0, \\ u_k, & \text{若 } a < 0. \end{cases}$$

- $a > 0$ 情形: 差分方程 $a \frac{u_k - u_{k-1}}{h} - b \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} = 0$ 解得 $u_k = U^{(N)}(k) \doteq \frac{1-r^k}{1-r^N}$.

i) $r \doteq 1 + \alpha h = 1 + \frac{a}{b}h > 0$, 所以 $U^{(N)}(k)$ 关于 k 递增, 计算稳定;

ii) 收敛性: 取定 $x \in (0, 1)$, 设 $\frac{k}{N} \leq x < \frac{k+1}{N}$, (注意 k 与 N 有关), 或 $Nx - 1 < k \leq Nx$. 那么用夹挤收敛定理,

$$e^{\alpha x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{N}\right)^{Nx} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{N}\right)^{Nx-1} \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} r^k \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} r^k \leq$$

$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{\alpha}{N}\right)^N \right]^x = e^{\alpha x} \Rightarrow \hat{U}^{(N)}(x) \rightarrow u(x)$, 其中 $\hat{U}^{(N)}(x)$ 是分段折线函数, 在区间 $[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]$ 上其表达式为 $U^{(N)}(k) + (x - \frac{k}{N}) \cdot N \cdot (U^{(N)}(k+1) - U^{(N)}(k))$. 注意 $\hat{U}^{(N)}(x)$ 是关于 x 单调递增的连续函数.

- $a < 0$ 情形: 类似讨论.

输运-扩散方程初边值问题的显式差分格式

定解问题 (其中 a, b 是正的常数):

$$u_t + au_x - bu_{xx} = 0, x \in (0, 1), t > 0; u(x, 0) = x, x \in (0, 1); u(0, t) = 0, u(1, t) = 1, t > 0 \quad (\clubsuit)$$

- 离散化 (显式格式): 时间导数用一阶前差; 输运项 (空间变量一阶导数) 用迎风格式 ($a > 0$ 对应一阶后差); 扩散项 (空间变量二阶导数) 用中心差分格式, ($\Delta t = \tau$ — 时间步长, $\Delta x = h$ — 空间步长) $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{u_k^{l+1} - u_k^l}{\tau} + a \frac{u_k^l - u_{k-1}^l}{h} - b \frac{u_{k+1}^l - 2u_k^l + u_{k-1}^l}{h^2} = 0} \Rightarrow u_k^{l+1} = \underbrace{\frac{b\tau}{h^2}}_{>0} u_{k+1}^l + \underbrace{\left[1 - \frac{(ah + 2b)\tau}{h^2}\right]}_{>0 \text{ (稳定性条件)}} u_k^l + \underbrace{\frac{(ah + b)\tau}{h^2}}_{>0} u_{k-1}^l \quad (\spadesuit)$$

- 稳定性 (离散后的极值原理): 若 $a > 0, b > 0, \Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{a\Delta x + 2b}$, 且初边值条件一致有界 ($\exists M > 0$ 使得 $|u_k^0| + |u_0^l| + |u_N^l| \leq M, \forall 0 \leq k \leq N, l \geq 0$), 则 $|u_k^l| \leq M, \forall 0 \leq k \leq N, l \geq 0$.

证明. 数学归纳法. $l = 0$ 时用已知条件. 设结论对 l 成立. 由于 $(\spadesuit)$ 右端是个凸组合, 可知对 $k = 1, \dots, N-1$,

$$-M \leq \min_{j=k-1, k, k+1} u_j^l \leq u_k^{l+1} \leq \max_{j=k-1, k, k+1} u_j^l \leq M,$$

故 $|u_k^{l+1}| \leq M$. (对 $k = 0$ 和 N 情形用边界条件.)

□

- 极值原理: 设 $u \in C^2([0, 1] \times [0, +\infty))$ 是 $(\clubsuit)$ 的经典解, 则 $0 \leq u(x, t) \leq 1, \forall x \in [0, 1], t \geq 0$. (证明思路: 置 $v = u - \epsilon t$, 证明 v 的极值点只能落在初值和边值边界. 为此用反证法, 考虑内点是极值点时其各阶导数的符号性质.)

输运-扩散方程初边值问题的隐式格式

定解问题 (其中 a, b 是正的常数):

$$u_t + au_x - bu_{xx} = 0, x \in (0, 1), t > 0; u(x, 0) = x, x \in (0, 1); u(0, t) = 0, u(1, t) = 1, t > 0 \quad (\clubsuit)$$

- 离散化 (隐式格式) — 时间导数用一阶后差; 输运项 (空间变量一阶导数) 用迎风格式 ($a > 0$ 对应一阶后差); 扩散项 (空间变量二阶导数) 用中心差分格式, (τ — 时间步长, h — 空间步长) $\Rightarrow$

$$\frac{u_k^{l+1} - u_k^l}{\tau} + a \frac{u_k^{l+1} - u_{k-1}^{l+1}}{h} - b \frac{u_{k+1}^{l+1} - 2u_k^{l+1} + u_{k-1}^{l+1}}{h^2} = 0 \Rightarrow u_k^{l+1} = u_k^l - \frac{\tau}{h^2} \underbrace{\left[(ah + 2b)u_k^{l+1} - bu_{k+1}^{l+1} - (ah + b)u_{k-1}^{l+1} \right]}_{\triangleq \heartsuit_k^{l+1}} \quad (\dagger)$$

- 稳定性 (离散化极值原理) — 条件: $a > 0, b > 0$, 且 $\exists M > 0$ 使得 $|u_k^0| + |u_0^l| + |u_N^l| \leq M, \forall 0 \leq k \leq N, l \geq 0$. 结论: $|u_k^l| \leq M, \forall 0 \leq k \leq N, l \geq 0$.

证明. 数学归纳法. $l = 0$ 时的结论由条件保证. 设结论对任意 $l \geq 0$ 成立, 由 $(\dagger)$ 反解出 $u_k^{l+1}, k = 1, \dots, N-1$. 设 $|u_j^{l+1}| = \max_{0 \leq k \leq N} |u_k^{l+1}|$. i) 若 $j = 0$ 或 N , 由条件可知对 $l+1$ 结论仍成立. ii) 设 $0 < j < N$, 若 $u_j^{l+1} \geq 0$, 则 $\heartsuit_j^{l+1} \geq 0$ (注意其中 $ah + 2b = b + (ah + b)$), 从而 $(0 \leq) u_j^{l+1} \leq u_j^l \leq M$, 即 $\max_{0 \leq k \leq N} |u_k^{l+1}| \leq M$, 结论对 $l+1$ 成立. iii) 若 $u_j^{l+1} < 0$, 则 $\heartsuit_j^{l+1} < 0$ (注意系数均非负), 从而 $(0 >) u_j^{l+1} > u_j^l \geq -M$, 依旧有 $|u_j^{l+1}| = \max_{0 \leq k \leq N} |u_k^{l+1}| \leq M$. □

- 结论 — 隐式格式对步长无限制, 但每次迭代都需要解线性代数方程组.

波动方程初边值问题的有限差分格式

- 问题: $u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 \leq x \leq l, T \geq t \geq 0; u(0, t) = 0, u(l, t) = 0; u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x)$
- 方程离散化 — 二阶中心差分格式: 空间步长 $h > 0$, 时间步长 $\tau > 0, h = l/N, \tau = T/M, x_i = ih, t_j = j\tau$, 近似解 $w_i^j = u(x_i, t_j) (0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq M)$

$$\frac{w_i^{j+1} - 2w_i^j + w_i^{j-1}}{\tau^2} - a^2 \frac{w_{i-1}^j - 2w_i^j + w_{i+1}^j}{h^2} = 0 \xrightarrow{\sigma \doteq \frac{a\tau}{h}} \boxed{w_i^{j+1} = \sigma^2 w_{i-1}^j + 2(1 - \sigma^2)w_i^j + \sigma^2 w_{i+1}^j - w_i^{j-1}} \quad (\clubsuit)$$

- 边界条件离散化: $w_0^j = 0, w_N^j = 0, j = 0, 1, \dots$

- 初始条件离散化: $\boxed{w_i^0 = f(x_i)}$; 下面确定 w_i^1 :

一阶中心差分格式 $u_t(x_i, t_j) \sim \frac{w_i^{j+1} - w_i^{j-1}}{2\tau}$ (误差为 $O(\tau^2)$, 与方程离散化的误差 $O(h^2 + \tau^2)$ 相

配) $\Rightarrow g(ih) = u_t(ih, 0) \sim \frac{w_i^1 - w_i^{-1}}{2\tau}$, 由此定义 $w_i^{-1} \doteq w_i^1 - 2\tau g(x_i)$, 代入 $(\clubsuit)$ (其中取 $j = 0$ 并移项

$$\Rightarrow \boxed{w_i^1 = (1 - \sigma^2)w_i^0 + \tau g(x_i) + \frac{\sigma^2}{2}(w_{i-1}^0 + w_{i+1}^0)}$$

- 迭代关系式
$$\begin{cases} w_i^{j+1} = \sigma^2 w_{i-1}^j + 2(1 - \sigma^2)w_i^j + \sigma^2 w_{i+1}^j - w_i^{j-1}, \\ w_i^0 = f(x_i), \quad w_i^1 = (1 - \sigma^2)w_i^0 + \tau g(x_i) + \frac{\sigma^2}{2}(w_{i-1}^0 + w_{i+1}^0). \end{cases}$$

- 矩阵形式: 记 $A = \begin{pmatrix} 2 - 2\sigma^2 & \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \sigma^2 & 2 - 2\sigma^2 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 2 - 2\sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 - 2\sigma^2 \end{pmatrix}_{(N-1) \times (N-1)}, \quad \sigma = \frac{a\tau}{h} = \frac{a\Delta t}{\Delta x},$

$$W^j = (w_1^j, \dots, w_{N-1}^j)^\top, \quad f^0 = (f(x_1), \dots, f(x_{N-1}))^\top, \quad g^0 = (g(x_1), \dots, g(x_{N-1}))^\top$$

$$W^1 = \frac{1}{2}Af^0 + \tau g^0, \quad W^{j+1} = AW^j - W^{j-1}$$

- 分块矩阵写法:
$$\begin{pmatrix} W^{j+1} \\ W^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^j \\ W^{j-1} \end{pmatrix}$$

- Courant-Friedrichs-Lewy 条件: 上述格式稳定 $\Leftrightarrow \sigma \leq 1$

定理

当 $\sigma = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ 时差分格式 $\begin{pmatrix} W^{j+1} \\ W^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^j \\ W^{j-1} \end{pmatrix}$ 稳定.

证明. 1. 由 Laplace 展开定理, $B = \begin{pmatrix} A & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ 的行列式的绝对值为 1, 若它有位于复平面单位圆内的特征值, 就必然有在单位圆外的特征值. 设 λ 是它的非零特征值, 对应右特征向量为 $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$, 即 $\begin{pmatrix} A & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda Y = AY - Z, \lambda Z = Y \Rightarrow AY = (\lambda + \frac{1}{\lambda})Y \Rightarrow \lambda + \frac{1}{\lambda}$ 是 A 的特征值.

2. 考虑 Joukowski 变换 $w = z + \frac{1}{z}$, 由于 $w = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$, 它将 $|z| = 1$ 映为区间 $[-2, 2]$. 反之, 由一元二次方程求根公式, $[-2, 2]$ 的原像是单位圆周.

3. 注意到 $A = (2 - \sigma^2)I - \sigma^2 T$, 其中 $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{m \times m}$ ($m = N - 1$), 回忆下述定理, 可知 A 的特征值为

$\lambda + \frac{1}{\lambda} = 2 - \sigma^2 - \sigma^2(1 - 2 \cos \frac{j\pi}{m+1}) \in (2 - 4\sigma^2, 2) \subset (-2, 2)$ (如果 $\sigma \leq 1$) $\Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow$ 计算稳定.

定理 (复习)

矩阵 T 的特征值为 $\lambda_j = 1 - 2 \cos \frac{j\pi}{m+1}$, ($j = 1, \dots, m$), 对应的右特征向量是 $r_j = (\sin \frac{j\pi}{m+1}, \sin \frac{2j\pi}{m+1}, \dots, \sin \frac{mj\pi}{m+1})^\top$.

Laplace 方程

- 典型问题: 平面矩形区域 $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ 上 Laplace 方程 Dirichlet 问题: $\Delta u = 0, u|_{\partial\Omega} = g(x, y)$

- 离散化: 步长 $\Delta x, \Delta y$, 记 $u_{j,k} = u(j\Delta x, k\Delta y)$, 用二阶中心差分格式

$$\Rightarrow \frac{u_{j+1,k} - 2u_{j,k} + u_{j-1,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{j,k+1} - 2u_{j,k} + u_{j,k-1}}{(\Delta y)^2} = 0 \xrightarrow{r=(\Delta y/\Delta x)^2} u_{j,k} = \frac{1}{2(1+r)} [u_{j,k+1} + u_{j,k-1} + r(u_{j+1,k} + u_{j-1,k})]$$

取 $r = 1 \Rightarrow$ 五点格式 $u_{j,k} = \frac{1}{4} [u_{j,k+1} + u_{j,k-1} + u_{j+1,k} + u_{j-1,k}] \Rightarrow$ 平均值公式.

- 解法一: 直接求解线性代数方程组 $u_{j,k+1} + u_{j,k-1} + u_{j+1,k} + u_{j-1,k} - 4u_{j,k} = 0$ (大规模对角占优阵求逆, 较为困难)

- 解法二: 热流方法 (Jacobi 迭代)– 任取初始值 $u_{j,k}^{(1)}$ 后迭代计算 $u_{j,k}^{(n+1)} = \frac{1}{4} [u_{j,k+1}^{(n)} + u_{j,k-1}^{(n)} + u_{j+1,k}^{(n)} + u_{j-1,k}^{(n)}]$ (缺点: 收敛慢; 本质: 对热方程 $v_t = v_{xx} + v_{yy}$ 的时间导数用一阶前差, 空间导数用二阶中心差离散化, 其中取步长 $\Delta x = \Delta y, \Delta t = (\Delta x)^2/4$, 其稳态解就是 Laplace 方程的解.)

- 解法三: 松弛迭代法
$$u_{j,k}^{(n+1)} = u_{j,k}^{(n)} + \omega \left[u_{j,k+1}^{(n)} + u_{j,k-1}^{(n+1)} + u_{j+1,k}^{(n)} + u_{j-1,k}^{(n+1)} - 4u_{j,k}^{(n)} \right] \quad (\omega \in (0, \frac{1}{2})\text{-松弛变量; 求解时按照行从下到上, 每行从左向右的顺序对格点计算, 从而式子右端的 } u_{j,k-1}^{(n+1)}, u_{j-1,k}^{(n+1)} \text{ 两项由于位于要计算格点的左侧和下方, 根据边界条件或前面的计算结果, 是已知的})(\text{优点: 收敛快, 极限满足五点格式})$$

数值解法与解的概念的关系

以 Laplace 方程 Dirichlet 问题为例: 在 Ω 内 $\Delta u = 0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u = f$.

对应不同的解的概念, 对其出现的偏导数离散化或将解用某些待定简单函数近似, 转化为线性代数问题求解.

- 定义 1 — 经典解: (有限差分法, 计算函数在格点的值)
- 定义 2 — 强解: 设 $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $u|_{\partial\Omega} = f$, 且对 Ω 内任意光滑闭曲面 S , 都有 $\int_S \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\sigma = 0$, 则称它是一个强解. (有限体积法, 计算函数在一个区间的积分平均值)
- 定义 3 — 变分解: Dirichlet 泛函 $J[u] = \int_{\Omega} |Du(x)|^2 dx$ 在容许类 $\mathcal{A} = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = f\}$ 上的极小元. (有限元素法 — Ritz 法, 区域三角剖分, 线性函数插值, 转化为多元函数极值问题)
- 定义 4 — 弱解: 设 $u \in \mathcal{A}$, 且对任意 $v \in C_c^1(\Omega)$, 成立 $\int_{\Omega} Du(x) \cdot Dv(x) dx = 0$. (有限元素法 — Galerkin 法)
- Feynman-Kac 公式: $u(x) = \mathbb{E}_{\omega}[f(X(\tau_x(\omega)), \omega)]$ (Brown 运动和 Wiener 测度、停时; 随机微分方程). (Monte-Carlo 方法, 随机模拟)

参考: 谷超豪、李大潜、陈恕行、沈玮熙、秦铁虎、是嘉鸿: 数学物理方程. 上海科学技术出版社, 1987 年. [第七章]

习题 1. 证明: 设 $f \in C^3$, 则 $f'(x) = \frac{1}{2h}(-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)) + O(h^2)$. (此结论用来离散化 Neumann 边值条件和 Robin 边值条件.)

阅读任务和作业

- 必读– 郇中丹, 黄海洋: 偏微分方程 (第二版), 高等教育出版社, 2013. [pp.38–50]
- 参考– Strauss, Walter A. Partial differential equations. An introduction. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992. (Second edition, 2008.) [第八章]
- 参考– Sauer, Timothy. Numerical Analysis. Second edition. Pearson Education Asia Ltd., 2012. [第八章]
- 参考– LeVeque, Randall J. Finite volume methods for hyperbolic problems. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

作业: P.41: 1, 2, 3; P.47: 1, 2.

最后更新: 2022-10-13

偏微分方程

第四讲 二阶线性偏微分方程的分类和特征面

袁海荣 (华东师范大学 数学科学学院)

2022 年 9 月 22 日

我们去看很多人写以前人的事,写了很多很漂亮的介绍和批评。可是你自己没有经历过这一条路的话,你事实上很难了解困难在什么地方,为什么人家会这样子想。要得到这个经验,不单要做习题,还要做比较困难的习题。做困难的习题有什么好处呢?困难的习题往往是几个比较基本的问题的组合。我自己看书的时候,常常会一本书一下子就看完了,觉得很高兴,因为看完了;可是重新再看,反而什么都不懂。我想大家都有这个经验,主要的原因是什么呢?我们没有学好这学科,做比较困难的题目的时候,你就会发觉会遇到困难。尤其是我们做一些题目的时候,往往就觉得似是而非,在脑子里面想,以为已经懂了、可以解决了、就一厢情愿的很快的解决它,很快的看完那一本书,事实上这是欺骗自己,也不是训练基本功夫的方法。一个好的题目,你应当坐下来用笔写下来一步一步地想,结果你会发现很多基本的步骤你根本没有弄清楚。当你弄清楚的时候,你去看你以前需要的定理在哪里、怎么证的、我想你会慢慢了解整个学问的精义在哪里。所以说,动笔去做题目是很重要的,我们做大学生的时候还愿意做这个事,往往做研究生的时候,就以为了不起,毕业以后更不用讲,不会动手去写。一个题目在那里,我们很了不起地以为自己懂了,有些是很明显,但有些是似是而非,好像差不多了,事实上不是,有很多巧妙在里面。我们一定要动手去做,当你在一门课里面,基本功夫搞得很清楚以后,你就发现书里面很多是错的。在发现书本里的错误时,你的基本功夫也不错了。

—丘成桐

学习要点

- 掌握自变量非线性变换下二阶线性 PDE 的变化规律
- 熟练掌握二阶线性 PDE 的分类及标准形
- 会计算两个自变量二阶方程的特征线, 并利用特征坐标求解方程
- 理解弱间断面和特征面的概念及其意义
- 了解一阶方程组的分类

学习要点

- 掌握自变量非线性变换下二阶线性 PDE 的变化规律
- 熟练掌握二阶线性 PDE 的分类及标准形
- 会计算两个自变量二阶方程的特征线, 并利用特征坐标求解方程
- 理解弱间断面和特征面的概念及其意义
- 了解一阶方程组的分类

学习要点

- 掌握自变量非线性变换下二阶线性 PDE 的变化规律
- 熟练掌握二阶线性 PDE 的分类及标准形
- 会计算两个自变量二阶方程的特征线, 并利用特征坐标求解方程
- 理解弱间断面和特征面的概念及其意义
- 了解一阶方程组的分类

学习要点

- 掌握自变量非线性变换下二阶线性 PDE 的变化规律
- 熟练掌握二阶线性 PDE 的分类及标准形
- 会计算两个自变量二阶方程的特征线, 并利用特征坐标求解方程
- 理解弱间断面和特征面的概念及其意义
- 了解一阶方程组的分类

学习要点

- 掌握自变量非线性变换下二阶线性 PDE 的变化规律
- 熟练掌握二阶线性 PDE 的分类及标准形
- 会计算两个自变量二阶方程的特征线, 并利用特征坐标求解方程
- 理解弱间断面和特征面的概念及其意义
- 了解一阶方程组的分类

学习要点

- 掌握自变量非线性变换下二阶线性 PDE 的变化规律
- 熟练掌握二阶线性 PDE 的分类及标准形
- 会计算两个自变量二阶方程的特征线, 并利用特征坐标求解方程
- 理解弱间断面和特征面的概念及其意义
- 了解一阶方程组的分类

二阶线性 PDE 的分类

- 二阶线性 PDE: $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij} u + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_j u + c(x)u = f(x)$. 置矩阵 $A(x) = (a_{ij}(x))_{n \times n}$, 行向量值函数

$$b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x)) \Rightarrow \text{矩阵形式 } \boxed{\text{Tr}(A D^2 u) + \langle b, Du \rangle + cu = f}. \quad (x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n)$$

由于 $D^2 u$ 是实对称阵, 利用矩阵迹的性质 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$, 通过将 A 换作 $(A + A^T)/2$, 可设上述 A 是实对称阵.

- 复习 (高等代数): n 元实二次型 $\langle A\xi, \xi \rangle$ (或实对称阵 A) 总可以化为标准形 (对角元为 $0, 1, -1$ 的对角阵). 不变量: 秩 和 符号差 (或正、负惯性指数)

[证明: 第一步: 存在正交阵 O ($\mathbb{R}^n$ 基底的旋转和反射) 使得 OAO^T 是对角阵 (对角元是 A 的特征值), 归纳法, Gram-Schmidt 正交化; 第二步: 基向量的伸缩变换]

- 二阶线性 PDE 的分类 (对每个点 x 而言) — **混合型方程: 在给定区域至少有两点其类型不同的方程**)

- 椭圆型: $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 n 或 $-n$ (即所有特征值非零且同号) [重点, Laplace 方程]
- 双曲型: $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 $n-2$ 或 $2-n$ (即所有特征值非零且只有一个与其它的异号) [重点, 波动方程]
- 超双曲型: $A(x)$ 秩为 n 且符号差的绝对值小于 $n-2$ (只有自变量个数 $n \geq 4$ 时才可能)
- 抛物型: $A(x)$ 秩为 $n-1$, 符号差是 $n-1$ 或 $1-n$, 且 $b(x)$ 不与 $\ker A(x)$ 正交 (即 $A(x)$ 只有一个零特征值且所有非零特征值同号, PDE 中关于 n 个自变量的偏导数要真正出现) [重点, 热传导方程]
- 广义抛物型: $A(x)$ 秩 $\leq n-1$ 且不满足抛物型条件 iv) 的其它二阶 PDE

二阶线性 PDE 的分类

- 二阶线性 PDE: $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij} u + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_j u + c(x)u = f(x)$. 置矩阵 $A(x) = (a_{ij}(x))_{n \times n}$, 行向量值函数

$$b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x)) \Rightarrow \text{矩阵形式 } \boxed{\text{Tr}(A D^2 u) + \langle b, Du \rangle + cu = f}. \quad (x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n)$$

由于 $D^2 u$ 是实对称阵, 利用矩阵迹的性质 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$, 通过将 A 换作 $(A + A^T)/2$, 可设上述 A 是实对称阵.

- 复习 (高等代数): n 元实二次型 $\langle A\xi, \xi \rangle$ (或实对称阵 A) 总可以化为标准形 (对角元为 $0, 1, -1$ 的对角阵). 不变量: 秩 和 符号差 (或正、负惯性指数)

[证明: 第一步: 存在正交阵 O ($\mathbb{R}^n$ 基底的旋转和反射) 使得 OAO^T 是对角阵 (对角元是 A 的特征值), 归纳法, Gram-Schmidt 正交化; 第二步: 基向量的伸缩变换]

- 二阶线性 PDE 的分类 (对每个点 x 而言) — **混合型方程: 在给定区域至少有两点其类型不同的方程**

- 椭圆型:** $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 n 或 $-n$ (即所有特征值非零且同号) [重点, Laplace 方程]
- 双曲型:** $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 $n-2$ 或 $2-n$ (即所有特征值非零且只有一个与其它的异号) [重点, 波动方程]
- 超双曲型:** $A(x)$ 秩为 n 且符号差的绝对值小于 $n-2$ (只有自变量个数 $n \geq 4$ 时才可能)
- 抛物型:** $A(x)$ 秩为 $n-1$, 符号差是 $n-1$ 或 $1-n$, 且 $b(x)$ 不与 $\ker A(x)$ 正交 (即 $A(x)$ 只有一个零特征值且所有非零特征值同号, PDE 中关于 n 个自变量的偏导数要真正出现) [重点, 热传导方程]
- 广义抛物型:** $A(x)$ 秩 $\leq n-1$ 且不满足抛物型条件 iv) 的其它二阶 PDE

二阶线性 PDE 的分类

- 二阶线性 PDE: $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij} u + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_j u + c(x)u = f(x)$. 置矩阵 $A(x) = (a_{ij}(x))_{n \times n}$, 行向量值函数

$$b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x)) \Rightarrow \text{矩阵形式 } \boxed{\text{Tr}(A D^2 u) + \langle b, Du \rangle + cu = f}. \quad (x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n)$$

由于 $D^2 u$ 是实对称阵, 利用矩阵迹的性质 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$, 通过将 A 换作 $(A + A^T)/2$, 可设上述 A 是实对称阵.

- 复习 (高等代数): n 元实二次型 $\langle A\xi, \xi \rangle$ (或实对称阵 A) 总可以化为标准形 (对角元为 $0, 1, -1$ 的对角阵). 不变量: 秩 和 符号差 (或正、负惯性指数)

[证明: 第一步: 存在正交阵 O ($\mathbb{R}^n$ 基底的旋转和反射) 使得 OAO^T 是对角阵 (对角元是 A 的特征值), 归纳法, Gram-Schmidt 正交化; 第二步: 基向量的伸缩变换]

- 二阶线性 PDE 的分类 (对每个点 x 而言) — **混合型方程: 在给定区域至少有两点其类型不同的方程**)

- 椭圆型:** $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 n 或 $-n$ (即所有特征值非零且同号) [重点, Laplace 方程]
- 双曲型:** $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 $n-2$ 或 $2-n$ (即所有特征值非零且只有一个与其它的异号) [重点, 波动方程]
- 超双曲型:** $A(x)$ 秩为 n 且符号差的绝对值小于 $n-2$ (只有自变量个数 $n \geq 4$ 时才可能)
- 抛物型:** $A(x)$ 秩为 $n-1$, 符号差是 $n-1$ 或 $1-n$, 且 $b(x)$ 不与 $\ker A(x)$ 正交 (即 $A(x)$ 只有一个零特征值且所有非零特征值同号, PDE 中关于 n 个自变量的偏导数要真正出现) [重点, 热传导方程]
- 广义抛物型:** $A(x)$ 秩 $\leq n-1$ 且不满足抛物型条件 iv) 的其它二阶 PDE

二阶线性 PDE 的分类

- 二阶线性 PDE: $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij} u + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_j u + c(x)u = f(x)$. 置矩阵 $A(x) = (a_{ij}(x))_{n \times n}$, 行向量值函数

$$b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x)) \Rightarrow \text{矩阵形式 } \boxed{\text{Tr}(A D^2 u) + \langle b, Du \rangle + cu = f}. \quad (x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n)$$

由于 $D^2 u$ 是实对称阵, 利用矩阵迹的性质 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$, 通过将 A 换作 $(A + A^T)/2$, 可设上述 A 是实对称阵.

- 复习 (高等代数): n 元实二次型 $\langle A\xi, \xi \rangle$ (或实对称阵 A) 总可以化为标准形 (对角元为 $0, 1, -1$ 的对角阵). 不变量: 秩 和 符号差 (或正、负惯性指数)

[证明: 第一步: 存在正交阵 O ($\mathbb{R}^n$ 基底的旋转和反射) 使得 OAO^T 是对角阵 (对角元是 A 的特征值), 归纳法, Gram-Schmidt 正交化; 第二步: 基向量的伸缩变换]

- 二阶线性 PDE 的分类 (对每个点 x 而言) — 混合型方程: 在给定区域至少有两点其类型不同的方程)

- 椭圆型: $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 n 或 $-n$ (即所有特征值非零且同号) [重点, Laplace 方程]
- 双曲型: $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 $n-2$ 或 $2-n$ (即所有特征值非零且只有一个与其它的异号) [重点, 波动方程]
- 超双曲型: $A(x)$ 秩为 n 且符号差的绝对值小于 $n-2$ (只有自变量个数 $n \geq 4$ 时才可能)
- 抛物型: $A(x)$ 秩为 $n-1$, 符号差是 $n-1$ 或 $1-n$, 且 $b(x)$ 不与 $\ker A(x)$ 正交 (即 $A(x)$ 只有一个零特征值且所有非零特征值同号, PDE 中关于 n 个自变量的偏导数要真正出现) [重点, 热传导方程]
- 广义抛物型: $A(x)$ 秩 $\leq n-1$ 且不满足抛物型条件 iv) 的其它二阶 PDE

二阶线性 PDE 的分类

- 二阶线性 PDE: $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij} u + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_j u + c(x)u = f(x)$. 置矩阵 $A(x) = (a_{ij}(x))_{n \times n}$, 行向量值函数

$$b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x)) \Rightarrow \text{矩阵形式 } \boxed{\text{Tr}(A D^2 u) + \langle b, Du \rangle + cu = f}. \quad (x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n)$$

由于 $D^2 u$ 是实对称阵, 利用矩阵迹的性质 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$, 通过将 A 换作 $(A + A^T)/2$, 可设上述 A 是实对称阵.

- 复习 (高等代数): n 元实二次型 $\langle A\xi, \xi \rangle$ (或实对称阵 A) 总可以化为标准形 (对角元为 $0, 1, -1$ 的对角阵). 不变量: 秩 和 符号差 (或正、负惯性指数)

[证明: 第一步: 存在正交阵 O ($\mathbb{R}^n$ 基底的旋转和反射) 使得 OAO^T 是对角阵 (对角元是 A 的特征值), 归纳法, Gram-Schmidt 正交化; 第二步: 基向量的伸缩变换]

- 二阶线性 PDE 的分类 (对每个点 x 而言) — **混合型方程: 在给定区域至少有两点其类型不同的方程**)

- 椭圆型:** $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 n 或 $-n$ (即所有特征值非零且同号) [重点, Laplace 方程]
- 双曲型:** $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 $n-2$ 或 $2-n$ (即所有特征值非零且只有一个与其它的异号) [重点, 波动方程]
- 超双曲型:** $A(x)$ 秩为 n 且符号差的绝对值小于 $n-2$ (只有自变量个数 $n \geq 4$ 时才可能)
- 抛物型:** $A(x)$ 秩为 $n-1$, 符号差是 $n-1$ 或 $1-n$, 且 $b(x)$ 不与 $\ker A(x)$ 正交 (即 $A(x)$ 只有一个零特征值且所有非零特征值同号, PDE 中关于 n 个自变量的偏导数要真正出现) [重点, 热传导方程]
- 广义抛物型:** $A(x)$ 秩 $\leq n-1$ 且不满足抛物型条件 iv) 的其它二阶 PDE

二阶线性 PDE 的分类

- 二阶线性 PDE: $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij} u + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_j u + c(x)u = f(x)$. 置矩阵 $A(x) = (a_{ij}(x))_{n \times n}$, 行向量值函数

$$b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x)) \Rightarrow \text{矩阵形式 } \boxed{\text{Tr}(A D^2 u) + \langle b, Du \rangle + cu = f}. \quad (x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n)$$

由于 $D^2 u$ 是实对称阵, 利用矩阵迹的性质 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$, 通过将 A 换作 $(A + A^T)/2$, 可设上述 A 是实对称阵.

- 复习 (高等代数): n 元实二次型 $\langle A\xi, \xi \rangle$ (或实对称阵 A) 总可以化为标准形 (对角元为 $0, 1, -1$ 的对角阵). 不变量: 秩 和 符号差 (或正、负惯性指数)

[证明: 第一步: 存在正交阵 O ($\mathbb{R}^n$ 基底的旋转和反射) 使得 OAO^T 是对角阵 (对角元是 A 的特征值), 归纳法, Gram-Schmidt 正交化; 第二步: 基向量的伸缩变换]

- 二阶线性 PDE 的分类 (对每个点 x 而言) — 混合型方程: 在给定区域至少有两点其类型不同的方程)

- 椭圆型: $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 n 或 $-n$ (即所有特征值非零且同号) [重点, Laplace 方程]
- 双曲型: $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 $n-2$ 或 $2-n$ (即所有特征值非零且只有一个与其它的异号) [重点, 波动方程]
- 超双曲型: $A(x)$ 秩为 n 且符号差的绝对值小于 $n-2$ (只有自变量个数 $n \geq 4$ 时才可能)
- 抛物型: $A(x)$ 秩为 $n-1$, 符号差是 $n-1$ 或 $1-n$, 且 $b(x)$ 不与 $\ker A(x)$ 正交 (即 $A(x)$ 只有一个零特征值且所有非零特征值同号, PDE 中关于 n 个自变量的偏导数要真正出现) [重点, 热传导方程]
- 广义抛物型: $A(x)$ 秩 $\leq n-1$ 且不满足抛物型条件 iv) 的其它二阶 PDE

二阶线性 PDE 的分类

- 二阶线性 PDE: $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij} u + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_j u + c(x)u = f(x)$. 置矩阵 $A(x) = (a_{ij}(x))_{n \times n}$, 行向量值函数

$$b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x)) \Rightarrow \text{矩阵形式 } \boxed{\text{Tr}(A D^2 u) + \langle b, Du \rangle + cu = f}. \quad (x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n)$$

由于 $D^2 u$ 是实对称阵, 利用矩阵迹的性质 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$, 通过将 A 换作 $(A + A^T)/2$, 可设上述 A 是实对称阵.

- 复习 (高等代数): n 元实二次型 $\langle A\xi, \xi \rangle$ (或实对称阵 A) 总可以化为标准形 (对角元为 $0, 1, -1$ 的对角阵). 不变量: 秩 和 符号差 (或正、负惯性指数)

[证明: 第一步: 存在正交阵 O ($\mathbb{R}^n$ 基底的旋转和反射) 使得 OAO^T 是对角阵 (对角元是 A 的特征值), 归纳法, Gram-Schmidt 正交化; 第二步: 基向量的伸缩变换]

- 二阶线性 PDE 的分类 (对每个点 x 而言) — 混合型方程: 在给定区域至少有两点其类型不同的方程)

- 椭圆型: $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 n 或 $-n$ (即所有特征值非零且同号) [重点, Laplace 方程]
- 双曲型: $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 $n-2$ 或 $2-n$ (即所有特征值非零且只有一个与其它的异号) [重点, 波动方程]
- 超双曲型: $A(x)$ 秩为 n 且符号差的绝对值小于 $n-2$ (只有自变量个数 $n \geq 4$ 时才可能)
- 抛物型: $A(x)$ 秩为 $n-1$, 符号差是 $n-1$ 或 $1-n$, 且 $b(x)$ 不与 $\ker A(x)$ 正交 (即 $A(x)$ 只有一个零特征值且所有非零特征值同号, PDE 中关于 n 个自变量的偏导数要真正出现) [重点, 热传导方程]
- 广义抛物型: $A(x)$ 秩 $\leq n-1$ 且不满足抛物型条件 iv) 的其它二阶 PDE

二阶线性 PDE 的分类

- 二阶线性 PDE: $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij} u + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_j u + c(x)u = f(x)$. 置矩阵 $A(x) = (a_{ij}(x))_{n \times n}$, 行向量值函数

$$b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x)) \Rightarrow \text{矩阵形式 } \boxed{\text{Tr}(A D^2 u) + \langle b, Du \rangle + cu = f}. \quad (x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n)$$

由于 $D^2 u$ 是实对称阵, 利用矩阵迹的性质 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$, 通过将 A 换作 $(A + A^T)/2$, 可设上述 A 是实对称阵.

- 复习 (高等代数): n 元实二次型 $\langle A\xi, \xi \rangle$ (或实对称阵 A) 总可以化为标准形 (对角元为 $0, 1, -1$ 的对角阵). 不变量: 秩 和 符号差 (或正、负惯性指数)

[证明: 第一步: 存在正交阵 O ($\mathbb{R}^n$ 基底的旋转和反射) 使得 OAO^T 是对角阵 (对角元是 A 的特征值), 归纳法, Gram-Schmidt 正交化; 第二步: 基向量的伸缩变换]

- 二阶线性 PDE 的分类 (对每个点 x 而言) — 混合型方程: 在给定区域至少有两点其类型不同的方程)

- 椭圆型: $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 n 或 $-n$ (即所有特征值非零且同号) [重点, Laplace 方程]
- 双曲型: $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 $n-2$ 或 $2-n$ (即所有特征值非零且只有一个与其它的异号) [重点, 波动方程]
- 超双曲型: $A(x)$ 秩为 n 且符号差的绝对值小于 $n-2$ (只有自变量个数 $n \geq 4$ 时才可能)
- 抛物型: $A(x)$ 秩为 $n-1$, 符号差是 $n-1$ 或 $1-n$, 且 $b(x)$ 不与 $\ker A(x)$ 正交 (即 $A(x)$ 只有一个零特征值且所有非零特征值同号, PDE 中关于 n 个自变量的偏导数要真正出现) [重点, 热传导方程]
- 广义抛物型: $A(x)$ 秩 $\leq n-1$ 且不满足抛物型条件 iv) 的其它二阶 PDE

二阶线性 PDE 的分类

- 二阶线性 PDE: $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij} u + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_j u + c(x)u = f(x)$. 置矩阵 $A(x) = (a_{ij}(x))_{n \times n}$, 行向量值函数

$$b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x)) \Rightarrow \text{矩阵形式 } \boxed{\text{Tr}(A D^2 u) + \langle b, Du \rangle + cu = f}. \quad (x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n)$$

由于 $D^2 u$ 是实对称阵, 利用矩阵迹的性质 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$, 通过将 A 换作 $(A + A^T)/2$, 可设上述 A 是实对称阵.

- 复习 (高等代数): n 元实二次型 $\langle A\xi, \xi \rangle$ (或实对称阵 A) 总可以化为标准形 (对角元为 $0, 1, -1$ 的对角阵). 不变量: 秩 和 符号差 (或正、负惯性指数)

[证明: 第一步: 存在正交阵 O ($\mathbb{R}^n$ 基底的旋转和反射) 使得 OAO^T 是对角阵 (对角元是 A 的特征值), 归纳法, Gram-Schmidt 正交化; 第二步: 基向量的伸缩变换]

- 二阶线性 PDE 的分类 (对每个点 x 而言 — **混合型方程: 在给定区域至少有两点其类型不同的方程**)

- 椭圆型: $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 n 或 $-n$ (即所有特征值非零且同号) [重点, Laplace 方程]
- 双曲型: $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 $n-2$ 或 $2-n$ (即所有特征值非零且只有一个与其它的异号) [重点, 波动方程]
- 超双曲型: $A(x)$ 秩为 n 且符号差的绝对值小于 $n-2$ (只有自变量个数 $n \geq 4$ 时才可能)
- 抛物型: $A(x)$ 秩为 $n-1$, 符号差是 $n-1$ 或 $1-n$, 且 $b(x)$ 不与 $\ker A(x)$ 正交 (即 $A(x)$ 只有一个零特征值且所有非零特征值同号, PDE 中关于 n 个自变量的偏导数要真正出现) [重点, 热传导方程]
- 广义抛物型: $A(x)$ 秩 $\leq n-1$ 且不满足抛物型条件 iv) 的其它二阶 PDE

二阶线性 PDE 的分类

- 二阶线性 PDE: $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij} u + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_j u + c(x)u = f(x)$. 置矩阵 $A(x) = (a_{ij}(x))_{n \times n}$, 行向量值函数

$$b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x)) \Rightarrow \text{矩阵形式 } \boxed{\text{Tr}(A D^2 u) + \langle b, Du \rangle + cu = f}. \quad (x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n)$$

由于 $D^2 u$ 是实对称阵, 利用矩阵迹的性质 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$, 通过将 A 换作 $(A + A^T)/2$, 可设上述 A 是实对称阵.

- 复习 (高等代数): n 元实二次型 $\langle A\xi, \xi \rangle$ (或实对称阵 A) 总可以化为标准形 (对角元为 $0, 1, -1$ 的对角阵). 不变量: 秩 和 符号差 (或正、负惯性指数)

[证明: 第一步: 存在正交阵 O ($\mathbb{R}^n$ 基底的旋转和反射) 使得 OAO^T 是对角阵 (对角元是 A 的特征值), 归纳法, Gram-Schmidt 正交化; 第二步: 基向量的伸缩变换]

- 二阶线性 PDE 的分类 (对每个点 x 而言) — **混合型方程: 在给定区域至少有两点其类型不同的方程**)

- 椭圆型:** $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 n 或 $-n$ (即所有特征值非零且同号) [重点, Laplace 方程]
- 双曲型:** $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 $n-2$ 或 $2-n$ (即所有特征值非零且只有一个与其它的异号) [重点, 波动方程]
- 超双曲型:** $A(x)$ 秩为 n 且符号差的绝对值小于 $n-2$ (只有自变量个数 $n \geq 4$ 时才可能)
- 抛物型:** $A(x)$ 秩为 $n-1$, 符号差是 $n-1$ 或 $1-n$, 且 $b(x)$ 不与 $\ker A(x)$ 正交 (即 $A(x)$ 只有一个零特征值且所有非零特征值同号, PDE 中关于 n 个自变量的偏导数要真正出现) [重点, 热传导方程]
- 广义抛物型:** $A(x)$ 秩 $\leq n-1$ 且不满足抛物型条件 iv) 的其它二阶 PDE

二阶线性 PDE 的分类

- 二阶线性 PDE: $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij} u + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_j u + c(x)u = f(x)$. 置矩阵 $A(x) = (a_{ij}(x))_{n \times n}$, 行向量值函数

$$b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x)) \Rightarrow \text{矩阵形式 } \boxed{\text{Tr}(A D^2 u) + \langle b, Du \rangle + cu = f}. \quad (x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n)$$

由于 $D^2 u$ 是实对称阵, 利用矩阵迹的性质 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$, 通过将 A 换作 $(A + A^T)/2$, 可设上述 A 是实对称阵.

- 复习 (高等代数): n 元实二次型 $\langle A\xi, \xi \rangle$ (或实对称阵 A) 总可以化为标准形 (对角元为 $0, 1, -1$ 的对角阵). 不变量: 秩 和 符号差 (或正、负惯性指数)

[证明: 第一步: 存在正交阵 O ($\mathbb{R}^n$ 基底的旋转和反射) 使得 OAO^T 是对角阵 (对角元是 A 的特征值), 归纳法, Gram-Schmidt 正交化; 第二步: 基向量的伸缩变换]

- 二阶线性 PDE 的分类 (对每个点 x 而言 — **混合型方程: 在给定区域至少有两点其类型不同的方程**)

- 椭圆型:** $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 n 或 $-n$ (即所有特征值非零且同号) [重点, Laplace 方程]
- 双曲型:** $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 $n-2$ 或 $2-n$ (即所有特征值非零且只有一个与其它的异号) [重点, 波动方程]
- 超双曲型:** $A(x)$ 秩为 n 且符号差的绝对值小于 $n-2$ (只有自变量个数 $n \geq 4$ 时才可能)
- 抛物型:** $A(x)$ 秩为 $n-1$, 符号差是 $n-1$ 或 $1-n$, 且 $b(x)$ 不与 $\ker A(x)$ 正交 (即 $A(x)$ 只有一个零特征值且所有非零特征值同号, PDE 中关于 n 个自变量的偏导数要真正出现) [重点, 热传导方程]
- 广义抛物型:** $A(x)$ 秩 $\leq n-1$ 且不满足抛物型条件 iv) 的其它二阶 PDE

二阶线性 PDE 的分类

- 二阶线性 PDE: $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij} u + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_j u + c(x)u = f(x)$. 置矩阵 $A(x) = (a_{ij}(x))_{n \times n}$, 行向量值函数

$$b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x)) \Rightarrow \text{矩阵形式 } \boxed{\text{Tr}(A D^2 u) + \langle b, Du \rangle + cu = f}. \quad (x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n)$$

由于 $D^2 u$ 是实对称阵, 利用矩阵迹的性质 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$, 通过将 A 换作 $(A + A^T)/2$, 可设上述 A 是实对称阵.

- 复习 (高等代数): n 元实二次型 $\langle A\xi, \xi \rangle$ (或实对称阵 A) 总可以化为标准形 (对角元为 $0, 1, -1$ 的对角阵). 不变量: 秩 和 符号差 (或正、负惯性指数)

[证明: 第一步: 存在正交阵 O ($\mathbb{R}^n$ 基底的旋转和反射) 使得 OAO^T 是对角阵 (对角元是 A 的特征值), 归纳法, Gram-Schmidt 正交化; 第二步: 基向量的伸缩变换]

- 二阶线性 PDE 的分类 (对每个点 x 而言 — 混合型方程: 在给定区域至少有两点其类型不同的方程)

- 椭圆型: $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 n 或 $-n$ (即所有特征值非零且同号) [重点, Laplace 方程]
- 双曲型: $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 $n-2$ 或 $2-n$ (即所有特征值非零且只有一个与其它的异号) [重点, 波动方程]
- 超双曲型: $A(x)$ 秩为 n 且符号差的绝对值小于 $n-2$ (只有自变量个数 $n \geq 4$ 时才可能)
- 抛物型: $A(x)$ 秩为 $n-1$, 符号差是 $n-1$ 或 $1-n$, 且 $b(x)$ 不与 $\ker A(x)$ 正交 (即 $A(x)$ 只有一个零特征值且所有非零特征值同号, PDE 中关于 n 个自变量的偏导数要真正出现) [重点, 热传导方程]
- 广义抛物型: $A(x)$ 秩 $\leq n-1$ 且不满足抛物型条件 iv) 的其它二阶 PDE

二阶线性 PDE 的分类

- 二阶线性 PDE: $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij} u + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_j u + c(x)u = f(x)$. 置矩阵 $A(x) = (a_{ij}(x))_{n \times n}$, 行向量值函数

$$b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x)) \Rightarrow \text{矩阵形式 } \boxed{\text{Tr}(A D^2 u) + \langle b, Du \rangle + cu = f}. \quad (x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n)$$

由于 $D^2 u$ 是实对称阵, 利用矩阵迹的性质 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$, 通过将 A 换作 $(A + A^T)/2$, 可设上述 A 是实对称阵.

- 复习 (高等代数): n 元实二次型 $\langle A\xi, \xi \rangle$ (或实对称阵 A) 总可以化为标准形 (对角元为 $0, 1, -1$ 的对角阵). 不变量: 秩 和 符号差 (或正、负惯性指数)

[证明: 第一步: 存在正交阵 O ($\mathbb{R}^n$ 基底的旋转和反射) 使得 OAO^T 是对角阵 (对角元是 A 的特征值), 归纳法, Gram-Schmidt 正交化; 第二步: 基向量的伸缩变换]

- 二阶线性 PDE 的分类 (对每个点 x 而言 — **混合型方程: 在给定区域至少有两点其类型不同的方程**)

- 椭圆型:** $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 n 或 $-n$ (即所有特征值非零且同号) [重点, Laplace 方程]
- 双曲型:** $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 $n-2$ 或 $2-n$ (即所有特征值非零且只有一个与其它的异号) [重点, 波动方程]
- 超双曲型:** $A(x)$ 秩为 n 且符号差的绝对值小于 $n-2$ (只有自变量个数 $n \geq 4$ 时才可能)
- 抛物型:** $A(x)$ 秩为 $n-1$, 符号差是 $n-1$ 或 $1-n$, 且 $b(x)$ 不与 $\ker A(x)$ 正交 (即 $A(x)$ 只有一个零特征值且所有非零特征值同号, PDE 中关于 n 个自变量的偏导数要真正出现) [重点, 热传导方程]

- 广义抛物型: $A(x)$ 秩 $\leq n-1$ 且不满足抛物型条件 iv) 的其它二阶 PDE

二阶线性 PDE 的分类

- 二阶线性 PDE: $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij} u + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_j u + c(x)u = f(x)$. 置矩阵 $A(x) = (a_{ij}(x))_{n \times n}$, 行向量值函数

$$b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x)) \Rightarrow \text{矩阵形式 } \boxed{\text{Tr}(A D^2 u) + \langle b, Du \rangle + cu = f}. \quad (x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n)$$

由于 $D^2 u$ 是实对称阵, 利用矩阵迹的性质 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$, 通过将 A 换作 $(A + A^T)/2$, 可设上述 A 是实对称阵.

- 复习 (高等代数): n 元实二次型 $\langle A\xi, \xi \rangle$ (或实对称阵 A) 总可以化为标准形 (对角元为 $0, 1, -1$ 的对角阵). 不变量: 秩 和 符号差 (或正、负惯性指数)

[证明: 第一步: 存在正交阵 O ($\mathbb{R}^n$ 基底的旋转和反射) 使得 OAO^T 是对角阵 (对角元是 A 的特征值), 归纳法, Gram-Schmidt 正交化; 第二步: 基向量的伸缩变换]

- 二阶线性 PDE 的分类 (对每个点 x 而言 — 混合型方程: 在给定区域至少有两点其类型不同的方程)

- 椭圆型: $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 n 或 $-n$ (即所有特征值非零且同号) [重点, Laplace 方程]
- 双曲型: $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 $n-2$ 或 $2-n$ (即所有特征值非零且只有一个与其它的异号) [重点, 波动方程]
- 超双曲型: $A(x)$ 秩为 n 且符号差的绝对值小于 $n-2$ (只有自变量个数 $n \geq 4$ 时才可能)
- 抛物型: $A(x)$ 秩为 $n-1$, 符号差是 $n-1$ 或 $1-n$, 且 $b(x)$ 不与 $\ker A(x)$ 正交 (即 $A(x)$ 只有一个零特征值且所有非零特征值同号, PDE 中关于 n 个自变量的偏导数要真正出现) [重点, 热传导方程]
- 广义抛物型: $A(x)$ 秩 $\leq n-1$ 且不满足抛物型条件 iv) 的其它二阶 PDE

二阶线性 PDE 的分类

- 二阶线性 PDE: $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij} u + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_j u + c(x)u = f(x)$. 置矩阵 $A(x) = (a_{ij}(x))_{n \times n}$, 行向量值函数

$$b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x)) \Rightarrow \text{矩阵形式 } \boxed{\text{Tr}(A D^2 u) + \langle b, Du \rangle + cu = f}. \quad (x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n)$$

由于 $D^2 u$ 是实对称阵, 利用矩阵迹的性质 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$, 通过将 A 换作 $(A + A^T)/2$, 可设上述 A 是实对称阵.

- 复习 (高等代数): n 元实二次型 $\langle A\xi, \xi \rangle$ (或实对称阵 A) 总可以化为标准形 (对角元为 $0, 1, -1$ 的对角阵). 不变量: 秩 和 符号差 (或正、负惯性指数)

[证明: 第一步: 存在正交阵 O ($\mathbb{R}^n$ 基底的旋转和反射) 使得 OAO^T 是对角阵 (对角元是 A 的特征值), 归纳法, Gram-Schmidt 正交化; 第二步: 基向量的伸缩变换]

- 二阶线性 PDE 的分类 (对每个点 x 而言 — **混合型方程: 在给定区域至少有两点其类型不同的方程**)

- 椭圆型:** $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 n 或 $-n$ (即所有特征值非零且同号) [重点, Laplace 方程]
- 双曲型:** $A(x)$ 秩为 n 且符号差是 $n-2$ 或 $2-n$ (即所有特征值非零且只有一个与其它的异号) [重点, 波动方程]
- 超双曲型:** $A(x)$ 秩为 n 且符号差的绝对值小于 $n-2$ (只有自变量个数 $n \geq 4$ 时才可能)
- 抛物型:** $A(x)$ 秩为 $n-1$, 符号差是 $n-1$ 或 $1-n$, 且 $b(x)$ 不与 $\ker A(x)$ 正交 (即 $A(x)$ 只有一个零特征值且所有非零特征值同号, PDE 中关于 n 个自变量的偏导数要真正出现) [重点, 热传导方程]
- 广义抛物型:** $A(x)$ 秩 $\leq n-1$ 且不满足抛物型条件 iv) 的其它二阶 PDE

非线性变换下的二阶线性 PDE

定理 (C^2 微分同胚下 PDE 类型不变)

在 C^2 微分同胚 $y = T(x)$ 下, PDE $\boxed{\text{Tr}[A(x)D^2u(x)] + \langle b(x), Du(x) \rangle + c(x)u(x) = f(x)}$ 变为

$$\text{Tr}[\bar{A}(y)D_y^2v(y)] + \langle \bar{b}(y), D_yv(y) \rangle + c(T^{-1}(y))v(y) = f(T^{-1}(y)),$$

其中 $v(y) = u(T^{-1}(y))$, 而 $\bar{A}(y) = DT(x)A(x)DT(x)^\top|_{x=T^{-1}(y)}$, $\bar{b}(y) = [b(x)DT(x)^\top + \text{Tr}[A(x)D^2T(x)]]|_{x=T^{-1}(y)}$, 这里

$$\text{Tr}[A(x)D^2T(x)] = (\text{Tr}[A(x)D^2T_1(x)], \dots, \text{Tr}[A(x)D^2T_n(x)]).$$

该定理的意义: 方程类型与坐标无关, 确实是客观属性, 分类合理.

证明. 记 $y = T(x) = (T_1(x), \dots, T_n(x))$. 由于 $u(x) = v(T(x)) = v(y)$, 根据链式法则,

$$\bullet \quad Du(x) = D_yv(y)DT(x) \quad Du = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}), \quad D_yv = (\frac{\partial v}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial y_n});$$

$$\bullet \quad D^2u(x) = DT(x)^\top D_y^2v(y)DT(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v(y)}{\partial y_k} D^2T_k(x); \quad (\text{按分量计算时注意 } \partial_j T_i \text{ 中 } i \text{ 是行标, } j \text{ 是列标, 所以为了凑成矩阵乘法, 前一个 } DT \text{ 需要转置!})$$

$$\Rightarrow \text{Tr}[A(x)D^2u(x)] = \text{Tr}[A(x)DT(x)^\top D_y^2v(y)DT(x)] + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v(y)}{\partial y_k} \text{Tr}[A(x)D^2T_k(x)] \xrightarrow[\text{第一项用}]{\text{Tr}(AB)=\text{Tr}(BA)}$$

$$= \text{Tr}[DT(x)A(x)DT(x)^\top D_y^2v(y)] + \langle \text{Tr}[A(x)D^2T(x)], D_yv \rangle. (\Rightarrow \text{定理结论成立.})$$

非线性变换下的二阶线性 PDE

定理 (C^2 微分同胚下 PDE 类型不变)

在 C^2 微分同胚 $y = T(x)$ 下, PDE $\boxed{\text{Tr}[A(x)D^2u(x)] + \langle b(x), Du(x) \rangle + c(x)u(x) = f(x)}$ 变为

$$\text{Tr}[\bar{A}(y)D_y^2v(y)] + \langle \bar{b}(y), D_yv(y) \rangle + c(T^{-1}(y))v(y) = f(T^{-1}(y)),$$

其中 $v(y) = u(T^{-1}(y))$, 而 $\bar{A}(y) = DT(x)A(x)DT(x)^\top|_{x=T^{-1}(y)}$, $\bar{b}(y) = [b(x)DT(x)^\top + \text{Tr}[A(x)D^2T(x)]]|_{x=T^{-1}(y)}$, 这里

$$\text{Tr}[A(x)D^2T(x)] = (\text{Tr}[A(x)D^2T_1(x)], \dots, \text{Tr}[A(x)D^2T_n(x)]).$$

该定理的意义: 方程类型与坐标无关, 确实是客观属性, 分类合理.

证明. 记 $y = T(x) = (T_1(x), \dots, T_n(x))$. 由于 $u(x) = v(T(x)) = v(y)$, 根据链式法则,

$$\bullet \quad Du(x) = D_yv(y)DT(x) \quad Du = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}), \quad D_yv = (\frac{\partial v}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial y_n});$$

$$\bullet \quad D^2u(x) = DT(x)^\top D_y^2v(y)DT(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v(y)}{\partial y_k} D^2T_k(x); \quad (\text{按分量计算时注意 } \partial_j T_i \text{ 中 } i \text{ 是行标, } j \text{ 是列标, 所以为了凑成矩阵乘法, 前一个 } DT \text{ 需要转置!})$$

$$\Rightarrow \text{Tr}[A(x)D^2u(x)] = \text{Tr}[A(x)DT(x)^\top D_y^2v(y)DT(x)] + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v(y)}{\partial y_k} \text{Tr}[A(x)D^2T_k(x)] \xrightarrow[\text{第一项用}]{\text{Tr}(AB)=\text{Tr}(BA)}$$

$$= \text{Tr}[DT(x)A(x)DT(x)^\top D_y^2v(y)] + \langle \text{Tr}[A(x)D^2T(x)], D_yv \rangle. (\Rightarrow \text{定理结论成立.})$$

非线性变换下的二阶线性 PDE

定理 (C^2 微分同胚下 PDE 类型不变)

在 C^2 微分同胚 $y = T(x)$ 下, PDE $\boxed{\text{Tr}[A(x)D^2u(x)] + \langle b(x), Du(x) \rangle + c(x)u(x) = f(x)}$ 变为

$$\text{Tr}[\bar{A}(y)D_y^2v(y)] + \langle \bar{b}(y), D_yv(y) \rangle + c(T^{-1}(y))v(y) = f(T^{-1}(y)),$$

其中 $v(y) = u(T^{-1}(y))$, 而 $\bar{A}(y) = DT(x)A(x)DT(x)^\top|_{x=T^{-1}(y)}$, $\bar{b}(y) = [b(x)DT(x)^\top + \text{Tr}[A(x)D^2T(x)]]|_{x=T^{-1}(y)}$, 这里

$$\text{Tr}[A(x)D^2T(x)] = (\text{Tr}[A(x)D^2T_1(x)], \dots, \text{Tr}[A(x)D^2T_n(x)]).$$

该定理的意义: 方程类型与坐标无关, 确实是客观属性, 分类合理.

证明. 记 $y = T(x) = (T_1(x), \dots, T_n(x))$. 由于 $u(x) = v(T(x)) = v(y)$, 根据链式法则,

$$\bullet \quad Du(x) = D_yv(y)DT(x) \quad Du = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}), \quad D_yv = (\frac{\partial v}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial y_n});$$

$$\bullet \quad D^2u(x) = DT(x)^\top D_y^2v(y)DT(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v(y)}{\partial y_k} D^2T_k(x); \quad (\text{按分量计算时注意 } \partial_j T_i \text{ 中 } i \text{ 是行标, } j \text{ 是列标, 所以为了凑成矩阵乘法, 前一个 } DT \text{ 需要转置!})$$

$$\Rightarrow \text{Tr}[A(x)D^2u(x)] = \text{Tr}[A(x)DT(x)^\top D_y^2v(y)DT(x)] + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v(y)}{\partial y_k} \text{Tr}[A(x)D^2T_k(x)] \xrightarrow[\text{第一项用}]{\text{Tr}(AB)=\text{Tr}(BA)}$$

$$= \text{Tr}[DT(x)A(x)DT(x)^\top D_y^2v(y)] + \langle \text{Tr}[A(x)D^2T(x)], D_yv \rangle. (\Rightarrow \text{定理结论成立.})$$

非线性变换下的二阶线性 PDE

定理 (C^2 微分同胚下 PDE 类型不变)

在 C^2 微分同胚 $y = T(x)$ 下, PDE $\boxed{\text{Tr}[A(x)D^2u(x)] + \langle b(x), Du(x) \rangle + c(x)u(x) = f(x)}$ 变为

$$\text{Tr}[\bar{A}(y)D_y^2v(y)] + \langle \bar{b}(y), D_yv(y) \rangle + c(T^{-1}(y))v(y) = f(T^{-1}(y)),$$

其中 $v(y) = u(T^{-1}(y))$, 而 $\bar{A}(y) = DT(x)A(x)DT(x)^\top|_{x=T^{-1}(y)}$, $\bar{b}(y) = [b(x)DT(x)^\top + \text{Tr}[A(x)D^2T(x)]]|_{x=T^{-1}(y)}$, 这里

$$\text{Tr}[A(x)D^2T(x)] = (\text{Tr}[A(x)D^2T_1(x)], \dots, \text{Tr}[A(x)D^2T_n(x)]).$$

该定理的意义: 方程类型与坐标无关, 确实是客观属性, 分类合理.

证明. 记 $y = T(x) = (T_1(x), \dots, T_n(x))$. 由于 $u(x) = v(T(x)) = v(y)$, 根据链式法则,

$$\bullet \quad Du(x) = D_yv(y)DT(x) \quad Du = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}), \quad D_yv = (\frac{\partial v}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial y_n});$$

$$\bullet \quad D^2u(x) = DT(x)^\top D_y^2v(y)DT(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v(y)}{\partial y_k} D^2T_k(x); \quad (\text{按分量计算时注意 } \partial_j T_i \text{ 中 } i \text{ 是行标, } j \text{ 是列标, 所以为了凑成矩阵乘法, 前一个 } DT \text{ 需要转置!})$$

$$\Rightarrow \text{Tr}[A(x)D^2u(x)] = \text{Tr}[A(x)DT(x)^\top D_y^2v(y)DT(x)] + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v(y)}{\partial y_k} \text{Tr}[A(x)D^2T_k(x)] \xrightarrow[\text{第一项用}]{\text{Tr}(AB)=\text{Tr}(BA)}$$

$$= \text{Tr}[DT(x)A(x)DT(x)^\top D_y^2v(y)] + \langle \text{Tr}[A(x)D^2T(x)], D_yv \rangle. (\Rightarrow \text{定理结论成立.})$$

非线性变换下的二阶线性 PDE

定理 (C^2 微分同胚下 PDE 类型不变)

在 C^2 微分同胚 $y = T(x)$ 下, PDE $\boxed{\text{Tr}[A(x)D^2u(x)] + \langle b(x), Du(x) \rangle + c(x)u(x) = f(x)}$ 变为

$$\text{Tr}[\bar{A}(y)D_y^2v(y)] + \langle \bar{b}(y), D_yv(y) \rangle + c(T^{-1}(y))v(y) = f(T^{-1}(y)),$$

其中 $v(y) = u(T^{-1}(y))$, 而 $\bar{A}(y) = DT(x)A(x)DT(x)^\top|_{x=T^{-1}(y)}$, $\bar{b}(y) = [b(x)DT(x)^\top + \text{Tr}[A(x)D^2T(x)]]|_{x=T^{-1}(y)}$, 这里

$$\text{Tr}[A(x)D^2T(x)] = (\text{Tr}[A(x)D^2T_1(x)], \dots, \text{Tr}[A(x)D^2T_n(x)]).$$

该定理的意义: 方程类型与坐标无关, 确实是客观属性, 分类合理.

证明. 记 $y = T(x) = (T_1(x), \dots, T_n(x))$. 由于 $u(x) = v(T(x)) = v(y)$, 根据链式法则,

$$\bullet \quad Du(x) = D_yv(y)DT(x) \quad Du = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}), \quad D_yv = (\frac{\partial v}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial y_n});$$

$$\bullet \quad D^2u(x) = DT(x)^\top D_y^2v(y)DT(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v(y)}{\partial y_k} D^2T_k(x); \quad (\text{按分量计算时注意 } \partial_j T_i \text{ 中 } i \text{ 是行标, } j \text{ 是列标, 所以为了凑成矩阵乘法, 前一个 } DT \text{ 需要转置!})$$

$$\Rightarrow \text{Tr}[A(x)D^2u(x)] = \text{Tr}[A(x)DT(x)^\top D_y^2v(y)DT(x)] + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v(y)}{\partial y_k} \text{Tr}[A(x)D^2T_k(x)] \xrightarrow[\text{第一项用}]{\text{Tr}(AB)=\text{Tr}(BA)}$$

$$= \text{Tr}[DT(x)A(x)DT(x)^\top D_y^2v(y)] + \langle \text{Tr}[A(x)D^2T(x)], D_yv \rangle. (\Rightarrow \text{定理结论成立.})$$

非线性变换下的二阶线性 PDE

定理 (C^2 微分同胚下 PDE 类型不变)

在 C^2 微分同胚 $y = T(x)$ 下, PDE $\boxed{\text{Tr}[A(x)D^2u(x)] + \langle b(x), Du(x) \rangle + c(x)u(x) = f(x)}$ 变为

$$\text{Tr}[\bar{A}(y)D_y^2v(y)] + \langle \bar{b}(y), D_yv(y) \rangle + c(T^{-1}(y))v(y) = f(T^{-1}(y)),$$

其中 $v(y) = u(T^{-1}(y))$, 而 $\bar{A}(y) = DT(x)A(x)DT(x)^\top|_{x=T^{-1}(y)}$, $\bar{b}(y) = [b(x)DT(x)^\top + \text{Tr}[A(x)D^2T(x)]]|_{x=T^{-1}(y)}$, 这里

$$\text{Tr}[A(x)D^2T(x)] = (\text{Tr}[A(x)D^2T_1(x)], \dots, \text{Tr}[A(x)D^2T_n(x)]).$$

该定理的意义: 方程类型与坐标无关, 确实是客观属性, 分类合理.

证明. 记 $y = T(x) = (T_1(x), \dots, T_n(x))$. 由于 $u(x) = v(T(x)) = v(y)$, 根据链式法则,

$$\bullet \quad Du(x) = D_yv(y)DT(x) \quad Du = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}), \quad D_yv = (\frac{\partial v}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial y_n});$$

$$\bullet \quad D^2u(x) = DT(x)^\top D_y^2v(y)DT(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v(y)}{\partial y_k} D^2T_k(x); \quad (\text{按分量计算时注意 } \partial_j T_i \text{ 中 } i \text{ 是行标, } j \text{ 是列标, 所以为了凑成矩阵乘法, 前一个 } DT \text{ 需要转置!})$$

$$\Rightarrow \text{Tr}[A(x)D^2u(x)] = \text{Tr}[A(x)DT(x)^\top D_y^2v(y)DT(x)] + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v(y)}{\partial y_k} \text{Tr}[A(x)D^2T_k(x)] \xrightarrow[\text{第一项用}]{\text{Tr}(AB)=\text{Tr}(BA)}$$

$$= \text{Tr}[DT(x)A(x)DT(x)^\top D_y^2v(y)] + \langle \text{Tr}[A(x)D^2T(x)], D_yv \rangle. (\Rightarrow \text{定理结论成立.})$$

二阶线性常系数 PDE 的标准形

常系数 PDE $\text{Tr}[A D^2 u] + \langle b, Du \rangle + cu = f(x)$ 可通过自变量的线性变换 $y = Tx$ 变为如下标准形式

- 双曲型, 椭圆型和超双曲型情形: $\sum_{i=1}^n \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \bar{c}w = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , 而 $\bar{c}$ 是常数;
- 抛物型情形: $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) - \frac{\partial w}{\partial y_n}(y) = \bar{f}(y)$;
- 广义抛物型: $\sum_{i=1}^m \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \bar{c}w(y) = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , 而 $m < n$, $\bar{c}$ 是常数; 或者 $\sum_{i=1}^m \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \frac{\partial w}{\partial y_n}(y) = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , $m < n - 1$.

证明关键: 主部 (二阶导数项) 对角化后, 方程形式变为 $\sum_{i=1}^n \epsilon_i \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2}(y) + \langle \bar{b}, D_y v \rangle + \bar{c}v = \bar{f}(y)$.

i) 做变换 $v(y) = e^{\lambda \cdot y} w(y)$ 可以消去对应的输运项 (只要 $\epsilon_i = \pm 1$): $Dv(y) = w(y)e^{\lambda \cdot y} \lambda + e^{\lambda \cdot y} Dw(y)$, $D^2 v(y) = w(y)e^{\lambda \cdot y} \lambda^\top \lambda + e^{\lambda \cdot y} [\lambda^\top Dw(y) + Dw(y)^\top \lambda] + e^{\lambda \cdot y} D^2 w(y)$. (注意, 这里的 λ 是行向量.)

ii) 对于 $\epsilon_k = 0$ 的变量 y_k , 可通过对 y_k 变量的伸缩变换和反射, 使得对应输运项系数为 -1 .

iii) 由于输运项, 例如 $\partial v / \partial y_n$ 的存在, 而没有 $\partial^2 v / \partial y_n^2$ 项, 源项仍可通过变换 $v(y) = e^{\lambda_n y_n} w(y)$ 消去.

iv) 对于广义抛物型, 首先化到 $\sum_{i=1}^m \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \sum_{k=m+1}^n \bar{b}_k \frac{\partial w}{\partial y_k}(y) + \bar{c}w(y) = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , $m \leq n - 1$, $\bar{b}_k = 0$ 或 -1 . 如果 $m < n - 1$ 时 $\bar{b}_k$ 不全为零, 可把 $(0, \dots, 0, \bar{b}_{m+1}, \dots, \bar{b}_n)$ 作为新的 y_n 方向, 再消去零阶项. 要点: 这里要结合因变量的变换 (状态空间中的变换). 证明中出现的变换有时会用到, 需要留意.

二阶线性常系数 PDE 的标准形

常系数 PDE $\text{Tr}[A D^2 u] + \langle b, Du \rangle + cu = f(x)$ 可通过自变量的线性变换 $y = Tx$ 变为如下标准形式

- 双曲型, 椭圆型和超双曲型情形: $\sum_{i=1}^n \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \bar{c}w = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , 而 $\bar{c}$ 是常数;
- 抛物型情形: $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) - \frac{\partial w}{\partial y_n}(y) = \bar{f}(y)$;
- 广义抛物型: $\sum_{i=1}^m \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \bar{c}w(y) = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , 而 $m < n$, $\bar{c}$ 是常数; 或者 $\sum_{i=1}^m \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \frac{\partial w}{\partial y_n}(y) = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , $m < n - 1$.

证明关键: 主部 (二阶导数项) 对角化后, 方程形式变为 $\sum_{i=1}^n \epsilon_i \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2}(y) + \langle \bar{b}, D_y v \rangle + \bar{c}v = \bar{f}(y)$.

i) 做变换 $v(y) = e^{\lambda \cdot y} w(y)$ 可以消去对应的输运项 (只要 $\epsilon_i = \pm 1$): $Dv(y) = w(y)e^{\lambda \cdot y} \lambda + e^{\lambda \cdot y} Dw(y)$, $D^2 v(y) = w(y)e^{\lambda \cdot y} \lambda^\top \lambda + e^{\lambda \cdot y} [\lambda^\top Dw(y) + Dw(y)^\top \lambda] + e^{\lambda \cdot y} D^2 w(y)$. (注意, 这里的 λ 是行向量.)

ii) 对于 $\epsilon_k = 0$ 的变量 y_k , 可通过对 y_k 变量的伸缩变换和反射, 使得对应输运项系数为 -1 .

iii) 由于输运项, 例如 $\partial v / \partial y_n$ 的存在, 而没有 $\partial^2 v / \partial y_n^2$ 项, 源项仍可通过变换 $v(y) = e^{\lambda_n y_n} w(y)$ 消去.

iv) 对于广义抛物型, 首先化到 $\sum_{i=1}^m \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \sum_{k=m+1}^n \bar{b}_k \frac{\partial w}{\partial y_k}(y) + \bar{c}w(y) = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , $m \leq n - 1$, $\bar{b}_k = 0$ 或 -1 . 如果 $m < n - 1$ 时 $\bar{b}_k$ 不全为零, 可把 $(0, \dots, 0, \bar{b}_{m+1}, \dots, \bar{b}_n)$ 作为新的 y_n 方向, 再消去零阶项. 要点: 这里要结合因变量的变换 (状态空间中的变换). 证明中出现的变换有时会用到, 需要留意.

二阶线性常系数 PDE 的标准形

常系数 PDE $\text{Tr}[A D^2 u] + \langle b, Du \rangle + cu = f(x)$ 可通过自变量的线性变换 $y = Tx$ 变为如下标准形式

- 双曲型, 椭圆型和超双曲型情形: $\sum_{i=1}^n \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \bar{c}w = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , 而 $\bar{c}$ 是常数;
- 抛物型情形: $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) - \frac{\partial w}{\partial y_n}(y) = \bar{f}(y)$;
- 广义抛物型: $\sum_{i=1}^m \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \bar{c}w(y) = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , 而 $m < n$, $\bar{c}$ 是常数; 或者 $\sum_{i=1}^m \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \frac{\partial w}{\partial y_n}(y) = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , $m < n - 1$.

证明关键: 主部 (二阶导数项) 对角化后, 方程形式变为 $\sum_{i=1}^n \epsilon_i \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2}(y) + \langle \bar{b}, D_y v \rangle + \bar{c}v = \bar{f}(y)$.

i) 做变换 $v(y) = e^{\lambda \cdot y} w(y)$ 可以消去对应的输运项 (只要 $\epsilon_i = \pm 1$): $Dv(y) = w(y)e^{\lambda \cdot y} \lambda + e^{\lambda \cdot y} Dw(y)$, $D^2 v(y) = w(y)e^{\lambda \cdot y} \lambda^\top \lambda + e^{\lambda \cdot y} [\lambda^\top Dw(y) + Dw(y)^\top \lambda] + e^{\lambda \cdot y} D^2 w(y)$. (注意, 这里的 λ 是行向量.)

ii) 对于 $\epsilon_k = 0$ 的变量 y_k , 可通过对 y_k 变量的伸缩变换和反射, 使得对应输运项系数为 -1 .

iii) 由于输运项, 例如 $\partial v / \partial y_n$ 的存在, 而没有 $\partial^2 v / \partial y_n^2$ 项, 源项仍可通过变换 $v(y) = e^{\lambda_n y_n} w(y)$ 消去.

iv) 对于广义抛物型, 首先化到 $\sum_{i=1}^m \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \sum_{k=m+1}^n \bar{b}_k \frac{\partial w}{\partial y_k}(y) + \bar{c}w(y) = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , $m \leq n - 1$, $\bar{b}_k = 0$ 或 -1 . 如果 $m < n - 1$ 时 $\bar{b}_k$ 不全为零, 可把 $(0, \dots, 0, \bar{b}_{m+1}, \dots, \bar{b}_n)$ 作为新的 y_n 方向, 再消去零阶项. 要点: 这里要结合因变量的变换 (状态空间中的变换). 证明中出现的变换有时会用到, 需要留意.

二阶线性常系数 PDE 的标准形

常系数 PDE $\text{Tr}[A D^2 u] + \langle b, Du \rangle + cu = f(x)$ 可通过自变量的线性变换 $y = Tx$ 变为如下标准形式

- 双曲型, 椭圆型和超双曲型情形: $\sum_{i=1}^n \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \bar{c}w = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , 而 $\bar{c}$ 是常数;
- 抛物型情形: $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) - \frac{\partial w}{\partial y_n}(y) = \bar{f}(y)$;
- 广义抛物型: $\sum_{i=1}^m \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \bar{c}w(y) = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , 而 $m < n$, $\bar{c}$ 是常数; 或者 $\sum_{i=1}^m \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \frac{\partial w}{\partial y_n}(y) = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , $m < n - 1$.

证明关键: 主部 (二阶导数项) 对角化后, 方程形式变为 $\sum_{i=1}^n \epsilon_i \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2}(y) + \langle \bar{b}, D_y v \rangle + \bar{c}v = \bar{f}(y)$.

i) 做变换 $v(y) = e^{\lambda \cdot y} w(y)$ 可以消去对应的输运项 (只要 $\epsilon_i = \pm 1$): $Dv(y) = w(y)e^{\lambda \cdot y} \lambda + e^{\lambda \cdot y} Dw(y)$, $D^2 v(y) = w(y)e^{\lambda \cdot y} \lambda^\top \lambda + e^{\lambda \cdot y} [\lambda^\top Dw(y) + Dw(y)^\top \lambda] + e^{\lambda \cdot y} D^2 w(y)$. (注意, 这里的 λ 是行向量.)

ii) 对于 $\epsilon_k = 0$ 的变量 y_k , 可通过对 y_k 变量的伸缩变换和反射, 使得对应输运项系数为 -1 .

iii) 由于输运项, 例如 $\partial v / \partial y_n$ 的存在, 而没有 $\partial^2 v / \partial y_n^2$ 项, 源项仍可通过变换 $v(y) = e^{\lambda_n y_n} w(y)$ 消去.

iv) 对于广义抛物型, 首先化到 $\sum_{i=1}^m \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \sum_{k=m+1}^n \bar{b}_k \frac{\partial w}{\partial y_k}(y) + \bar{c}w(y) = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , $m \leq n - 1$, $\bar{b}_k = 0$ 或 -1 . 如果 $m < n - 1$ 时 $\bar{b}_k$ 不全为零, 可把 $(0, \dots, 0, \bar{b}_{m+1}, \dots, \bar{b}_n)$ 作为新的 y_n 方向, 再消去零阶项. 要点: 这里要结合因变量的变换 (状态空间中的变换). 证明中出现的变换有时会用到, 需要留意.

二阶线性常系数 PDE 的标准形

常系数 PDE $\text{Tr}[A D^2 u] + \langle b, Du \rangle + cu = f(x)$ 可通过自变量的线性变换 $y = Tx$ 变为如下标准形式

- 双曲型, 椭圆型和超双曲型情形: $\sum_{i=1}^n \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \bar{c}w = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , 而 $\bar{c}$ 是常数;
- 抛物型情形: $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) - \frac{\partial w}{\partial y_n}(y) = \bar{f}(y)$;
- 广义抛物型: $\sum_{i=1}^m \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \bar{c}w(y) = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , 而 $m < n$, $\bar{c}$ 是常数; 或者 $\sum_{i=1}^m \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \frac{\partial w}{\partial y_n}(y) = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , $m < n - 1$.

证明关键: 主部 (二阶导数项) 对角化后, 方程形式变为 $\sum_{i=1}^n \epsilon_i \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2}(y) + \langle \bar{b}, D_y v \rangle + \bar{c}v = \bar{f}(y)$.

i) 做变换 $v(y) = e^{\lambda \cdot y} w(y)$ 可以消去对应的输运项 (只要 $\epsilon_i = \pm 1$): $Dv(y) = w(y)e^{\lambda \cdot y} \lambda + e^{\lambda \cdot y} Dw(y)$, $D^2 v(y) = w(y)e^{\lambda \cdot y} \lambda^\top \lambda + e^{\lambda \cdot y} [\lambda^\top Dw(y) + Dw(y)^\top \lambda] + e^{\lambda \cdot y} D^2 w(y)$. (注意, 这里的 λ 是行向量.)

ii) 对于 $\epsilon_k = 0$ 的变量 y_k , 可通过对 y_k 变量的伸缩变换和反射, 使得对应输运项系数为 -1 .

iii) 由于输运项, 例如 $\partial v / \partial y_n$ 的存在, 而没有 $\partial^2 v / \partial y_n^2$ 项, 源项仍可通过变换 $v(y) = e^{\lambda_n y_n} w(y)$ 消去.

iv) 对于广义抛物型, 首先化到 $\sum_{i=1}^m \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \sum_{k=m+1}^n \bar{b}_k \frac{\partial w}{\partial y_k}(y) + \bar{c}w(y) = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , $m \leq n - 1$, $\bar{b}_k = 0$ 或 -1 . 如果 $m < n - 1$ 时 $\bar{b}_k$ 不全为零, 可把 $(0, \dots, 0, \bar{b}_{m+1}, \dots, \bar{b}_n)$ 作为新的 y_n 方向, 再消去零阶项. 要点: 这里要结合因变量的变换 (状态空间中的变换). 证明中出现的变换有时会用到, 需要留意.

二阶线性常系数 PDE 的标准形

常系数 PDE $\text{Tr}[A D^2 u] + \langle b, Du \rangle + cu = f(x)$ 可通过自变量的线性变换 $y = Tx$ 变为如下标准形式

- 双曲型, 椭圆型和超双曲型情形: $\sum_{i=1}^n \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \bar{c}w = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , 而 $\bar{c}$ 是常数;
- 抛物型情形: $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) - \frac{\partial w}{\partial y_n}(y) = \bar{f}(y)$;
- 广义抛物型: $\sum_{i=1}^m \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \bar{c}w(y) = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , 而 $m < n$, $\bar{c}$ 是常数; 或者 $\sum_{i=1}^m \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \frac{\partial w}{\partial y_n}(y) = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , $m < n - 1$.

证明关键: 主部 (二阶导数项) 对角化后, 方程形式变为 $\sum_{i=1}^n \epsilon_i \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2}(y) + \langle \bar{b}, D_y v \rangle + \bar{c}v = \bar{f}(y)$.

i) 做变换 $v(y) = e^{\lambda \cdot y} w(y)$ 可以消去对应的输运项 (只要 $\epsilon_i = \pm 1$): $Dv(y) = w(y)e^{\lambda \cdot y} \lambda + e^{\lambda \cdot y} Dw(y)$, $D^2 v(y) = w(y)e^{\lambda \cdot y} \lambda^\top \lambda + e^{\lambda \cdot y} [\lambda^\top Dw(y) + Dw(y)^\top \lambda] + e^{\lambda \cdot y} D^2 w(y)$. (注意, 这里的 λ 是行向量.)

ii) 对于 $\epsilon_k = 0$ 的变量 y_k , 可通过对 y_k 变量的伸缩变换和反射, 使得对应输运项系数为 -1 .

iii) 由于输运项, 例如 $\partial v / \partial y_n$ 的存在, 而没有 $\partial^2 v / \partial y_n^2$ 项, 源项仍可通过变换 $v(y) = e^{\lambda_n y_n} w(y)$ 消去.

iv) 对于广义抛物型, 首先化到 $\sum_{i=1}^m \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \sum_{k=m+1}^n \bar{b}_k \frac{\partial w}{\partial y_k}(y) + \bar{c}w(y) = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , $m \leq n - 1$, $\bar{b}_k = 0$ 或 -1 . 如果 $m < n - 1$ 时 $\bar{b}_k$ 不全为零, 可把 $(0, \dots, 0, \bar{b}_{m+1}, \dots, \bar{b}_n)$ 作为新的 y_n 方向, 再消去零阶项. 要点: 这里要结合因变量的变换 (状态空间中的变换). 证明中出现的变换有时会用到, 需要留意.

二阶线性常系数 PDE 的标准形

常系数 PDE $\boxed{\text{Tr}[A D^2 u] + \langle b, Du \rangle + cu = f(x)}$ 可通过自变量的线性变换 $y = Tx$ 变为如下标准形式

- 双曲型, 椭圆型和超双曲型情形: $\sum_{i=1}^n \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \bar{c}w = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , 而 $\bar{c}$ 是常数;
- 抛物型情形: $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) - \frac{\partial w}{\partial y_n}(y) = \bar{f}(y)$;
- 广义抛物型: $\sum_{i=1}^m \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \bar{c}w(y) = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , 而 $m < n$, $\bar{c}$ 是常数; 或者 $\sum_{i=1}^m \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \frac{\partial w}{\partial y_n}(y) = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , $m < n - 1$.

证明关键: 主部 (二阶导数项) 对角化后, 方程形式变为 $\sum_{i=1}^n \epsilon_i \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2}(y) + \langle \bar{b}, D_y v \rangle + \bar{c}v = \bar{f}(y)$.

i) 做变换 $v(y) = e^{\lambda \cdot y} w(y)$ 可以消去对应的输运项 (只要 $\epsilon_i = \pm 1$): $Dv(y) = w(y)e^{\lambda \cdot y} \lambda + e^{\lambda \cdot y} Dw(y)$, $D^2 v(y) = w(y)e^{\lambda \cdot y} \lambda^\top \lambda + e^{\lambda \cdot y} [\lambda^\top Dw(y) + Dw(y)^\top \lambda] + e^{\lambda \cdot y} D^2 w(y)$. (注意, 这里的 λ 是行向量.)

ii) 对于 $\epsilon_k = 0$ 的变量 y_k , 可通过对 y_k 变量的伸缩变换和反射, 使得对应输运项系数为 -1 .

iii) 由于输运项, 例如 $\partial v / \partial y_n$ 的存在, 而没有 $\partial^2 v / \partial y_n^2$ 项, 源项仍可通过变换 $v(y) = e^{\lambda_n y_n} w(y)$ 消去.

iv) 对于广义抛物型, 首先化到 $\sum_{i=1}^m \epsilon_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2}(y) + \sum_{k=m+1}^n \bar{b}_k \frac{\partial w}{\partial y_k}(y) + \bar{c}w(y) = \bar{f}(y)$, 其中 $\epsilon_i = 1$ 或 -1 , $m \leq n - 1$, $\bar{b}_k = 0$ 或 -1 . 如果 $m < n - 1$ 时 $\bar{b}_k$ 不全为零, 可把 $(0, \dots, 0, \bar{b}_{m+1}, \dots, \bar{b}_n)$ 作为新的 y_n 方向, 再消去零阶项. 要点: 这里要结合因变量的变换 (状态空间中的变换). 证明中出现的变换有时会用到, 需要留意.

两个自变量二阶线性 PDE 的标准形与特征线

只依赖于两个自变量 (x, y) 的二阶线性 (C^1 变系数)PDE

$$a_{11}(x, y)u_{xx}(x, y) + 2a_{12}(x, y)u_{xy}(x, y) + a_{22}(x, y)u_{yy}(x, y) + b_1(x, y)\partial_x u(x, y) + b_2(x, y)\partial_y u(x, y) + c(x, y)u(x, y) = f(x, y)$$

局部地, 可通过自变量的非线性变换 $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$, 化为如下标准形式

- 双曲型 ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$): $2u_{\xi\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$ 或 $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$
- 椭圆型 ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$): $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$
- 抛物型 ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ 在一个开集上成立时): $u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$

证明概要: 变换后主部系数矩阵 $\bar{A} = (DT)A(DT)^T$, 即 $\begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}^T$. 要确定函数 φ, ψ 使得 $\bar{a}_{11} = 0, \bar{a}_{22} = 0$, 即求

解一阶完全非线性 PDE $(\spadesuit) a_{11} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0$. 重要技巧 (利用微分化为 ODE): 设解为 $z = z(x, y)$, 在等值线 $z(x, y) = C$ 上

$z_x dx + z_y dy = 0 \Rightarrow$ 非线性 ODE — 特征方程 $a_{11}(x, y)dy^2 - 2a_{12}(x, y)dx dy + a_{22}(x, y)dx^2 = 0$: i) 双曲型方程 — 有两个独立的实解 φ, ψ , 得证 (思考: 这里“独立”是什么意思?); ii) 抛物型方程 — 只有一个实解 φ , 任取 ψ 使得 $T, T^{-1} \in C^2$ 即可; iii) 椭圆型 — ODE 通解形如 $\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C$, 取实函数 φ, ψ 为新坐标即可.

定义: 方程 $(\spadesuit)$ 的解的等值线, 或者特征方程的解确定的曲线, 叫作上述 PDE 的 **特征线**. 例: 波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 的特征线是 $x \pm at = C$; 热方程 $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ 的特征线是 $t = C$; Laplace 方程 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ 没有实特征线.

注意: 上述标准形是在一个开集内都成立的. 如果仅要求 $\bar{a}_{12} = 0$, 未必能保证 $u_{\xi\xi}, u_{\eta\eta}$ 的系数是开集上的常数函数. 从证明看出, 需要主项系数 $a_{ij} \in C^1$.

两个自变量二阶线性 PDE 的标准形与特征线

只依赖于两个自变量 (x, y) 的二阶线性 (C^1 变系数)PDE

$$a_{11}(x, y)u_{xx}(x, y) + 2a_{12}(x, y)u_{xy}(x, y) + a_{22}(x, y)u_{yy}(x, y) + b_1(x, y)\partial_x u(x, y) + b_2(x, y)\partial_y u(x, y) + c(x, y)u(x, y) = f(x, y)$$

局部地, 可通过自变量的非线性变换 $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$, 化为如下标准形式

- 双曲型 ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$): $2u_{\xi\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$ 或 $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$
- 椭圆型 ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$): $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$
- 抛物型 ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ 在一个开集上成立时): $u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$

证明概要: 变换后主部系数矩阵 $\bar{A} = (DT)A(DT)^T$, 即 $\begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}^T$. 要确定函数 φ, ψ 使得 $\bar{a}_{11} = 0, \bar{a}_{22} = 0$, 即求

解一阶完全非线性 PDE $(\spadesuit) a_{11} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0$. 重要技巧 (利用微分化为 ODE): 设解为 $z = z(x, y)$, 在等值线 $z(x, y) = C$ 上

$z_x dx + z_y dy = 0 \Rightarrow$ 非线性 ODE — 特征方程 $a_{11}(x, y)dy^2 - 2a_{12}(x, y)dx dy + a_{22}(x, y)dx^2 = 0$: i) 双曲型方程 — 有两个独立的实解 φ, ψ , 得证 (思考: 这里“独立”是什么意思?); ii) 抛物型方程 — 只有一个实解 φ , 任取 ψ 使得 $T, T^{-1} \in C^2$ 即可; iii) 椭圆型 — ODE 通解形如 $\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C$, 取实函数 φ, ψ 为新坐标即可.

定义: 方程 $(\spadesuit)$ 的解的等值线, 或者特征方程的解确定的曲线, 叫作上述 PDE 的特征线. 例: 波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 的特征线是 $x \pm at = C$; 热方程 $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ 的特征线是 $t = C$; Laplace 方程 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ 没有实特征线.

注意: 上述标准形是在一个开集内都成立的. 如果仅要求 $\bar{a}_{12} = 0$, 未必能保证 $u_{\xi\xi}, u_{\eta\eta}$ 的系数是开集上的常数函数. 从证明看出, 需要主项系数 $a_{ij} \in C^1$.

两个自变量二阶线性 PDE 的标准形与特征线

只依赖于两个自变量 (x, y) 的二阶线性 (C^1 变系数)PDE

$$a_{11}(x, y)u_{xx}(x, y) + 2a_{12}(x, y)u_{xy}(x, y) + a_{22}(x, y)u_{yy}(x, y) + b_1(x, y)\partial_x u(x, y) + b_2(x, y)\partial_y u(x, y) + c(x, y)u(x, y) = f(x, y)$$

局部地, 可通过自变量的非线性变换 $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$, 化为如下标准形式

- 双曲型 ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$): $2u_{\xi\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$ 或 $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$
- 椭圆型 ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$): $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$
- 抛物型 ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ 在一个开集上成立时): $u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$

证明概要: 变换后主部系数矩阵 $\bar{A} = (DT)A(DT)^T$, 即 $\begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}^T$. 要确定函数 φ, ψ 使得 $\bar{a}_{11} = 0, \bar{a}_{22} = 0$, 即求

解一阶完全非线性 PDE $(\spadesuit) a_{11} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0$. 重要技巧 (利用微分化为 ODE): 设解为 $z = z(x, y)$, 在等值线 $z(x, y) = C$ 上

$z_x dx + z_y dy = 0 \Rightarrow$ 非线性 ODE — 特征方程 $a_{11}(x, y)dy^2 - 2a_{12}(x, y)dx dy + a_{22}(x, y)dx^2 = 0$: i) 双曲型方程 — 有两个独立的实解 φ, ψ , 得证 (思考: 这里“独立”是什么意思?); ii) 抛物型方程 — 只有一个实解 φ , 任取 ψ 使得 $T, T^{-1} \in C^2$ 即可; iii) 椭圆型 — ODE 通解形如 $\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C$, 取实函数 φ, ψ 为新坐标即可.

定义: 方程 $(\spadesuit)$ 的解的等值线, 或者特征方程的解确定的曲线, 叫作上述 PDE 的**特征线**. 例: 波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 的特征线是 $x \pm at = C$; 热方程 $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ 的特征线是 $t = C$; Laplace 方程 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ 没有实特征线.

注意: 上述标准形是在一个开集内部成立的. 如果仅要求 $\bar{a}_{12} = 0$, 未必能保证 $u_{\xi\xi}, u_{\eta\eta}$ 的系数是开集上的常数函数. 从证明看出, 需要主项系数 $a_{ij} \in C^1$.

两个自变量二阶线性 PDE 的标准形与特征线

只依赖于两个自变量 (x, y) 的二阶线性 (C^1 变系数)PDE

$$a_{11}(x, y)u_{xx}(x, y) + 2a_{12}(x, y)u_{xy}(x, y) + a_{22}(x, y)u_{yy}(x, y) + b_1(x, y)\partial_x u(x, y) + b_2(x, y)\partial_y u(x, y) + c(x, y)u(x, y) = f(x, y)$$

局部地, 可通过自变量的非线性变换 $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, 化为如下标准形式

- **双曲型** ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$): $2u_{\xi\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$ 或 $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$
- **椭圆型** ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$): $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$
- **抛物型** ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ 在一个开集上成立时): $u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$

证明概要: 变换后主部系数矩阵 $\bar{A} = (DT)A(DT)^T$, 即 $\begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}^T$. 要确定函数 φ, ψ 使得 $\bar{a}_{11} = 0, \bar{a}_{22} = 0$, 即求

解一阶完全非线性 PDE $(\spadesuit) a_{11} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0$. 重要技巧 (利用微分化为 ODE): 设解为 $z = z(x, y)$, 在等值线 $z(x, y) = C$ 上

$z_x dx + z_y dy = 0 \Rightarrow$ 非线性 ODE — 特征方程 $a_{11}(x, y)dy^2 - 2a_{12}(x, y)dx dy + a_{22}(x, y)dx^2 = 0$: i) 双曲型方程 — 有两个独立的实解 φ, ψ , 得证 (思考: 这里“独立”是什么意思?); ii) 抛物型方程 — 只有一个实解 φ , 任取 ψ 使得 $T, T^{-1} \in C^2$ 即可; iii) 椭圆型 — ODE 通解形如 $\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C$, 取实函数 φ, ψ 为新坐标即可.

定义: 方程 $(\spadesuit)$ 的解的等值线, 或者特征方程的解确定的曲线, 叫作上述 PDE 的**特征线**. 例: 波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 的特征线是 $x \pm at = C$; 热方程 $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ 的特征线是 $t = C$; Laplace 方程 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ 没有实特征线.

注意: 上述标准形是在一个开集内都成立的. 如果仅要求 $\bar{a}_{12} = 0$, 未必能保证 $u_{\xi\xi}, u_{\eta\eta}$ 的系数是开集上的常数函数. 从证明看出, 需要主项系数 $a_{ij} \in C^1$.

两个自变量二阶线性 PDE 的标准形与特征线

只依赖于两个自变量 (x, y) 的二阶线性 (C^1 变系数)PDE

$$a_{11}(x, y)u_{xx}(x, y) + 2a_{12}(x, y)u_{xy}(x, y) + a_{22}(x, y)u_{yy}(x, y) + b_1(x, y)\partial_x u(x, y) + b_2(x, y)\partial_y u(x, y) + c(x, y)u(x, y) = f(x, y)$$

局部地, 可通过自变量的非线性变换 $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, 化为如下标准形式

- **双曲型** ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$): $2u_{\xi\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$ 或 $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$
- **椭圆型** ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$): $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$
- **抛物型** ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ 在一个开集上成立时): $u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$

证明概要: 变换后主部系数矩阵 $\bar{A} = (DT)A(DT)^T$, 即 $\begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}^T$. 要确定函数 φ, ψ 使得 $\bar{a}_{11} = 0, \bar{a}_{22} = 0$, 即求

解一阶完全非线性 PDE $(\spadesuit) a_{11} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0$. 重要技巧 (利用微分化为 ODE): 设解为 $z = z(x, y)$, 在等值线 $z(x, y) = C$ 上

$z_x dx + z_y dy = 0 \Rightarrow$ 非线性 ODE — 特征方程 $a_{11}(x, y)dy^2 - 2a_{12}(x, y)dx dy + a_{22}(x, y)dx^2 = 0$: i) 双曲型方程 — 有两个独立的实解 φ, ψ , 得证 (思考: 这里“独立”是什么意思?); ii) 抛物型方程 — 只有一个实解 φ , 任取 ψ 使得 $T, T^{-1} \in C^2$ 即可; iii) 椭圆型 — ODE 通解形如 $\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C$, 取实函数 φ, ψ 为新坐标即可.

定义: 方程 $(\spadesuit)$ 的解的等值线, 或者特征方程的解确定的曲线, 叫作上述 PDE 的**特征线**. 例: 波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 的特征线是 $x \pm at = C$; 热方程 $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ 的特征线是 $t = C$; Laplace 方程 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ 没有实特征线.

注意: 上述标准形是在一个开集内部成立的. 如果仅要求 $\bar{a}_{12} = 0$, 未必能保证 $u_{\xi\xi}, u_{\eta\eta}$ 的系数是开集上的常数函数. 从证明看出, 需要主项系数 $a_{ij} \in C^1$.

两个自变量二阶线性 PDE 的标准形与特征线

只依赖于两个自变量 (x, y) 的二阶线性 (C^1 变系数)PDE

$$a_{11}(x, y)u_{xx}(x, y) + 2a_{12}(x, y)u_{xy}(x, y) + a_{22}(x, y)u_{yy}(x, y) + b_1(x, y)\partial_x u(x, y) + b_2(x, y)\partial_y u(x, y) + c(x, y)u(x, y) = f(x, y)$$

局部地, 可通过自变量的非线性变换 $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, 化为如下标准形式

- **双曲型** ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$): $2u_{\xi\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$ 或 $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$
- **椭圆型** ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$): $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$
- **抛物型** ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ 在一个开集上成立时): $u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$

证明概要: 变换后主部系数矩阵 $\bar{A} = (DT)A(DT)^T$, 即 $\begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}^T$. 要确定函数 φ, ψ 使得 $\bar{a}_{11} = 0, \bar{a}_{22} = 0$, 即求

解一阶完全非线性 PDE $(\spadesuit) a_{11} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0$. 重要技巧 (利用微分化为 ODE): 设解为 $z = z(x, y)$, 在等值线 $z(x, y) = C$ 上

$z_x dx + z_y dy = 0 \Rightarrow$ 非线性 ODE — 特征方程 $a_{11}(x, y)dy^2 - 2a_{12}(x, y)dx dy + a_{22}(x, y)dx^2 = 0$: i) 双曲型方程 — 有两个独立的实解 φ, ψ , 得证 (思考: 这里“独立”是什么意思?); ii) 抛物型方程 — 只有一个实解 φ , 任取 ψ 使得 $T, T^{-1} \in C^2$ 即可; iii) 椭圆型 — ODE 通解形如 $\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C$, 取实函数 φ, ψ 为新坐标即可.

定义: 方程 $(\spadesuit)$ 的解的等值线, 或者特征方程的解确定的曲线, 叫作上述 PDE 的**特征线**. 例: 波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 的特征线是 $x \pm at = C$; 热方程 $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ 的特征线是 $t = C$; Laplace 方程 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ 没有实特征线.

注意: 上述标准形是在一个开集内都成立的. 如果仅要求 $\bar{a}_{12} = 0$, 未必能保证 $u_{\xi\xi}, u_{\eta\eta}$ 的系数是开集上的常数函数. 从证明看出, 需要主项系数 $a_{ij} \in C^1$.

两个自变量二阶线性 PDE 的标准形与特征线

只依赖于两个自变量 (x, y) 的二阶线性 (C^1 变系数)PDE

$$a_{11}(x, y)u_{xx}(x, y) + 2a_{12}(x, y)u_{xy}(x, y) + a_{22}(x, y)u_{yy}(x, y) + b_1(x, y)\partial_x u(x, y) + b_2(x, y)\partial_y u(x, y) + c(x, y)u(x, y) = f(x, y)$$

局部地, 可通过自变量的非线性变换 $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, 化为如下标准形式

- **双曲型** ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$): $2u_{\xi\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$ 或 $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$
- **椭圆型** ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$): $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$
- **抛物型** ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ 在一个开集上成立时): $u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$

证明概要: 变换后主部系数矩阵 $\bar{A} = (DT)A(DT)^T$, 即 $\begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}^T$. 要确定函数 φ, ψ 使得 $\bar{a}_{11} = 0, \bar{a}_{22} = 0$, 即求

解一阶完全非线性 PDE $(\spadesuit) a_{11} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0$. 重要技巧 (利用微分化为 ODE): 设解为 $z = z(x, y)$, 在等值线 $z(x, y) = C$ 上

$z_x dx + z_y dy = 0 \Rightarrow$ 非线性 ODE — 特征方程 $a_{11}(x, y)dy^2 - 2a_{12}(x, y)dx dy + a_{22}(x, y)dx^2 = 0$: i) 双曲型方程 — 有两个独立的实解 φ, ψ , 得证 (思考: 这里“独立”是什么意思?); ii) 抛物型方程 — 只有一个实解 φ , 任取 ψ 使得 $T, T^{-1} \in C^2$ 即可; iii) 椭圆型 — ODE 通解形如 $\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C$, 取实函数 φ, ψ 为新坐标即可.

定义: 方程 $(\spadesuit)$ 的解的等值线, 或者特征方程的解确定的曲线, 叫作上述 PDE 的**特征线**. 例: 波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 的特征线是 $x \pm at = C$; 热方程 $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ 的特征线是 $t = C$; Laplace 方程 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ 没有实特征线.

注意: 上述标准形是在一个开集内都成立的. 如果仅要求 $\bar{a}_{12} = 0$, 未必能保证 $u_{\xi\xi}, u_{\eta\eta}$ 的系数是开集上的常数函数. 从证明看出, 需要主项系数 $a_{ij} \in C^1$.

两个自变量二阶线性 PDE 的标准形与特征线

只依赖于两个自变量 (x, y) 的二阶线性 (C^1 变系数)PDE

$$a_{11}(x, y)u_{xx}(x, y) + 2a_{12}(x, y)u_{xy}(x, y) + a_{22}(x, y)u_{yy}(x, y) + b_1(x, y)\partial_x u(x, y) + b_2(x, y)\partial_y u(x, y) + c(x, y)u(x, y) = f(x, y)$$

局部地, 可通过自变量的非线性变换 $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, 化为如下标准形式

- **双曲型** ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$): $2u_{\xi\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$ 或 $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$
- **椭圆型** ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$): $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$
- **抛物型** ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ 在一个开集上成立时): $u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$

证明概要: 变换后主部系数矩阵 $\bar{A} = (DT)A(DT)^T$, 即 $\begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}^T$. 要确定函数 φ, ψ 使得 $\bar{a}_{11} = 0, \bar{a}_{22} = 0$, 即求

解一阶完全非线性 PDE $(\spadesuit) a_{11} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0$. 重要技巧 (利用微分化为 ODE): 设解为 $z = z(x, y)$, 在等值线 $z(x, y) = C$ 上

$z_x dx + z_y dy = 0 \Rightarrow$ 非线性 ODE — 特征方程 $a_{11}(x, y)dy^2 - 2a_{12}(x, y)dx dy + a_{22}(x, y)dx^2 = 0$: i) 双曲型方程 — 有两个独立的实解 φ, ψ , 得证 (思考: 这里“独立”是什么意思?); ii) 抛物型方程 — 只有一个实解 φ , 任取 ψ 使得 $T, T^{-1} \in C^2$ 即可; iii) 椭圆型 — ODE 通解形如 $\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C$, 取实函数 φ, ψ 为新坐标即可.

定义: 方程 $(\spadesuit)$ 的解的等值线, 或者特征方程的解确定的曲线, 叫作上述 PDE 的**特征线**. 例: 波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 的特征线是 $x \pm at = C$; 热方程 $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ 的特征线是 $t = C$; Laplace 方程 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ 没有实特征线.

注意: 上述标准形是在一个开集内都成立的. 如果仅要求 $\bar{a}_{12} = 0$, 未必能保证 $u_{\xi\xi}, u_{\eta\eta}$ 的系数是开集上的常数函数. 从证明看出, 需要主项系数 $a_{ij} \in C^1$.

两个自变量二阶线性 PDE 的标准形与特征线

只依赖于两个自变量 (x, y) 的二阶线性 (C^1 变系数)PDE

$$a_{11}(x, y)u_{xx}(x, y) + 2a_{12}(x, y)u_{xy}(x, y) + a_{22}(x, y)u_{yy}(x, y) + b_1(x, y)\partial_x u(x, y) + b_2(x, y)\partial_y u(x, y) + c(x, y)u(x, y) = f(x, y)$$

局部地, 可通过自变量的非线性变换 $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, 化为如下标准形式

- **双曲型** ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$): $2u_{\xi\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$ 或 $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$
- **椭圆型** ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$): $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$
- **抛物型** ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ 在一个开集上成立时): $u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$

证明概要: 变换后主部系数矩阵 $\bar{A} = (DT)A(DT)^T$, 即 $\begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}^T$. 要确定函数 φ, ψ 使得 $\bar{a}_{11} = 0, \bar{a}_{22} = 0$, 即求

解一阶完全非线性 PDE $(\spadesuit) a_{11} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0$. 重要技巧 (利用微分化为 ODE): 设解为 $z = z(x, y)$, 在等值线 $z(x, y) = C$ 上

$z_x dx + z_y dy = 0 \Rightarrow$ 非线性 ODE — 特征方程 $a_{11}(x, y)dy^2 - 2a_{12}(x, y)dx dy + a_{22}(x, y)dx^2 = 0$: i) 双曲型方程 — 有两个独立的实解 φ, ψ , 得证 (思考: 这里“独立”是什么意思?); ii) 抛物型方程 — 只有一个实解 φ , 任取 ψ 使得 $T, T^{-1} \in C^2$ 即可; iii) 椭圆型 — ODE 通解形如 $\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C$, 取实函数 φ, ψ 为新坐标即可.

定义: 方程 $(\spadesuit)$ 的解的等值线, 或者特征方程的解确定的曲线, 叫作上述 PDE 的**特征线**. 例: 波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 的特征线是 $x \pm at = C$; 热方程 $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ 的特征线是 $t = C$; Laplace 方程 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ 没有实特征线.

注意: 上述标准形是在一个开集内都成立的. 如果仅要求 $\bar{a}_{12} = 0$, 未必能保证 $u_{\xi\xi}, u_{\eta\eta}$ 的系数是开集上的常数函数. 从证明看出, 需要主项系数 $a_{ij} \in C^1$.

二阶线性 PDE 的弱间断解及其弱间断面

定义 (弱间断解)

对区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的二阶线性 PDE $\boxed{\text{Tr}[A D^2 u] + \langle b, Du \rangle + cu = f(x)}$, 设函数 $u \in C^1(\Omega)$ 且存在 $n-1$ 维正则曲面 $S \subset \Omega$, 使得 $u \in C^2(\Omega \setminus S)$, u 在 $\Omega \setminus S$ 上的各点满足上述 PDE, 且 S 上的点都是 u 的二阶偏导函数的跳跃间断点 (即 S 两侧 u 的二阶偏导函数的单侧极限存在但不相等), 则称 u 是上述 PDE 的一个 **弱间断解**, 而 S 是这个解的一个 **弱间断面**.

- 例: $u(x, t) = \begin{cases} [(x - at)^2 - 1]^2, & |x - at| \leq 1, \\ 0, & |x - at| > 1 \end{cases}$ 是波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 的一个弱间断解, 其弱间断面是

$\{(x, t) : |x - at| = 1\}$. 弱间断面的物理意义: 信号 (扰动) 传播的波前/波后

- 设弱间断面由方程 $\varphi(x) = 0$ 确定 ($x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$), 如何计算它? 关键: 问题的等价提法 – 找函数 φ , 使得在曲面 $\{\varphi = 0\}$ 上给定了 u 及其一阶偏导数的值, 无法利用 PDE 唯一地确定 u 的所有二阶偏导数. 解决的关键: 转换思考角度 – 给定曲面, 找 PDE 要满足的条件!

二阶线性 PDE 的弱间断解及其弱间断面

定义 (弱间断解)

对区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的二阶线性 PDE $\boxed{\text{Tr}[A D^2 u] + \langle b, Du \rangle + cu = f(x)}$, 设函数 $u \in C^1(\Omega)$ 且存在 $n-1$ 维正则曲面 $S \subset \Omega$, 使得 $u \in C^2(\Omega \setminus S)$, u 在 $\Omega \setminus S$ 上的各点满足上述 PDE, 且 S 上的点都是 u 的二阶偏导函数的跳跃间断点 (即 S 两侧 u 的二阶偏导函数的单侧极限存在但不相等), 则称 u 是上述 PDE 的一个 **弱间断解**, 而 S 是这个解的一个 **弱间断面**.

- 例: $u(x, t) = \begin{cases} [(x - at)^2 - 1]^2, & |x - at| \leq 1, \\ 0, & |x - at| > 1 \end{cases}$ 是波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 的一个弱间断解, 其弱间断面是

$\{(x, t) : |x - at| = 1\}$. 弱间断面的物理意义: 信号 (扰动) 传播的波前/波后

- 设弱间断面由方程 $\varphi(x) = 0$ 确定 ($x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$), 如何计算它? 关键: 问题的等价提法 – 找函数 φ , 使得在曲面 $\{\varphi = 0\}$ 上给定了 u 及其一阶偏导数的值, 无法利用 PDE 唯一地确定 u 的所有二阶偏导数. 解决的关键: 转换思考角度 – 给定曲面, 找 PDE 要满足的条件!

二阶线性 PDE 的弱间断解及其弱间断面

定义 (弱间断解)

对区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的二阶线性 PDE $\boxed{\text{Tr}[A D^2 u] + \langle b, Du \rangle + cu = f(x)}$, 设函数 $u \in C^1(\Omega)$ 且存在 $n-1$ 维正则曲面 $S \subset \Omega$, 使得 $u \in C^2(\Omega \setminus S)$, u 在 $\Omega \setminus S$ 上的各点满足上述 PDE, 且 S 上的点都是 u 的二阶偏导函数的跳跃间断点 (即 S 两侧 u 的二阶偏导函数的单侧极限存在但不相等), 则称 u 是上述 PDE 的一个 **弱间断解**, 而 S 是这个解的一个 **弱间断面**.

- 例: $u(x, t) = \begin{cases} [(x - at)^2 - 1]^2, & |x - at| \leq 1, \\ 0, & |x - at| > 1 \end{cases}$ 是波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 的一个弱间断解, 其弱间断面是

$\{(x, t) : |x - at| = 1\}$. **弱间断面的物理意义: 信号 (扰动) 传播的波前/波后**

- 设弱间断面由方程 $\varphi(x) = 0$ 确定 ($x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$), 如何计算它? **关键: 问题的等价提法 – 找函数 φ , 使得在曲面 $\{\varphi = 0\}$ 上给定了 u 及其一阶偏导数的值, 无法利用 PDE 唯一地确定 u 的所有二阶偏导数. 解决的关键: 转换思考角度 – 给定曲面, 找 PDE 要满足的条件!**

二阶线性 PDE 的弱间断解及其弱间断面

定义 (弱间断解)

对区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的二阶线性 PDE $\boxed{\text{Tr}[A D^2 u] + \langle b, Du \rangle + cu = f(x)}$, 设函数 $u \in C^1(\Omega)$ 且存在 $n-1$ 维正则曲面 $S \subset \Omega$, 使得 $u \in C^2(\Omega \setminus S)$, u 在 $\Omega \setminus S$ 上的各点满足上述 PDE, 且 S 上的点都是 u 的二阶偏导函数的跳跃间断点 (即 S 两侧 u 的二阶偏导函数的单侧极限存在但不相等), 则称 u 是上述 PDE 的一个 **弱间断解**, 而 S 是这个解的一个 **弱间断面**.

- 例: $u(x, t) = \begin{cases} [(x - at)^2 - 1]^2, & |x - at| \leq 1, \\ 0, & |x - at| > 1 \end{cases}$ 是波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 的一个弱间断解, 其弱间断面是

$\{(x, t) : |x - at| = 1\}$. 弱间断面的物理意义: 信号 (扰动) 传播的波前/波后

- 设弱间断面由方程 $\varphi(x) = 0$ 确定 ($x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$), 如何计算它? 关键: 问题的等价提法 – 找函数 φ , 使得在曲面 $\{\varphi = 0\}$ 上给定了 u 及其一阶偏导数的值, 无法利用 PDE 唯一地确定 u 的所有二阶偏导数. 解决的关键: 转换思考角度 – 给定曲面, 找 PDE 要满足的条件!

二阶线性 PDE 的弱间断解及其弱间断面

定义 (弱间断解)

对区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的二阶线性 PDE $\boxed{\text{Tr}[A D^2 u] + \langle b, Du \rangle + cu = f(x)}$, 设函数 $u \in C^1(\Omega)$ 且存在 $n-1$ 维正则曲面 $S \subset \Omega$, 使得 $u \in C^2(\Omega \setminus S)$, u 在 $\Omega \setminus S$ 上的各点满足上述 PDE, 且 S 上的点都是 u 的二阶偏导函数的跳跃间断点 (即 S 两侧 u 的二阶偏导函数的单侧极限存在但不相等), 则称 u 是上述 PDE 的一个 **弱间断解**, 而 S 是这个解的一个 **弱间断面**.

- 例: $u(x, t) = \begin{cases} [(x - at)^2 - 1]^2, & |x - at| \leq 1, \\ 0, & |x - at| > 1 \end{cases}$ 是波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 的一个弱间断解, 其弱间断面是

$\{(x, t) : |x - at| = 1\}$. 弱间断面的物理意义: 信号 (扰动) 传播的波前/波后

- 设弱间断面由方程 $\varphi(x) = 0$ 确定 ($x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$), 如何计算它? 关键: 问题的等价提法 – 找函数 φ , 使得在曲面 $\{\varphi = 0\}$ 上给定了 u 及其一阶偏导数的值, 无法利用 PDE 唯一地确定 u 的所有二阶偏导数. 解决的关键: 转换思考角度— 给定曲面, 找 PDE 要满足的条件!

二阶线性 PDE 的弱间断解及其弱间断面

定义 (弱间断解)

对区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的二阶线性 PDE $\boxed{\text{Tr}[A D^2 u] + \langle b, Du \rangle + cu = f(x)}$, 设函数 $u \in C^1(\Omega)$ 且存在 $n-1$ 维正则曲面 $S \subset \Omega$, 使得 $u \in C^2(\Omega \setminus S)$, u 在 $\Omega \setminus S$ 上的各点满足上述 PDE, 且 S 上的点都是 u 的二阶偏导函数的跳跃间断点 (即 S 两侧 u 的二阶偏导函数的单侧极限存在但不相等), 则称 u 是上述 PDE 的一个 **弱间断解**, 而 S 是这个解的一个 **弱间断面**.

- 例: $u(x, t) = \begin{cases} [(x - at)^2 - 1]^2, & |x - at| \leq 1, \\ 0, & |x - at| > 1 \end{cases}$ 是波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 的一个弱间断解, 其弱间断面是

$\{(x, t) : |x - at| = 1\}$. **弱间断面的物理意义: 信号 (扰动) 传播的波前/波后**

- 设弱间断面由方程 $\varphi(x) = 0$ 确定 ($x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$), 如何计算它? **关键: 问题的等价提法 – 找函数 φ , 使得在曲面 $\{\varphi = 0\}$ 上给定了 u 及其一阶偏导数的值, 无法利用 PDE 唯一地确定 u 的所有二阶偏导数. 解决的关键: 转换思考角度 – 给定曲面, 找 PDE 要满足的条件!**

n 个自变变量的二阶 (线性)PDE 的特征方程和弱间断面

问题: $\text{Tr}[AD^2u] + \langle b, Du \rangle + cu = f(x)$, 给定处处存在法向的 C^2 曲面 S 以及 $u|_S, Du|_S$, PDE 满足何种条件时无法唯一确定 $D^2u|_S$? 思考: 为什么要求 S 是 C^2 的? C^1 (连续可微) 是否可以?

- **简单情形** 设 $S: \{x_n = 0\}$, 给定 $u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$, $\partial_{x_k} u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ ($k = 1, \dots, n$), 则所有二阶导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ ($i, j = 1, \dots, n-1$) 都可用偏导数的定义唯一确定. 要通过 PDE 确定所有二阶偏导数, PDE 要满足条件 $A_{nn}|_S \neq 0 \Rightarrow \{x_n = 0\}$ 是弱间断面, 则 $A_{nn}|_S = 0$.
- **一般情形** 设 $S: \{\varphi(x) = 0\}$, 法向为 $\mathbf{n} = D\varphi$, 故已知 $|D\varphi| \neq 0$. 取 $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in S$, 不妨设 $\partial_{x_n} \varphi(x^0) \neq 0$, 作变换 $\xi_j = x_j - x_j^0$, ($j = 1, \dots, n-1$), $\xi_n = \varphi(x_1, \dots, x_n)$, 该变换 Jacobi 行列式为 $\partial_{x_n} \varphi(x^0)$, 所以是局部 C^2 同胚. 变换后 PDE 主部系数为 $\bar{A}_{kl}(\xi) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j}$, 曲面 S 方程变为 $\xi_n = 0$. 由简单情形结论, 对弱间断面, 需要 $\bar{A}_{nn}(\xi)|_{\xi_n=0} = 0 \Rightarrow$ 弱间断面满足一阶完全非线性 PDE $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0. \quad (\ddagger)$
- **结论: 弱间断面 = 特征曲面** (注意: 特征曲面定义为上述 PDE $(\ddagger)$ 的解 $z = \varphi(x)$ 确定的等值面 $\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) = C\}$, 是两个自变量情形的自然推广)

n 个自变变量的二阶 (线性)PDE 的特征方程和弱间断面

问题: $\text{Tr}[AD^2u] + \langle b, Du \rangle + cu = f(x)$, 给定处处存在法向的 C^2 曲面 S 以及 $u|_S, Du|_S$, PDE 满足何种条件时无法唯一确定 $D^2u|_S$? 思考: 为什么要求 S 是 C^2 的? C^1 (连续可微) 是否可以?

- **简单情形** 设 $S: \{x_n = 0\}$, 给定 $u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0), \partial_{x_k} u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) (k = 1, \dots, n)$, 则所有二阶导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0), \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) (i, j = 1, \dots, n-1)$ 都可用偏导数的定义唯一确定. 要通过 PDE 确定所有二阶偏导数, PDE 要满足条件 $A_{nn}|_S \neq 0 \Rightarrow \{x_n = 0\}$ 是弱间断面, 则 $A_{nn}|_S = 0$.
- **一般情形** 设 $S: \{\varphi(x) = 0\}$, 法向为 $\mathbf{n} = D\varphi$, 故已知 $|D\varphi| \neq 0$. 取 $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in S$, 不妨设 $\partial_{x_n} \varphi(x^0) \neq 0$, 作变换 $\xi_j = x_j - x_j^0, (j = 1, \dots, n-1), \xi_n = \varphi(x_1, \dots, x_n)$, 该变换 Jacobi 行列式为 $\partial_{x_n} \varphi(x^0)$, 所以是局部 C^2 同胚. 变换后 PDE 主部系数为 $\bar{A}_{kl}(\xi) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j}$, 曲面 S 方程变为 $\xi_n = 0$. 由简单情形结论, 对弱间断面, 需要 $\bar{A}_{nn}(\xi)|_{\xi_n=0} = 0 \Rightarrow$ 弱间断面满足一阶完全非线性 PDE $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0. \quad (\ddagger)$
- **结论: 弱间断面 = 特征曲面** (注意: 特征曲面定义为上述 PDE $(\ddagger)$ 的解 $z = \varphi(x)$ 确定的等值面 $\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) = C\}$, 是两个自变量情形的自然推广)

n 个自变变量的二阶 (线性)PDE 的特征方程和弱间断面

问题: $\text{Tr}[AD^2u] + \langle b, Du \rangle + cu = f(x)$, 给定处处存在法向的 C^2 曲面 S 以及 $u|_S, Du|_S$, PDE 满足何种条件时无法唯一确定 $D^2u|_S$? 思考: 为什么要求 S 是 C^2 的? C^1 (连续可微) 是否可以?

- **简单情形** 设 $S: \{x_n = 0\}$, 给定 $u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0), \partial_{x_k} u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) (k = 1, \dots, n)$, 则所有二阶导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0), \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) (i, j = 1, \dots, n-1)$ 都可用偏导数的定义唯一确定. 要通过 PDE 确定所有二阶偏导数, PDE 要满足条件 $A_{nn}|_S \neq 0 \Rightarrow \{x_n = 0\}$ 是弱间断面, 则 $A_{nn}|_S = 0$.
- **一般情形** 设 $S: \{\varphi(x) = 0\}$, 法向为 $\mathbf{n} = D\varphi$, 故已知 $|D\varphi| \neq 0$. 取 $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in S$, 不妨设 $\partial_{x_n} \varphi(x^0) \neq 0$, 作变换 $\xi_j = x_j - x_j^0, (j = 1, \dots, n-1), \xi_n = \varphi(x_1, \dots, x_n)$, 该变换 Jacobi 行列式为 $\partial_{x_n} \varphi(x^0)$, 所以是局部 C^2 同胚. 变换后 PDE 主部系数为 $\bar{A}_{kl}(\xi) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j}$, 曲面 S 方程变为 $\xi_n = 0$. 由简单情形结

论, 对弱间断面, 需要 $\bar{A}_{nn}(\xi)|_{\xi_n=0} = 0 \Rightarrow$ 弱间断面满足一阶完全非线性 PDE

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0. \quad (\ddagger)$$

- **结论: 弱间断面 = 特征曲面** (注意: 特征曲面定义为上述 PDE $(\ddagger)$ 的解 $z = \varphi(x)$ 确定的等值面 $\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) = C\}$, 是两个自变量情形的自然推广)

n 个自变变量的二阶 (线性)PDE 的特征方程和弱间断面

问题: $\text{Tr}[AD^2u] + \langle b, Du \rangle + cu = f(x)$, 给定处处存在法向的 C^2 曲面 S 以及 $u|_S, Du|_S$, PDE 满足何种条件时无法唯一确定 $D^2u|_S$? 思考: 为什么要求 S 是 C^2 的? C^1 (连续可微) 是否可以?

- 简单情形** 设 $S: \{x_n = 0\}$, 给定 $u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0), \partial_{x_k} u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) (k = 1, \dots, n)$, 则所有二阶导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0), \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) (i, j = 1, \dots, n-1)$ 都可用偏导数的定义唯一确定. 要通过 PDE 确定所有二阶偏导数, PDE 要满足条件 $A_{nn}|_S \neq 0 \Rightarrow \{x_n = 0\}$ 是弱间断面, 则 $A_{nn}|_S = 0$.
- 一般情形** 设 $S: \{\varphi(x) = 0\}$, 法向为 $\mathbf{n} = D\varphi$, 故已知 $|D\varphi| \neq 0$. 取 $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in S$, 不妨设 $\partial_{x_n} \varphi(x^0) \neq 0$, 作变换 $\xi_j = x_j - x_j^0, (j = 1, \dots, n-1), \xi_n = \varphi(x_1, \dots, x_n)$, 该变换 Jacobi 行列式为 $\partial_{x_n} \varphi(x^0)$, 所以是局部 C^2 同胚. 变换后 PDE 主部系数为 $\bar{A}_{kl}(\xi) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j}$, 曲面 S 方程变为 $\xi_n = 0$. 由简单情形结论, 对弱间断面, 需要 $\bar{A}_{nn}(\xi)|_{\xi_n=0} = 0 \Rightarrow$ **弱间断面满足一阶完全非线性 PDE** $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0. \quad (\ddagger)$
- 结论: 弱间断面 = 特征曲面** (注意: 特征曲面定义为上述 PDE $(\ddagger)$ 的解 $z = \varphi(x)$ 确定的等值面 $\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) = C\}$, 是两个自变量情形的自然推广)

波动方程的特征锥

问题: 求解 PDE $\text{Tr}[A D^2 u] + \langle b, Du \rangle + cu = f(x)$ 的特征方程 $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0$, 以确定弱间断面 $\{\varphi(x) = 0\}$.

第一步: 代数层次求解 (二次型的零化子空间): 求特征面的法向—行向量 α 使得 $\langle \alpha A, \alpha \rangle = 0$ 第二步: 分析层次求解 (Frobenius 定理)—找曲面使得其法向为 α

● Laplace 方程: 无实特征面 $\Rightarrow$ 无弱间断解 $\Rightarrow$ (解具有很高正则性)

● (三维) 热方程 $u_t - a^2 \Delta u = 0$: 特征方向 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 规范化 $\Rightarrow |\alpha| = 1$, 特征方程

$\Rightarrow \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 0 \Rightarrow \alpha = (1, 0, 0, 0) \Rightarrow \phi(x, t) = t - C$ (C 是一个常数) $\Rightarrow$ 特征面是 $\{t = C\}$ ($\Rightarrow$ 解关于空间变量仍有高正则性)

● (二维) 波动方程 $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$: 特征方向 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, 规范化 $\Rightarrow |\alpha| = 1$, 特征方程

$\Rightarrow \alpha_0^2 = a^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \Rightarrow$ 特征方向为 $\alpha(\theta) = (\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{\cos \theta}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{\sin \theta}{\sqrt{1+a^2}})$ (θ 是参数), 过点 (x_0, y_0, t_0) , 以 $\alpha(\theta)$ 为法向

的平面族 $a(t - t_0) + (\cos \theta)(x - x_0) + (\sin \theta)(y - y_0) = 0$ (♣) 满足特征方程 $\Rightarrow$ 它的包络也满足特征方程. (微分几何) 包络的计算方法: (♣) 关于参数 θ 求导 $\Rightarrow (-\sin \theta)(x - x_0) + (\cos \theta)(y - y_0) = 0$, 联立 (♣) 消去 θ 得到包络的曲面方程: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2(t - t_0)^2$ (二维波动方程的特征锥面) ($\Rightarrow$ 双曲型方程解的正则性差, 尤其是在特征面附近)

波动方程的特征锥

问题: 求解 PDE $\text{Tr}[A D^2 u] + \langle b, Du \rangle + cu = f(x)$ 的特征方程 $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0$, 以确定弱间断面 $\{\varphi(x) = 0\}$.

第一步: 代数层次求解 (二次型的零化子空间): 求特征面的法向—行向量 α 使得 $\langle \alpha A, \alpha \rangle = 0$ 第二步: 分析层次求解 (Frobenius 定理)—找曲面使得其法向为 α

● Laplace 方程: 无实特征面 $\Rightarrow$ 无弱间断解 $\Rightarrow$ (解具有很高正则性)

● (三维) 热方程 $u_t - a^2 \Delta u = 0$: 特征方向 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 规范化 $\Rightarrow |\alpha| = 1$, 特征方程

$\Rightarrow \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 0 \Rightarrow \alpha = (1, 0, 0, 0) \Rightarrow \phi(x, t) = t - C$ (C 是一个常数) $\Rightarrow$ 特征面是 $\{t = C\}$ ($\Rightarrow$ 解关于空间变量仍有高正则性)

● (二维) 波动方程 $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$: 特征方向 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, 规范化 $\Rightarrow |\alpha| = 1$, 特征方程

$\Rightarrow \alpha_0^2 = a^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \Rightarrow$ 特征方向为 $\alpha(\theta) = (\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{\cos \theta}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{\sin \theta}{\sqrt{1+a^2}})$ (θ 是参数), 过点 (x_0, y_0, t_0) , 以 $\alpha(\theta)$ 为法向

的平面族 $\boxed{a(t - t_0) + (\cos \theta)(x - x_0) + (\sin \theta)(y - y_0) = 0} \quad (\clubsuit)$ 满足特征方程 $\Rightarrow$ 它的包络也满足特征方程. (微分几何) 包络的计算方法: $(\clubsuit)$ 关于参数 θ 求导 $\Rightarrow (-\sin \theta)(x - x_0) + (\cos \theta)(y - y_0) = 0$, 联立 $(\clubsuit)$ 消去 θ 得到包络的曲面方程: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2(t - t_0)^2$ (二维波动方程的特征锥面) ($\Rightarrow$ 双曲型方程解的正则性差, 尤其是在特征面附近)

波动方程的特征锥

问题: 求解 PDE $\text{Tr}[A D^2 u] + \langle b, Du \rangle + cu = f(x)$ 的特征方程 $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0$, 以确定弱间断面 $\{\varphi(x) = 0\}$.

第一步: 代数层次求解 (二次型的零化子空间): 求特征面的法向—行向量 α 使得 $\langle \alpha A, \alpha \rangle = 0$ 第二步: 分析层次求解 (Frobenius 定理)—找曲面使得其法向为 α

● Laplace 方程: 无实特征面 $\Rightarrow$ 无弱间断解 $\Rightarrow$ (解具有很高正则性)

● (三维) 热方程 $u_t - a^2 \Delta u = 0$: 特征方向 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 规范化 $\Rightarrow |\alpha| = 1$, 特征方程

$\Rightarrow \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 0 \Rightarrow \alpha = (1, 0, 0, 0) \Rightarrow \phi(x, t) = t - C$ (C 是一个常数) $\Rightarrow$ 特征面是 $\{t = C\}$ ($\Rightarrow$ 解关于空间变量仍有高正则性)

● (二维) 波动方程 $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$: 特征方向 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, 规范化 $\Rightarrow |\alpha| = 1$, 特征方程

$\Rightarrow \alpha_0^2 = a^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \Rightarrow$ 特征方向为 $\alpha(\theta) = (\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{\cos \theta}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{\sin \theta}{\sqrt{1+a^2}})$ (θ 是参数), 过点 (x_0, y_0, t_0) , 以 $\alpha(\theta)$ 为法向

的平面族 $a(t - t_0) + (\cos \theta)(x - x_0) + (\sin \theta)(y - y_0) = 0$ (♣) 满足特征方程 $\Rightarrow$ 它的包络也满足特征方程. (微分几何) 包络的计算方法: (♣) 关于参数 θ 求导 $\Rightarrow (-\sin \theta)(x - x_0) + (\cos \theta)(y - y_0) = 0$, 联立 (♣) 消去 θ 得到包络的曲面方程: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2(t - t_0)^2$ (二维波动方程的特征锥面) ($\Rightarrow$ 双曲型方程解的正则性差, 尤其是在特征面附近)

波动方程的特征锥

问题: 求解 PDE $\text{Tr}[A D^2 u] + \langle b, Du \rangle + cu = f(x)$ 的特征方程 $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0$, 以确定弱间断面 $\{\varphi(x) = 0\}$.

第一步: 代数层次求解 (二次型的零化子空间): 求特征面的法向—行向量 α 使得 $\langle \alpha A, \alpha \rangle = 0$ 第二步: 分析层次求解 (Frobenius 定理)—找曲面使得其法向为 α

● Laplace 方程: 无实特征面 $\Rightarrow$ 无弱间断解 $\Rightarrow$ (解具有很高正则性)

● (三维) 热方程 $u_t - a^2 \Delta u = 0$: 特征方向 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 规范化 $\Rightarrow |\alpha| = 1$, 特征方程

$\Rightarrow \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 0 \Rightarrow \alpha = (1, 0, 0, 0) \Rightarrow \phi(x, t) = t - C$ (C 是一个常数) $\Rightarrow$ 特征面是 $\{t = C\}$ ($\Rightarrow$ 解关于空间变量仍有高正则性)

● (二维) 波动方程 $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$: 特征方向 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, 规范化 $\Rightarrow |\alpha| = 1$, 特征方程

$\Rightarrow \alpha_0^2 = a^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \Rightarrow$ 特征方向为 $\alpha(\theta) = (\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{\cos \theta}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{\sin \theta}{\sqrt{1+a^2}})$ (θ 是参数), 过点 (x_0, y_0, t_0) , 以 $\alpha(\theta)$ 为法向

的平面族 $a(t - t_0) + (\cos \theta)(x - x_0) + (\sin \theta)(y - y_0) = 0$ (♣) 满足特征方程 $\Rightarrow$ 它的包络也满足特征方程. (微分几何) 包络的计算方法: (♣) 关于参数 θ 求导 $\Rightarrow (-\sin \theta)(x - x_0) + (\cos \theta)(y - y_0) = 0$, 联立 (♣) 消去 θ 得到包络的曲面方程: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2(t - t_0)^2$ (二维波动方程的特征锥面) ($\Rightarrow$ 双曲型方程解的正则性差, 尤其是在特征面附近)

波动方程的特征锥

问题: 求解 PDE $\text{Tr}[A D^2 u] + \langle b, Du \rangle + cu = f(x)$ 的特征方程 $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0$, 以确定弱间断面 $\{\varphi(x) = 0\}$.

第一步: 代数层次求解 (二次型的零化子空间): 求特征面的法向—行向量 α 使得 $\langle \alpha A, \alpha \rangle = 0$ 第二步: 分析层次求解 (Frobenius 定理)—找曲面使得其法向为 α

● Laplace 方程: 无实特征面 $\Rightarrow$ 无弱间断解 $\Rightarrow$ (解具有很高正则性)

● (三维) 热方程 $u_t - a^2 \Delta u = 0$: 特征方向 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 规范化 $\Rightarrow |\alpha| = 1$, 特征方程

$\Rightarrow \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 0 \Rightarrow \alpha = (1, 0, 0, 0) \Rightarrow \phi(x, t) = t - C$ (C 是一个常数) $\Rightarrow$ 特征面是 $\{t = C\}$ ($\Rightarrow$ 解关于空间变量仍有高正则性)

● (二维) 波动方程 $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$: 特征方向 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, 规范化 $\Rightarrow |\alpha| = 1$, 特征方程

$\Rightarrow \alpha_0^2 = a^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \Rightarrow$ 特征方向为 $\alpha(\theta) = (\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{\cos \theta}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{\sin \theta}{\sqrt{1+a^2}})$ (θ 是参数), 过点 (x_0, y_0, t_0) , 以 $\alpha(\theta)$ 为法向

的平面族 $a(t - t_0) + (\cos \theta)(x - x_0) + (\sin \theta)(y - y_0) = 0$ (♣) 满足特征方程 $\Rightarrow$ 它的包络也满足特征方程. (微分几何) 包络的计算方法: (♣) 关于参数 θ 求导 $\Rightarrow (-\sin \theta)(x - x_0) + (\cos \theta)(y - y_0) = 0$, 联立 (♣) 消去 θ 得到包络的曲面方程: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2(t - t_0)^2$ (二维波动方程的特征锥面) ($\Rightarrow$ 双曲型方程解的正则性差, 尤其是在特征面附近)

波动方程的特征锥

问题: 求解 PDE $\text{Tr}[A D^2 u] + \langle b, Du \rangle + cu = f(x)$ 的特征方程 $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0$, 以确定弱间断面 $\{\varphi(x) = 0\}$.

第一步: 代数层次求解 (二次型的零化子空间): 求特征面的法向—行向量 α 使得 $\langle \alpha A, \alpha \rangle = 0$ 第二步: 分析层次求解 (Frobenius 定理)—找曲面使得其法向为 α

● Laplace 方程: 无实特征面 $\Rightarrow$ 无弱间断解 $\Rightarrow$ (解具有很高正则性)

● (三维) 热方程 $u_t - a^2 \Delta u = 0$: 特征方向 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 规范化 $\Rightarrow |\alpha| = 1$, 特征方程

$\Rightarrow \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 0 \Rightarrow \alpha = (1, 0, 0, 0) \Rightarrow \phi(x, t) = t - C$ (C 是一个常数) $\Rightarrow$ 特征面是 $\{t = C\}$ ($\Rightarrow$ 解关于空间变量仍有高正则性)

● (二维) 波动方程 $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$: 特征方向 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, 规范化 $\Rightarrow |\alpha| = 1$, 特征方程

$\Rightarrow \alpha_0^2 = a^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \Rightarrow$ 特征方向为 $\alpha(\theta) = (\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{\cos \theta}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{\sin \theta}{\sqrt{1+a^2}})$ (θ 是参数), 过点 (x_0, y_0, t_0) , 以 $\alpha(\theta)$ 为法向

的平面族 $\boxed{a(t - t_0) + (\cos \theta)(x - x_0) + (\sin \theta)(y - y_0) = 0} \quad (\clubsuit)$ 满足特征方程 $\Rightarrow$ 它的包络也满足特征方

程. (微分几何) 包络的计算方法: $(\clubsuit)$ 关于参数 θ 求导 $\Rightarrow (-\sin \theta)(x - x_0) + (\cos \theta)(y - y_0) = 0$, 联立 $(\clubsuit)$ 消去

θ 得到包络的曲面方程: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2(t - t_0)^2$ (二维波动方程的特征锥面) ($\Rightarrow$ 双曲型方程解的正则性差, 尤其是在特征面附近)

波动方程的特征锥

问题: 求解 PDE $\text{Tr}[A D^2 u] + \langle b, Du \rangle + cu = f(x)$ 的特征方程 $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0$, 以确定弱间断面 $\{\varphi(x) = 0\}$.

第一步: 代数层次求解 (二次型的零化子空间): 求特征面的法向—行向量 α 使得 $\langle \alpha A, \alpha \rangle = 0$ 第二步: 分析层次求解 (Frobenius 定理)—找曲面使得其法向为 α

● Laplace 方程: 无实特征面 $\Rightarrow$ 无弱间断解 $\Rightarrow$ (解具有很高正则性)

● (三维) 热方程 $u_t - a^2 \Delta u = 0$: 特征方向 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 规范化 $\Rightarrow |\alpha| = 1$, 特征方程

$\Rightarrow \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 0 \Rightarrow \alpha = (1, 0, 0, 0) \Rightarrow \phi(x, t) = t - C$ (C 是一个常数) $\Rightarrow$ 特征面是 $\{t = C\}$ ($\Rightarrow$ 解关于空间变量仍有高正则性)

● (二维) 波动方程 $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$: 特征方向 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, 规范化 $\Rightarrow |\alpha| = 1$, 特征方程

$\Rightarrow \alpha_0^2 = a^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \Rightarrow$ 特征方向为 $\alpha(\theta) = (\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{\cos \theta}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{\sin \theta}{\sqrt{1+a^2}})$ (θ 是参数), 过点 (x_0, y_0, t_0) , 以 $\alpha(\theta)$ 为法向

的平面族 $\boxed{a(t - t_0) + (\cos \theta)(x - x_0) + (\sin \theta)(y - y_0) = 0} \quad (\clubsuit)$ 满足特征方程 $\Rightarrow$ 它的包络也满足特征方程. (微分几何) 包络的计算方法: $(\clubsuit)$ 关于参数 θ 求导 $\Rightarrow (-\sin \theta)(x - x_0) + (\cos \theta)(y - y_0) = 0$, 联立 $(\clubsuit)$ 消去 θ 得到包络的曲面方程: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2(t - t_0)^2$ (二维波动方程的特征锥面) ($\Rightarrow$ 双曲型方程解的正则性差, 尤其是在特征面附近)

复习: (微分几何) 曲面族的包络

- 设 $\{S_\lambda\}$ 是一族正则地依赖于参数 λ 的正则曲面 (即法向量处处存在, 处处不为零, 且连续可微地依赖于参量 λ). 如果有一张曲面 S , 它具有如下性质: S 在每一点与 $\{S_\lambda\}$ 中的一张曲面相切 (即在该点具有相同的法向量), 而对每一张曲面 S_λ , 也存在其上一点, 与 S 在这一点相切. 那么称 S 是曲面族 $\{S_\lambda\}$ 的 **包络 (envelope)**.
- 例: 设 S_λ 由方程 $F(x, y, z, \lambda) = 0$ 确定, 且 $(\partial_x F, \partial_y F, \partial_z F) \neq 0$, 则包络由方程组 $F(x, y, z, \lambda) = 0, \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) = 0$ 确定.
- 定理: 单参数平面族的包络是可展曲面 (developable surface).

由直线织成的曲面叫直纹面(ruled surface), 这些直线叫作直纹面的母线 (generatrix). 如果沿着一个直纹面的母线, 曲面的切平面都相同, 这样的直纹面叫可展曲面. 可展曲面只有锥面、柱面和切线面三类. 切线面(tangent surface) 是指一条空间曲线的切线生成的曲面.

- 定理: 一个非可展的曲面可视为它的两参数切平面族的包络.

参考— 苏步青, 胡和生, 沈纯理, 潘养廉, 张国匡: 微分几何. 高等教育出版社, 1979. [第二章 1.6 节]

- 类比 ODE: 每点给定切向量确定曲线; 推广到高维: 每点给定切平面, 确定超曲面; 每点给定一个线性子空间, 确定一个子流形 $\Rightarrow$ Frobenius 定理

展望: (微分几何,PDE) Frobenius 理论

- 分析角度: 一组超定的一阶线性齐次偏微分方程组何时解; 几何角度: 可否由切空间 (一组向量场) 确定子流形?
- 定义 (分布及其积分): 设 M 是 m 维 C^k 流形. 若对每一点 $p \in M$, 都指定切空间 $T_p(M)$ 的一个 l 维子空间 $\mathcal{D}^l(p) \subset T_p(M)$, 则 $\mathcal{D}^l = \cup_{p \in M} \mathcal{D}^l(p)$ 构成切丛 $T(M)$ 的一个子丛, 称为 M 上的一个 l 维分布. 若对每一点 $p \in M$, 都有一个邻域 U 及其上 l 个 C^r 向量场 $X_1, \dots, X_l$, 使得在任何点 $q \in U$, $X_1(q), \dots, X_l(q)$ 是子空间 $\mathcal{D}^l(q)$ 的一组基, 则称 $\mathcal{D}^l$ 是 l 维的 C^r 分布, 称 $X_1, \dots, X_l$ 是 $\mathcal{D}^l$ 在 U 上的一组 (局部) 基 (向量场), 或称 $X_1, \dots, X_l$ 在 U 上生成 $\mathcal{D}^l$. 设 $i(W)$ 是 M 的浸入子流形, 其中 $i: W \rightarrow M$ 是包含映射, 如果对每一点 $p \in W$, 都有 $i_*(T_p(W)) \subset \mathcal{D}^l(i(p))$, 则称 $i(W)$ 是分布 $\mathcal{D}^l$ 的积分流形.
- 定义 (完全可积): 设 $\mathcal{D}^l$ 为 m 维 C^k 流形 M 上的 l 维 C^{k-1} 分布, 如果对每一点 $p \in M$, 都存在包含 p 的坐标图 $(U, \varphi; x^i)$, 使得 $U_c = \{q \in U: x^\alpha(q) = c^\alpha \text{ (} c^\alpha \text{ 为任意常数)}, l+1 \leq \alpha \leq m\}$ 都是 $\mathcal{D}^l$ 的积分流形, 则称分布 $\mathcal{D}^l$ 是完全可积的.
- 定义 (对合): 设 $\mathcal{D}^l$ 是 m 维 C^k 流形 M 上的 l 维 C^{k-1} 分布. 若对每一点 $p \in M$, 都存在一个邻域 U 和在 U 上生成 $\mathcal{D}^l$ 的 l 个 C^{k-1} 向量场 $X_1, \dots, X_l$, 使得对任意点 $q \in U$, 都有 $[X_a, X_b] \in \mathcal{D}^l(q)$, $1 \leq a, b \leq l$, 则称分布 $\mathcal{D}^l$ 是对合的. 这里 $[X, Y] \doteq XY - YX$ 是向量场的 Lie 括号.
- Frobenius 定理: C^k 流形 M 上 C^{k-1} 分布 $\mathcal{D}^l$ 为完全可积的充分必要条件是 $\mathcal{D}^l$ 是对合的.
参考 — 白正国, 沈一兵, 水乃翔, 郭孝英: 黎曼几何初步 (修订版). 高等教育出版社, 2004. (第 2 章 2.4 节)

余阳政, 冯承天: 物理学中的几何方法. 高等教育出版社, 1998. (第 19 章)

两个自变量一阶线性常系数 PDE 组的分类

$u_t + Au_x + Bu = F(x, t)$ (这里 A, B 是 $n \times n$ 矩阵, $u(x, t), F(x, t)$ 是 n -维列向量值函数)

- **双曲型**: A 可以在实数域 $\mathbb{R}$ 对角化 (在 $B \equiv 0, F \equiv 0$ 时存在形如 $e^{i(x-\lambda_i t)} r_i$ ($i = 1, \dots, n$) 的 n 个平面波解. λ_i : A 的特征值; r_i : 对应于 λ_i 的特征向量).
 - 严格双曲型 (所有实特征值互不相同).
 - 例: 一维非线性弹性振动方程组 $\rho_t - q_x = 0, q_t - \sigma(\rho)_x = 0$ ($\sigma'(\rho) > 0$);
 - 例: 一维等熵气体动力学方程组 $\rho_t + (\rho u)_x = 0, (\rho u)_t + (\rho u^2 + p(\rho))_x = 0$ ($p'(\rho) > 0 \Rightarrow$ 在 $\rho = \rho_0, u = 0$ 处线性化 $\Rightarrow$ 扰动量满足 $\rho_t + \rho_0 u_x = 0, u_t + \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0} \rho_x = 0 \Rightarrow \rho_{tt} - p'(\rho_0) \rho_{xx} = 0 \Rightarrow \sqrt{p'(\rho_0)} =$ 音速).
- **椭圆型**: A 可以在复数域 $\mathbb{C}$ 对角化, 且所有特征值都是 (成对的共轭) 虚数.
例: Cauchy-Riemann 方程组 (复变函数): $u_x = v_y, u_y = -v_x$ ($w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ 连续可微 +CR 方程 $\Rightarrow w(z) = w(x, y)$ 是全纯函数, $z = x + iy$).
- **双曲-椭圆复合型**: A 可以在复数域 $\mathbb{C}$ 对角化, 且既有实特征值, 也有虚特征值 ($\Rightarrow$ 成对出现, 所以 $n \geq 3$).

两个自变量一阶线性常系数 PDE 组的分类

$u_t + Au_x + Bu = F(x, t)$ (这里 A, B 是 $n \times n$ 矩阵, $u(x, t), F(x, t)$ 是 n -维列向量值函数)

- **双曲型**: A 可以在实数域 $\mathbb{R}$ 对角化 (在 $B \equiv 0, F \equiv 0$ 时存在形如 $e^{i(x-\lambda_i t)} r_i$ ($i = 1, \dots, n$) 的 n 个平面波解. λ_i : A 的特征值; r_i : 对应于 λ_i 的特征向量).
 - 严格双曲型 (所有实特征值互不相同).
 - 例: 一维非线性弹性振动方程组 $\rho_t - q_x = 0, q_t - \sigma(\rho)_x = 0$ ($\sigma'(\rho) > 0$);
 - 例: 一维等熵气体动力学方程组 $\rho_t + (\rho u)_x = 0, (\rho u)_t + (\rho u^2 + p(\rho))_x = 0$ ($p'(\rho) > 0 \Rightarrow$ 在 $\rho = \rho_0, u = 0$ 处线性化 $\Rightarrow$ 扰动量满足 $\rho_t + \rho_0 u_x = 0, u_t + \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0} \rho_x = 0 \Rightarrow \rho_{tt} - p'(\rho_0) \rho_{xx} = 0 \Rightarrow \sqrt{p'(\rho_0)} = \text{音速}$).
- **椭圆型**: A 可以在复数域 $\mathbb{C}$ 对角化, 且所有特征值都是 (成对的共轭) 虚数.
例: Cauchy-Riemann 方程组 (复变函数): $u_x = v_y, u_y = -v_x$ ($w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ 连续可微 +CR 方程 $\Rightarrow w(z) = w(x, y)$ 是全纯函数, $z = x + iy$).
- **双曲-椭圆复合型**: A 可以在复数域 $\mathbb{C}$ 对角化, 且既有实特征值, 也有虚特征值 ($\Rightarrow$ 成对出现, 所以 $n \geq 3$).

两个自变量一阶线性常系数 PDE 组的分类

$u_t + Au_x + Bu = F(x, t)$ (这里 A, B 是 $n \times n$ 矩阵, $u(x, t), F(x, t)$ 是 n -维列向量值函数)

- **双曲型**: A 可以在实数域 $\mathbb{R}$ 对角化 (在 $B \equiv 0, F \equiv 0$ 时存在形如 $e^{i(x-\lambda_i t)} r_i$ ($i = 1, \dots, n$) 的 n 个平面波解. λ_i : A 的特征值; r_i : 对应于 λ_i 的特征向量).
 - 严格双曲型 (所有实特征值互不相同).
 - 例: 一维非线性弹性振动方程组 $\rho_t - q_x = 0, q_t - \sigma(\rho)_x = 0$ ($\sigma'(\rho) > 0$);
 - 例: 一维等熵气体动力学方程组 $\rho_t + (\rho u)_x = 0, (\rho u)_t + (\rho u^2 + p(\rho))_x = 0$ ($p'(\rho) > 0 \Rightarrow$ 在 $\rho = \rho_0, u = 0$ 处线性化 $\Rightarrow$ 扰动量满足 $\rho_t + \rho_0 u_x = 0, u_t + \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0} \rho_x = 0 \Rightarrow \rho_{tt} - p'(\rho_0) \rho_{xx} = 0 \Rightarrow \sqrt{p'(\rho_0)} =$ 音速).
- **椭圆型**: A 可以在复数域 $\mathbb{C}$ 对角化, 且所有特征值都是 (成对的共轭) 虚数.
例: Cauchy-Riemann 方程组 (复变函数): $u_x = v_y, u_y = -v_x$ ($w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ 连续可微 +CR 方程 $\Rightarrow w(z) = w(x, y)$ 是全纯函数, $z = x + iy$).
- **双曲-椭圆复合型**: A 可以在复数域 $\mathbb{C}$ 对角化, 且既有实特征值, 也有虚特征值 ($\Rightarrow$ 成对出现, 所以 $n \geq 3$).

两个自变量一阶线性常系数 PDE 组的分类

$u_t + Au_x + Bu = F(x, t)$ (这里 A, B 是 $n \times n$ 矩阵, $u(x, t), F(x, t)$ 是 n -维列向量值函数)

- **双曲型**: A 可以在实数域 $\mathbb{R}$ 对角化 (在 $B \equiv 0, F \equiv 0$ 时存在形如 $e^{i(x-\lambda_i t)} r_i$ ($i = 1, \dots, n$) 的 n 个平面波解. λ_i : A 的特征值; r_i : 对应于 λ_i 的特征向量).
 - 严格双曲型 (所有实特征值互不相同).
 - 例: 一维非线性弹性振动方程组 $\rho_t - q_x = 0, q_t - \sigma(\rho)_x = 0$ ($\sigma'(\rho) > 0$);
 - 例: 一维等熵气体动力学方程组 $\rho_t + (\rho u)_x = 0, (\rho u)_t + (\rho u^2 + p(\rho))_x = 0$ ($p'(\rho) > 0 \Rightarrow$ 在 $\rho = \rho_0, u = 0$ 处线性化 $\Rightarrow$ 扰动量满足 $\rho_t + \rho_0 u_x = 0, u_t + \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0} \rho_x = 0 \Rightarrow \rho_{tt} - p'(\rho_0) \rho_{xx} = 0 \Rightarrow \sqrt{p'(\rho_0)} =$ 音速).
- **椭圆型**: A 可以在复数域 $\mathbb{C}$ 对角化, 且所有特征值都是 (成对的共轭) 虚数.
例: Cauchy-Riemann 方程组 (复变函数): $u_x = v_y, u_y = -v_x$ ($w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ 连续可微 +CR 方程 $\Rightarrow w(z) = w(x, y)$ 是全纯函数, $z = x + iy$).
- **双曲-椭圆复合型**: A 可以在复数域 $\mathbb{C}$ 对角化, 且既有实特征值, 也有虚特征值 ($\Rightarrow$ 成对出现, 所以 $n \geq 3$).

两个自变量一阶线性常系数 PDE 组的分类

$u_t + Au_x + Bu = F(x, t)$ (这里 A, B 是 $n \times n$ 矩阵, $u(x, t), F(x, t)$ 是 n -维列向量值函数)

- **双曲型**: A 可以在实数域 $\mathbb{R}$ 对角化 (在 $B \equiv 0, F \equiv 0$ 时存在形如 $e^{i(x-\lambda_i t)} r_i$ ($i = 1, \dots, n$) 的 n 个平面波解. λ_i : A 的特征值; r_i : 对应于 λ_i 的特征向量).
 - 严格双曲型 (所有实特征值互不相同).
 - 例: 一维非线性弹性振动方程组 $\rho_t - q_x = 0, q_t - \sigma(\rho)_x = 0$ ($\sigma'(\rho) > 0$);
 - 例: 一维等熵气体动力学方程组 $\rho_t + (\rho u)_x = 0, (\rho u)_t + (\rho u^2 + p(\rho))_x = 0$ ($p'(\rho) > 0 \Rightarrow$ 在 $\rho = \rho_0, u = 0$ 处线性化 $\Rightarrow$ 扰动量满足 $\rho_t + \rho_0 u_x = 0, u_t + \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0} \rho_x = 0 \Rightarrow \rho_{tt} - p'(\rho_0) \rho_{xx} = 0 \Rightarrow \sqrt{p'(\rho_0)} =$ 音速).
- **椭圆型**: A 可以在复数域 $\mathbb{C}$ 对角化, 且所有特征值都是 (成对的共轭) 虚数.
例: Cauchy-Riemann 方程组 (复变函数): $u_x = v_y, u_y = -v_x$ ($w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ 连续可微 +CR 方程 $\Rightarrow w(z) = w(x, y)$ 是全纯函数, $z = x + iy$).
- **双曲-椭圆复合型**: A 可以在复数域 $\mathbb{C}$ 对角化, 且既有实特征值, 也有虚特征值 ($\Rightarrow$ 成对出现, 所以 $n \geq 3$).

两个自变量一阶线性常系数 PDE 组的分类

$u_t + Au_x + Bu = F(x, t)$ (这里 A, B 是 $n \times n$ 矩阵, $u(x, t), F(x, t)$ 是 n -维列向量值函数)

- **双曲型**: A 可以在实数域 $\mathbb{R}$ 对角化 (在 $B \equiv 0, F \equiv 0$ 时存在形如 $e^{i(x-\lambda_i t)} r_i$ ($i = 1, \dots, n$) 的 n 个平面波解. λ_i : A 的特征值; r_i : 对应于 λ_i 的特征向量).
 - 严格双曲型 (所有实特征值互不相同).
 - 例: 一维非线性弹性振动方程组 $\rho_t - q_x = 0, q_t - \sigma(\rho)_x = 0$ ($\sigma'(\rho) > 0$);
 - 例: 一维等熵气体动力学方程组 $\rho_t + (\rho u)_x = 0, (\rho u)_t + (\rho u^2 + p(\rho))_x = 0$ ($p'(\rho) > 0 \Rightarrow$ 在 $\rho = \rho_0, u = 0$ 处线性化 $\Rightarrow$ 扰动量满足 $\rho_t + \rho_0 u_x = 0, u_t + \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0} \rho_x = 0 \Rightarrow \rho_{tt} - p'(\rho_0) \rho_{xx} = 0 \Rightarrow \sqrt{p'(\rho_0)} =$ 音速).
- **椭圆型**: A 可以在复数域 $\mathbb{C}$ 对角化, 且所有特征值都是 (成对的共轭) 虚数.
例: Cauchy-Riemann 方程组 (复变函数): $u_x = v_y, u_y = -v_x$ ($w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ 连续可微 +CR 方程 $\Rightarrow w(z) = w(x, y)$ 是全纯函数, $z = x + iy$).
- **双曲-椭圆复合型**: A 可以在复数域 $\mathbb{C}$ 对角化, 且既有实特征值, 也有虚特征值 ($\Rightarrow$ 成对出现, 所以 $n \geq 3$).

两个自变量一阶线性常系数 PDE 组的分类

$u_t + Au_x + Bu = F(x, t)$ (这里 A, B 是 $n \times n$ 矩阵, $u(x, t), F(x, t)$ 是 n -维列向量值函数)

- **双曲型**: A 可以在实数域 $\mathbb{R}$ 对角化 (在 $B \equiv 0, F \equiv 0$ 时存在形如 $e^{i(x-\lambda_i t)} r_i$ ($i = 1, \dots, n$) 的 n 个平面波解. λ_i : A 的特征值; r_i : 对应于 λ_i 的特征向量).
 - 严格双曲型 (所有实特征值互不相同).
 - 例: 一维非线性弹性振动方程组 $\rho_t - q_x = 0, q_t - \sigma(\rho)_x = 0$ ($\sigma'(\rho) > 0$);
 - 例: 一维等熵气体动力学方程组 $\rho_t + (\rho u)_x = 0, (\rho u)_t + (\rho u^2 + p(\rho))_x = 0$ ($p'(\rho) > 0 \Rightarrow$ 在 $\rho = \rho_0, u = 0$ 处线性化 $\Rightarrow$ 扰动量满足 $\rho_t + \rho_0 u_x = 0, u_t + \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0} \rho_x = 0 \Rightarrow \rho_{tt} - p'(\rho_0) \rho_{xx} = 0 \Rightarrow \sqrt{p'(\rho_0)} =$ 音速).
- **椭圆型**: A 可以在复数域 $\mathbb{C}$ 对角化, 且所有特征值都是 (成对的共轭) 虚数.
例: Cauchy-Riemann 方程组 (复变函数): $u_x = v_y, u_y = -v_x$ ($w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ 连续可微 +CR 方程 $\Rightarrow w(z) = w(x, y)$ 是全纯函数, $z = x + iy$).
- **双曲-椭圆复合型**: A 可以在复数域 $\mathbb{C}$ 对角化, 且既有实特征值, 也有虚特征值 ($\Rightarrow$ 成对出现, 所以 $n \geq 3$).

两个自变量一阶线性常系数 PDE 组的分类

$u_t + Au_x + Bu = F(x, t)$ (这里 A, B 是 $n \times n$ 矩阵, $u(x, t), F(x, t)$ 是 n -维列向量值函数)

- **双曲型**: A 可以在实数域 $\mathbb{R}$ 对角化 (在 $B \equiv 0, F \equiv 0$ 时存在形如 $e^{i(x-\lambda_i t)} r_i$ ($i = 1, \dots, n$) 的 n 个平面波解. λ_i : A 的特征值; r_i : 对应于 λ_i 的特征向量).
 - 严格双曲型 (所有实特征值互不相同).
 - 例: 一维非线性弹性振动方程组 $\rho_t - q_x = 0, q_t - \sigma(\rho)_x = 0$ ($\sigma'(\rho) > 0$);
 - 例: 一维等熵气体动力学方程组 $\rho_t + (\rho u)_x = 0, (\rho u)_t + (\rho u^2 + p(\rho))_x = 0$ ($p'(\rho) > 0 \Rightarrow$ 在 $\rho = \rho_0, u = 0$ 处线性化 $\Rightarrow$ 扰动量满足 $\rho_t + \rho_0 u_x = 0, u_t + \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0} \rho_x = 0 \Rightarrow \rho_{tt} - p'(\rho_0) \rho_{xx} = 0 \Rightarrow \sqrt{p'(\rho_0)} =$ 音速).
- **椭圆型**: A 可以在复数域 $\mathbb{C}$ 对角化, 且所有特征值都是 (成对的共轭) 虚数.
例: Cauchy-Riemann 方程组 (复变函数): $u_x = v_y, u_y = -v_x$ ($w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ 连续可微 +CR 方程 $\Rightarrow w(z) = w(x, y)$ 是全纯函数, $z = x + iy$).
- **双曲-椭圆复合型**: A 可以在复数域 $\mathbb{C}$ 对角化, 且既有实特征值, 也有虚特征值 ($\Rightarrow$ 成对出现, 所以 $n \geq 3$).

两个自变量一阶线性常系数 PDE 组的分类

$u_t + Au_x + Bu = F(x, t)$ (这里 A, B 是 $n \times n$ 矩阵, $u(x, t), F(x, t)$ 是 n -维列向量值函数)

- **双曲型**: A 可以在实数域 $\mathbb{R}$ 对角化 (在 $B \equiv 0, F \equiv 0$ 时存在形如 $e^{i(x-\lambda_i t)} r_i$ ($i = 1, \dots, n$) 的 n 个平面波解. λ_i : A 的特征值; r_i : 对应于 λ_i 的特征向量).
 - 严格双曲型 (所有实特征值互不相同).
 - 例: 一维非线性弹性振动方程组 $\rho_t - q_x = 0, q_t - \sigma(\rho)_x = 0$ ($\sigma'(\rho) > 0$);
 - 例: 一维等熵气体动力学方程组 $\rho_t + (\rho u)_x = 0, (\rho u)_t + (\rho u^2 + p(\rho))_x = 0$ ($p'(\rho) > 0 \Rightarrow$ 在 $\rho = \rho_0, u = 0$ 处线性化 $\Rightarrow$ 扰动量满足 $\rho_t + \rho_0 u_x = 0, u_t + \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0} \rho_x = 0 \Rightarrow \rho_{tt} - p'(\rho_0) \rho_{xx} = 0 \Rightarrow \sqrt{p'(\rho_0)} =$ 音速).
- **椭圆型**: A 可以在复数域 $\mathbb{C}$ 对角化, 且所有特征值都是 (成对的共轭) 虚数.
例: Cauchy-Riemann 方程组 (复变函数): $u_x = v_y, u_y = -v_x$ ($w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ 连续可微 +CR 方程 $\Rightarrow w(z) = w(x, y)$ 是全纯函数, $z = x + iy$).
- **双曲-椭圆复合型**: A 可以在复数域 $\mathbb{C}$ 对角化, 且既有实特征值, 也有虚特征值 ($\Rightarrow$ 成对出现, 所以 $n \geq 3$).

两个自变量一阶线性常系数 PDE 组的分类

$u_t + Au_x + Bu = F(x, t)$ (这里 A, B 是 $n \times n$ 矩阵, $u(x, t), F(x, t)$ 是 n -维列向量值函数)

- **双曲型**: A 可以在实数域 $\mathbb{R}$ 对角化 (在 $B \equiv 0, F \equiv 0$ 时存在形如 $e^{i(x-\lambda_i t)} r_i$ ($i = 1, \dots, n$) 的 n 个平面波解. λ_i : A 的特征值; r_i : 对应于 λ_i 的特征向量).
 - 严格双曲型 (所有实特征值互不相同).
 - 例: 一维非线性弹性振动方程组 $\rho_t - q_x = 0, q_t - \sigma(\rho)_x = 0$ ($\sigma'(\rho) > 0$);
 - 例: 一维等熵气体动力学方程组 $\rho_t + (\rho u)_x = 0, (\rho u)_t + (\rho u^2 + p(\rho))_x = 0$ ($p'(\rho) > 0 \Rightarrow$ 在 $\rho = \rho_0, u = 0$ 处线性化 $\Rightarrow$ 扰动量满足 $\rho_t + \rho_0 u_x = 0, u_t + \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0} \rho_x = 0 \Rightarrow \rho_{tt} - p'(\rho_0) \rho_{xx} = 0 \Rightarrow \sqrt{p'(\rho_0)} =$ 音速).
- **椭圆型**: A 可以在复数域 $\mathbb{C}$ 对角化, 且所有特征值都是 (成对的共轭) 虚数.
例: Cauchy-Riemann 方程组 (复变函数): $u_x = v_y, u_y = -v_x$ ($w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ 连续可微 +CR 方程 $\Rightarrow w(z) = w(x, y)$ 是全纯函数, $z = x + iy$).
- **双曲-椭圆复合型**: A 可以在复数域 $\mathbb{C}$ 对角化, 且既有实特征值, 也有虚特征值 ($\Rightarrow$ 成对出现, 所以 $n \geq 3$).

例 1. 判断 PDE $\sum_{i,j=1}^n (\delta_{ij} - x_i x_j) \partial_{ij} u + 2 \sum_{i=1}^n x_i \partial_i u + cu = f$ 的类型.

解. 1) 置 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 则 $A = (\delta_{ij} - x_i x_j)_{1 \leq i, j \leq n} = I_n - B$, 其中 $B = x^\top x$. 显然 A 已经是实对称阵了.

2) 为求 A 的特征值, 先计算 B 的特征值. 作正交阵 P 使得 $xP = (|x|, 0, \dots, 0)$, 则 $P^\top B P = \text{diag}\{|x|^2, 0, \dots, 0\} \Rightarrow B$ 的特征值为 $|x|^2, 0, \dots, 0 \Rightarrow A$ 的特征值为 $1 - |x|^2, 1, \dots, 1$.

3) 故当 $|x| < 1$ 时该 PDE 是椭圆型的, $|x| > 1$ 时是双曲型的, $|x| = 1$ 时是抛物型的.

总的来说, 在 $\mathbb{R}^n$ 上这是一个混合型方程.



例 1. 判断 PDE $\sum_{i,j=1}^n (\delta_{ij} - x_i x_j) \partial_{ij} u + 2 \sum_{i=1}^n x_i \partial_i u + cu = f$ 的类型.

解. 1) 置 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 则 $A = (\delta_{ij} - x_i x_j)_{1 \leq i, j \leq n} = I_n - B$, 其中 $B = x^\top x$. 显然 A 已经是实对称阵了.

2) 为求 A 的特征值, 先计算 B 的特征值. 作正交阵 P 使得 $xP = (|x|, 0, \dots, 0)$, 则 $P^\top B P = \text{diag}\{|x|^2, 0, \dots, 0\} \Rightarrow B$ 的特征值为 $|x|^2, 0, \dots, 0 \Rightarrow A$ 的特征值为 $1 - |x|^2, 1, \dots, 1$.

3) 故当 $|x| < 1$ 时该 PDE 是椭圆型的, $|x| > 1$ 时是双曲型的, $|x| = 1$ 时是抛物型的.

总的来说, 在 $\mathbb{R}^n$ 上这是一个混合型方程.

□

例 2. 求方程 $x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$ 的通解.

解. 1) 判断类型: $\det \begin{pmatrix} x^2 & -xy \\ -xy & y^2 \end{pmatrix} = 0$, 故此方程在 xOy -平面的四个象限是抛物型的, 在坐标轴上各点都是广义抛物型的 (在原点处不是二阶方程).

2) 特征方程: $x^2 dy^2 + 2xy dx dy + y^2 dx^2 = 0$. 求解 $\Rightarrow (xdy + ydx)^2 = 0 \Rightarrow d(xy) = 0 \Rightarrow xy = C$.

3) 坐标变换: 置 $\xi = xy, \eta = y$, 直接链式法则计算, 方程变为 $\eta u_{\eta\eta} + u_{\eta} = 0$ (注意记号不严格之处!). 令

$v = u_{\eta} \Rightarrow (\eta v)_{\eta} = 0 \Rightarrow \eta v = \phi(\xi) \Rightarrow v = \phi(\xi)/\eta \Rightarrow u = \phi(\xi) \ln |\eta| + \psi(\xi) \Rightarrow$ 通解 $u(x, y) = \phi(xy) \ln |y| + \psi(xy)$,
 $\phi, \psi \in C^2, y \neq 0$. □

思考: 为什么上面通解中会出现 $y \neq 0$ 的限制? 这与 η 的选法有什么联系?

例 3. 将 *Tricomi* 方程 $yu_{xx} + u_{yy} = 0$ 化为标准形.

解. 1) 特征方程是 $ydx^2 + dy^2 = 0$. 故 $y > 0$ 时方程是椭圆型, $y < 0$ 时是双曲型, $y = 0$ 时是广义抛物型.

2) $y < 0$ 时特征方程 $\Rightarrow (dx - \sqrt{-y}dy)(dx + \sqrt{-y}dy) = 0 \Rightarrow$ 特征线 $x \pm \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = C$. 作变换 $\xi = x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}, \eta = x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}$, 计算得到标准形是 $u_{\xi\eta} + \frac{1}{6(\xi-\eta)}(u_{\eta} - u_{\xi}) = 0$. (称为 Euler-Poisson 方程.) 作自变

量的正交变换 $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix}$, 又可化为 $u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} - \frac{1}{3\beta}u_{\beta} = 0$.

3) $y > 0$ 时特征方程 $\Rightarrow (dx - i\sqrt{y}dy)(dx + i\sqrt{y}dy) = 0 \Rightarrow$ 复特征线 $x \pm i\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = C$. 作变换 $\xi = x, \eta = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$, 计算得到标准形是 $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}u_{\eta} = 0$. □

杨光俊: 欧拉-泊松-达布方程. 云南教育出版社, 1989.

例 4. 求定解问题

$$u_{xx} + 2(\cos x)u_{xy} - (\sin x)^2 u_{yy} - (\sin x)u_y = 0,$$

$$u|_{y=\sin x} = \phi(x), \quad u_y|_{y=\sin x} = \psi(x).$$

解. 1) 判断类型: $\det \begin{pmatrix} 1 & \cos x \\ \cos x & -\sin^2 x \end{pmatrix} = -1 < 0$, 故此方程是双曲型的.

2) 特征方程是 $dy^2 - 2\cos x dx dy - \sin^2 x dx^2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x \pm 1 \Rightarrow$ 特征线为 $y - \sin x \pm x = C$.

3) 以特征线为坐标曲线: $\xi = \sin x + x - y, \eta = \sin x - x - y$, 直接计算得到标准形 $4u_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$.

4) 曲线 $y = \sin x \Leftrightarrow \eta = -\xi \Rightarrow$ 初值条件变为 $\eta = -\xi$ 上 $f(\xi) + g(-\xi) = \phi(x) = \phi(\xi)$ ($\diamond$) (注意 $x = (\xi - \eta)/2$); 而 $u_y = -u_\xi - u_\eta = \psi(\frac{\xi-\eta}{2}) = \psi(\xi) \xrightarrow{u(\xi,\eta)=f(\xi)+g(\eta)} f'(\xi) + g'(-\xi) = -\psi(\xi)$, 对 ($\diamond$) 求导得到

$f'(\xi) - g'(-\xi) = \phi'(\xi)$, 联立解得 $f'(\xi) = \frac{1}{2}[\phi'(\xi) - \psi(\xi)], g'(\xi) = -\frac{1}{2}[\psi(-\xi) + \phi'(-\xi)] \Rightarrow f(\xi) = \frac{1}{2}\phi(\xi) - \frac{1}{2}\int_0^\xi \psi(s) ds + C_1, g(\xi) = -\frac{1}{2}\int_{-\xi}^0 \psi(s) ds + \frac{1}{2}\phi(-\xi) + C_2, (f(\xi) + g(-\xi) = \phi(\xi) \Rightarrow C_1 + C_2 = 0)$. 于是 $u(\xi, \eta) = \frac{1}{2}[\phi(\xi) + \phi(-\eta)] + \frac{1}{2}\int_\xi^{-\eta} \psi(s) ds$.

5) 回到 (x, y) -坐标, 得到解 $u(x, y) = \frac{1}{2}[\phi(\sin x + x - y) + \phi(x + y - \sin x)] + \frac{1}{2}\int_{x+\sin x-y}^{x+y-\sin x} \psi(s) ds$. □

习题 1. 设 $\alpha \in \mathbb{R}$, 判定方程 $u_{xx} - 2\alpha u_{xy} - 3\alpha^2 u_{yy} - u_y + \alpha u_x = f(x, y)$ 的类型.

[答案: $\alpha = 0$ 时抛物型; $\alpha \neq 0$ 时双曲型.]

习题 2. (本题中使用 Einstein 求和约定: 重复的上下指标从 1 到 m 求和.) 给定 m 维微分流形 M 上的度量 $g = (g_{ij})$, 记 $|g| = \det(g)$, $(g^{ij}) = (g^{-1})_{ij}$. 对光滑函数 $u : M \rightarrow \mathbb{R}$, 定义梯度算子 $\nabla u = g^{ij} \partial_i u \partial_j$, 对光滑向量场 $X = X^i \partial_i$, 定义其散度 $\nabla \cdot X = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} X^i)$. 定义 Laplace-Beltrami 算子 $\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j u)$.

(1) 若 g 是黎曼度量 (处处正定的对称实矩阵), 证明上述 Δ 是椭圆型偏微分算子;

(2) 若 g 是 Miknowskii 度量 (处处是秩为 m , 符号差是 $m - 2$ 的对称实矩阵), 证明上述 Δ 是双曲型偏微分算子.

习题 3. 试定义一阶线性方程的弱间断解及其弱间断面的概念, 并给出其弱间断面的刻画.

补充: 方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, 它对 $a = 0$ 的情形也有效. 特别的, $a = 0$ 时, 如果 $b > 0$, 取 $-$ 号; $b < 0$ 时取 $+$ 号, 所得解是奇异摄动问题的真正的解.

阅读任务和作业

- 必读 — 郇中丹, 黄海洋: 偏微分方程 (第二版), 高等教育出版社, 2013. [pp. 58–70]
- 作业: P. 62: 1(i); P. 66: 1, 2; P. 71: 1(i, iii, v); 2, 3.

最后更新: 2022-10-12

偏微分方程

第五讲 连续介质与波动方程

袁海荣 (华东师范大学 数学科学学院)

2022 年 9 月 26 日

在数学的所有学科中, 微分方程理论是最重要的. 物理学的所有分支提出问题, 它们可以被归结为微分方程的积分. 更一般地, 所有依赖于时间的自然现象都由微分方程理论所给出.

—1842 年 12 月 17 日—1899 年 2 月 18 日



传记: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lie/>

学习要点

- 了解波动方程的物理背景 (弹性力学、电动力学、流体力学)
- 了解建立 PDE 模型的基本思路
- 体会数学如何用函数、向量、矩阵等概念以及微分、积分等运算, 刻画物理对象及物理规律
- 复习、熟练掌握多元微积分的概念、公式、计算
- 理解弦振动方程和三类边界条件的物理意义, 熟练掌握常见定解问题的写法
- 理解能量积分和齐次化原理的物理依据, 初步掌握这两种方法

弦振动方程的推导 (一): 微元法

- 实际问题: 研究弦的横振动 (乐器: 提琴、吉他、二胡等弦乐 $\Rightarrow$ 声乐理论)
- 对物理对象及描述它的数学量的假设 (合理性依赖数学理论是否逻辑自洽、所得结论与实践是否相符来判定)
 - (i) 弦 — 柔软的均匀的细线
 - 细线: 弦的截面直径与其长度相比很小, 可以看成数学上的线;
 - 柔软: 弦不抵抗使其弯曲的形变, 但伸长时产生抵抗伸长的张力 T . 弦上某点的张力沿着在该点弦的切向拉伸位于另一侧的弦;
 - 均匀: 弦的截面形状不随其长度位置而改变, 线密度 $\rho(x, t)$ (单位长度弦的质量) 和绷紧后的张力 $T(x, t)$ 处处是常数.
 - ii) 横振动 — 平衡位置附近的微小的横向运动
 - 平衡位置: 把弦绷紧, 将其静止时的位置看作区间 $[0, l]$; 此时弦上各点的张力大小记为 T_0 , 质量线密度为常数 ρ_0 ;
 - 横振动: 取定欧氏平面 $\{(x, y)\}$, 平衡时位于 x 点的弦上的质点只沿垂直于 x -轴的方向在 xy -平面内往复运动. 记 t 时刻它的位移为 $u(x, t)$, 即在 t 时刻, 平衡时位于 x 的质点的坐标是 $(x, u(x, t))$. 函数 $y = u(x, t)$ 是描述弦运动状态的关键量. 弦运动的速度 $-u_t(x, t)$, 以下均假设 $u \in C^2$;
 - 平衡位置附近的微小的横向运动: 指弦的绝对位移 $|u(x, t)|$ (和自己的平衡位置比) 和相对位移 $|u_x(x, t)|$ (和相邻质点比) 都是小量.
- 外力 (比如重力) $-f(x, t)$: x 处质量微元 $\rho(x, t) dx$ 受到的与 x -轴垂直的外力为 $\rho(x, t)f(x, t) dx$ (注意: $f(x, t)$ 带有加速度的量纲, 此外假设与 x -轴平行方向无外力)
- 端点条件: 假设弦的两端点固定 (Dirichlet 条件) — $u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, \forall t \geq 0$.
- 物理定律 (物理量之间的关系): 质量守恒 + 牛顿第二定律 + 力的独立作用原理 (线性叠加原理)

● 物理定律 (物理量之间的关系):

- i) 质量守恒 (弦的任意微元的质量在运动过程中不改变)
- ii) 牛顿第二定律 ($F = m \frac{dv}{dt}$ 导数 — 微观形式) 或 冲量定律 (力 $\times$ 力作用的时间 = 力产生的冲量, 质点的动量 = 速度 $\times$ 质量; 冲量 = 系统动量的改变量, 积分 — 宏观形式 $\int F dt = \int d(mv)$)
- iii) 力的独立作用原理 (力合成的平行四边形法则 — 线性空间)
- 微元及其受力分析: 取 $[a, b] \subset [0, l]$, 考虑平衡时位于 $[a, b]$ 区间的这段弦的运动. 受力: 两端点的张力和与 x -轴垂直方向的外力. 沿平行于 x -轴的方向无运动, 故 x -轴方向所受合力为零; 与 x -轴垂直方向 (即 y -方向) 受力导致弦的横向运动, 有加速度

● 运动中弦的张力和线密度的变化: t 时刻弦由函数 $y = u(x, t)$ 的图像给出 $\Rightarrow [a, b]$ 段长度变为

$\int_a^b \sqrt{1 + u_x(x, t)^2} dx$. 用等价无穷小 $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$ ($x \rightarrow 0$) 可知 $\int_a^b \sqrt{1 + u_x(x, t)^2} dx - (b - a) = O(u_x^2)$. 在忽略两阶小量 u_x^2 意义下弦的长度

没有改变, 从而可认为弦的张力大小在运动中没有改变.

由质量守恒, $\int_a^b \rho(x, t) \sqrt{1 + u_x(x, t)^2} dx = \rho_0(b - a)$. 由 a, b 的任意性 + 积分中值定理 + 被积函数连续性假设

$\Rightarrow \boxed{\rho_0 = \rho(x, t) \sqrt{1 + u_x(x, t)^2}}$. 用等价无穷小 $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$ ($x \rightarrow 0$) 可知 $\rho_0 = \rho(x, t) \sqrt{1 + u_x(x, t)^2} \sim \rho(x, t)(1 + \frac{1}{2}u_x^2) \sim \rho(x, t)$

(即忽略两阶小量 u_x^2 意义下弦的线密度没有改变). 目的: 解释了在模掉二阶及以上小量后的等价类意义下, 前述关于弦的假设的逻辑自洽性.

关键: 类比微分的概念, 抓主要矛盾 — 弦振动的主导量是一阶小量 (如 u 及其导数)

- x -方向受力 (请画图): 设张力的强度值是 $T(x, t)$, 方向沿曲线 $y = u(x, t)$ 的切向指向 (a, b) 段弦外侧. 设 $\alpha(x, t)$ 为 $y = u(x, t)$ 的切向与 x -轴正向的夹角, 则 $\tan \alpha(x, t) = u_x(x, t)$, 而张力的 x -方向分量为

$$T(x, t) \cos \alpha(x, t) = \frac{T(x, t)}{\sqrt{1+u_x(x, t)^2}}. \quad x\text{-方向受力为零} \Rightarrow \frac{T(a, t)}{\sqrt{1+u_x(a, t)^2}} = \frac{T(b, t)}{\sqrt{1+u_x(b, t)^2}} \doteq \tilde{T}(t) \quad (\diamond) \quad \text{再利用等价无穷小}$$

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \ (x \rightarrow 0)$, 忽略二阶小量 u_x^2 , 得到 $T(a, t) = T(b, t)$, 也印证了可近似认为弦即使在振动过程中, 其张力大小也是常数 (但可能与时间有关)+

弦长和平衡时基本未变 $\Rightarrow$ 仍可近似认为 $\tilde{T}(t) \equiv T_0$

- y -方向受力: 张力的 y -方向分量和为 $T(b, t) \sin \alpha(b, t) - T(a, t) \sin \alpha(a, t)$ (减号与区间 (a, b) 定向有关, a 是左侧, 张力拉伸弦段 (a, b) , 故也指向左侧, 取负号; 注意 $\sin \alpha(x, t) = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}$); 外力为 $\int_a^b f(x, t) \rho(x, t) \sqrt{1+u_x(x, t)^2} dx = \int_a^b f(x, t) \rho_0 dx$, 故弦段 (a, b) 所受合力为为 $T(b, t) \frac{u_x(b, t)}{\sqrt{1+u_x(b, t)^2}} - T(a, t) \frac{u_x(a, t)}{\sqrt{1+u_x(a, t)^2}} + \int_a^b f(x, t) \rho_0 dx \xrightarrow{(\diamond)} \tilde{T}(t)(u_x(b, t) - u_x(a, t)) + \int_a^b f(x, t) \rho_0 dx$
- τ 时刻弦段 (a, b) 的动量: $\int_a^b \rho(x, \tau) u_t(x, \tau) \sqrt{1+u_x(x, \tau)^2} dx = \int_a^b \rho_0 u_t(x, \tau) dx$

- 冲量定律: $\int_a^b \rho_0 u_t(x, t) dx - \int_a^b \rho_0 u_t(x, s) dx = \int_s^t \left\{ \tilde{T}(\tau)(u_x(b, \tau) - u_x(a, \tau)) + \int_a^b f(x, \tau) \rho_0 dx \right\} d\tau$

$$\xrightarrow{\text{微积分基本定理}} \int_a^b \int_s^t \rho_0 u_{tt}(x, \tau) d\tau dx = \int_s^t \int_a^b [\tilde{T}(\tau) u_{xx}(x, \tau) + f(x, \tau) \rho_0] dx d\tau \xrightarrow[\text{累次积分换序}]{\text{被积函数连续}}$$

$$\int_s^t \int_a^b [-\rho_0 u_{tt}(x, \tau) + \tilde{T}(\tau) u_{xx}(x, \tau) + f(x, \tau) \rho_0] dx d\tau = 0 \xrightarrow[\text{积分中值定理}]{0 \leq s < t, 0 \leq a < b \leq l \text{任意性}} u_{tt}(x, t) = \frac{\tilde{T}(t)}{\rho_0} u_{xx}(x, t) + f(x, t) \Rightarrow$$

弦振动方程: $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad a^2 \doteq T_0 / \rho_0$

能量积分

将 PDE 乘以解或其导数的函数, 写为散度形式, 找到一些正定量满足的 ODE, 运用泛函分析理论

- 典型定解问题 — 两端固定弦的振动:

$$x \in [0, l], t \geq 0; \quad u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t); \quad u(0, t) = u(l, t) = 0, u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x)$$

- 功 = 力 · 位移; 功率 = 力 · 速度 (向量内积)

- 弦振动过程中外力 $f(x, t)$ 在时刻 t 对位于 x 处单位质量弦的功率

$$= f(x, t) u_t(x, t) = u_t u_{tt} - a^2 u_t u_{xx} = \frac{1}{2} (u_t^2)_t - a^2 [(u_t u_x)_x - \frac{1}{2} (u_x^2)_t] = \frac{1}{2} [u_t^2 + a^2 u_x^2]_t - (a^2 u_t u_x)_x \Rightarrow f \equiv 0 \text{ 时成立 (局部)}$$

$$\text{能量守恒定律 (熵 - 熵流对方程)} \quad \left[\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{a^2}{2} u_x^2 \right]_t - (a^2 u_t u_x)_x = 0$$

- 弦振动过程中外力 $f(x, t)$ 在时刻 t 对整个弦所作的功率

$$= \int_0^l f(x, t) \rho_0 u_t(x, t) dx = \int_0^l \left[\frac{\rho_0}{2} (u_t^2 + a^2 u_x^2)_t - \rho_0 a^2 (u_t u_x)_x \right] dx \xrightarrow[\text{含参变量积分求导}]{\text{微积分基本公式}} =$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^l \frac{\rho_0}{2} (u_t^2 + a^2 u_x^2) dx - \rho_0 a^2 u_t u_x \Big|_{x=0}^{x=l} \xrightarrow[\text{边界条件} \Rightarrow u_t|_{x=0, l} \equiv 0]{\text{机械能} = \text{动能} + \text{势能}: E(t) \doteq \int_0^l \left(\frac{\rho_0}{2} u_t^2 + \frac{T_0}{2} u_x^2 \right) dx} E'(t) = \int_0^l f(x, t) \rho_0 u_t(x, t) dx$$

- 经典解的唯一性: 利用叠加原理, $f \equiv 0, \phi \equiv 0, \psi \equiv 0 \Rightarrow E'(t) \equiv 0, E(0) = 0 \Rightarrow (u = \text{常数}) + \text{边界条件} \Rightarrow u \equiv 0$

(注意: 只需 $Du(\cdot, t), u_t(\cdot, t) \in L^2((0, l))$ 即有意义, 可引入 Sobolev 空间 $H_0^1([0, l])$ 和弱解概念)

齐次化原理

将非齐次线性发展型方程初(边)值问题转化为无限个齐次方程的初(边)值问题

- 待解问题 (I) — 两端固定弦的受迫振动:

$$x \in [0, l], t \geq 0; u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t); u(0, t) = u(l, t) = 0, u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0$$

- 假设已解决的问题 (II) — 两端固定弦的自由振动:

$$x \in [0, l], t \geq 0; u_{tt} = a^2 u_{xx}; u(0, t) = u(l, t) = 0, u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x)$$

- 如何将 (I) 转化为 (II) 而予以解决? 将物理过程分解为两步:

- 第一步: 在 $\tau \geq 0$ 时刻, $d\tau$ 时间段内, 外力 $f(x, \tau)$ 作用于弦, 使得弦具有速度 $f(x, \tau)d\tau$

- 第二步: 对固定的 $t > 0$, 设 $\tau < t$ 时, 弦在上述 τ 时刻的速度 $f(x, \tau)d\tau$ 按弦的自由振动机制, 导致在 t 时刻弦的位移的改变, 该改变量记为

$\Delta u(x, t; \tau) = w(x, t; \tau) d\tau$, 其中 $w(x, t; \tau)$ 是如下问题的解 ($t \geq \tau$, 而 τ 被看作参数):

(II) 型问题: $x \in [0, l], t \geq \tau; w_{tt}(x, t; \tau) = a^2 w_{xx}(x, t; \tau); w(0, t; \tau) = w(l, t; \tau) = 0, w(x, \tau; \tau) = 0, w_t(x, \tau; \tau) = f(x, \tau)$. (注意成

立 $x \in [0, l], t \geq \tau; (\Delta u)_{tt}(x, t; \tau) = a^2 (\Delta u)_{xx}(x, t; \tau); \Delta u(0, t; \tau) = \Delta u(l, t; \tau) = 0, \Delta u(x, \tau; \tau) = 0, (\Delta u)_t(x, \tau; \tau) = f(x, \tau) d\tau$.)

- 假设上述过程产生的效应可以直接累加 (独立作用原理, 或线性叠加原理) (I) 的解为 $u(x, t) = \int_0^t \Delta u(x, t; \tau) = \int_0^t w(x, t; \tau) d\tau$

- 数学验证: $u(x, t) = \int_0^t w(x, t; \tau) d\tau$ 是 (I) 的解 (用含参变量积分的求导公式) [体会物理与数学的关系!]

边界条件

- Dirichlet 条件 — 给定 $u|_{\partial\Omega}$: 弦的端点被固定 (例如 $u(0, t) = 0$) 或按已知约束运动 $u(l, t) = r(t)$
- Neumann 条件 — 给定 $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega}$ (ν 为 $\partial\Omega$ 外单位法向): 例如, 弦的右端点在 y -方向受到外力 $g(t)$ 而沿 y -方向自由滑动 (注意弦的端点作为一个点没有质量, 从而在 y -方向力要平衡)
$$\Rightarrow g(t) = T(l, t) \sin \alpha(l, t) = T(l, t) \frac{u_x(l, t)}{\sqrt{1+u_x(l, t)^2}} = \tilde{T}(t) u_x(l, t) \Rightarrow u_x(l, t) = g(t)/T_0 \quad (\clubsuit)$$
- Robin 条件 — 给定 $(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u)|_{\partial\Omega}$: 例如, 弦的右端点在 y -方向受到的外力 $g(t)$ 来自于满足 Hook 定律的弹簧:
$$g(t) = -\sigma(u - u_0) \xrightarrow[\clubsuit]{\text{代入}} u_x(l, t) + \frac{\sigma}{T_0} u = \frac{\sigma}{T_0} u_0 \quad (\sigma > 0, u_0 \text{ 是弹簧的平衡位置})$$
- $u_x + \sigma u_t = r(t)$: 例如 ($\clubsuit$) 中外力 $g(t)$ 是与速度成正比, 方向相反的摩擦力: $g(t) = -ku_t$, 就得到 $u_x + \frac{k}{T_0} u_t = 0$
- 一般情形: $u_x + \sigma u_t + hu = r(t)$
- 内部衔接条件: 不同材质的弦在一点 $x = a \in (0, l)$ 拼接 — $u(a-, t) = u(a+, t)$ (位移相同); $u_x(a-, t) = u_x(a+, t)$ (形变相同) (注意: 与纵振动不同, 这里在连接点没有切向内应力, 要保证 a 点两侧张力在同一条线上才能平衡)
- 初始条件: $u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x)$ (初始位移和速度都必须给定, 两个初始条件)
- Cauchy 问题: 区域为 $-\infty < x < +\infty, t > 0$, 只有初始条件
- 初边值问题: 既有初始条件, 也有边界条件

弦振动方程的推导 (二): 离散化 $\Rightarrow$ 连续化 (ODE $\Rightarrow$ PDE)

- 假设在平衡位置弦长为 L , 位于区间 $[0, L]$, 线密度为常值 ρ_0 , 张力大小为常值 T_0 . 将弦均分为 N 段, 每段长 $h \doteq L/N$. 记 $x_n \doteq nh, y_n(t) \doteq u(x_n, t)$, $n = 0, 1, \dots, N$. 假设 $y_n(t), (y_{n+1}(t) - y_n(t))/h$ 都是小量
- 设每段弦的质量 $\rho_0 h$ 集中在一个位于 x_n 的质点上, 该质点在 xy -平面内垂直于 x 轴作往复运动 $y_n(t) \Rightarrow$ 加速度为 $y_n''(t)$. 质点 x_n 与相邻的质点通过无质量的弹簧连接, 从而有相互作用力: 沿 y 方向, 右侧质点 x_{n+1} 给 x_n 的力为 $\frac{T_0}{h}(y_{n+1}(t) - y_n(t))$; 左侧质点 x_{n-1} 给 x_n 的力为 $\frac{T_0}{h}(y_{n-1}(t) - y_n(t))$. 所以质点 x_n 受到的合力为两者之和:

$$\frac{T_0}{h}(y_{n+1}(t) + y_{n-1}(t) - 2y_n(t))$$
- 由 Newton 第二定律, $\rho_0 h y_n''(t) = \frac{T_0}{h}(y_{n+1}(t) + y_{n-1}(t) - 2y_n(t)) \Rightarrow y_n''(t) = \frac{T_0}{\rho_0} \left(\frac{y_{n+1}(t) + y_{n-1}(t) - 2y_n(t)}{h^2} \right)$
- ODE 的 Cauchy 问题: $N \in \mathbb{N}$, $y_0(t) \equiv 0, y_N(t) \equiv 0, y_n(0) = a_n, y_n'(0) = b_n, n = 1, \dots, N-1$. (空间二阶导数中心差分后的半离散化问题)
- $h \rightarrow 0$, 置 $a \doteq \sqrt{T_0/\rho_0}$, 设函数 $u(x, t) \in C^2$, 得到 u 满足波动方程 $u_{tt} = a^2 u_{xx}$
- 思考题: 严格证明 ODE 初值问题解的存在性, 并证明 $N \rightarrow \infty$ (即 $h \rightarrow 0$) 时所得解 $\{y_n^N\}$ (可采用分段折线连接得到连续函数作为 PDE 近似解) 确实收敛到波动方程初边值问题的解? 参考文献 Denis Nikitin, Carlos Canudas-de-Wit and Paolo

膜振动方程 (二维波动方程) 的推导

- 基本假设: 均匀柔软薄膜的微小横振动 [推导 PDE, 与边界条件无关]
 - 膜 — 曲面; 平衡位置 — $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (带直角坐标 (x, y)); 均匀 — 质量面密度 (单位面积膜具有的质量) 是常数 ρ_0 ; 横振动 — 平衡时位于 (x, y) 的膜上的质点在 t 时刻位于 $\mathbb{R}^3$ 中坐标是 $(x, y, z = u(x, y, t))$ 的点 (即膜在 t 时刻的曲面由函数 $z = u(x, y, t)$ 的图像确定).
 $\rho(x, y, t)$ — t 时刻曲面在 $(x, y, u(x, y, t))$ 点的质量 (面) 密度函数
 - 微小 — 假设 $u \in C^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$, 且 $|u|, |u_t|, |Du| = |(u_x, u_y)| \ll 1$
 - 柔软 — 膜对弯曲变形不产生抵抗力, 但对伸长 (使面积增大) 有抵抗力 (张力)

- 张力的刻画 (难点, 配图说明)

- 张力的方向: 在 t 时刻, 对膜上任一 C^1 曲线 $S: x = x(s), y = y(s), z = u(x(s), y(s), t)$ ($s \in [0, s_0]$ 是弧长参数), 在曲线 S 上对应水平坐标为 (x, y) 的点, 设该曲线的单位切向是 $\mathbf{t}(x, y, t)$ (它也是曲面的一个切向量), 曲面的单位法向为 $\mathbf{n}(x, y, t)$, 则 $\mathbb{R}^3$ 中向量外积 $\mathbf{t}(x, y, t) \times \mathbf{n}(x, y, t)$ 是曲面的另一个切向量 (也是曲线 S 在曲面上的法向). 张力的方向沿此切向, 拉伸位于曲线 S 另一侧的膜曲面
- 张力的大小 — 张力 (线) 密度函数 $T(x, y, t)$ (类比压强的概念): 曲线 S 位于 $\mathbf{t} \times \mathbf{n}$ 一侧的膜对另一侧膜的拉伸力 (张力) 是

$$\int_0^{s_0} T(x(s), y(s), t) \mathbf{t}(x(s), y(s), t) \times \mathbf{n}(x(s), y(s), t) \, ds = \int_S T \mathbf{t} \times \mathbf{n} \, ds \quad (\text{第一型曲线积分})$$

- 假设平衡时薄膜张力密度函数是常数 T_0 ; 运动之后其张力密度函数仍用 T_0 近似

- 微元法: 任取 $\Sigma \subset \Omega, \partial\Sigma = \{x = x(s), y = y(s) : s \in [0, s_0]\} \in C^1$. 记 $\Sigma_t = \{(x, y, u(x, y, t)) : (x, y) \in \Sigma\}$, 则 $\partial\Sigma_t = \{(x(s), y(s), u(x(s), y(s), t)) : s \in [0, s_0]\}$. Σ_t 上指向 $\mathbf{e}_z$ 方向的单位法向 $\mathbf{n} = (-u_x, -u_y, 1)/\sqrt{1 + |\mathbf{D}u|^2}$
- 物理定律: i) 质量守恒 (复习曲面 Σ_t 的面积元 $d\sigma = \sqrt{1 + |\mathbf{D}u|^2} dx dy \Rightarrow \rho_0 = \sqrt{1 + |\mathbf{D}u|^2} \rho(x, y, t)$ ii) Newton 第二定律 (冲量定律)

- 设单位质量的膜仅受到沿 z 方向的外力 $f(x, y, t)$ — 通过 Σ_t 受到的 z -方向外力为 (第一型曲面积分)

$$\int_{\Sigma_t} f(x, y, t) \rho(x, y, t) d\sigma = \int_{\Sigma} \rho_0 f(x, y, t) dx dy \text{ 来定义}$$

- 时间段 $[c, d]$ 内 z -方向外力产生的冲量: $\int_c^d \int_{\Sigma} \rho_0 f(x, y, t) dx dy dt$
- 时间段 $[c, d]$ 内膜的 z -方向动量的改变量: (动量定义, 质量守恒, 微积分基本定理, 积分换序)

$$\int_{\Sigma_t} u_t(x, y, d) \rho(x, y, d) d\sigma - \int_{\Sigma_t} u_t(x, y, c) \rho(x, y, c) d\sigma = \int_{\Sigma} (u_t(x, y, d) - u_t(x, y, c)) \rho_0 dx dy$$

$$= \int_{\Sigma} \int_c^d u_{tt}(x, y, t) \rho_0 dt dx dy = \int_c^d \int_{\Sigma} u_{tt}(x, y, t) \rho_0 dx dy dt$$

$$\text{Stokes 公式 } \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

- Σ_t 外侧的膜对它的沿 z -方向的张力 $\int_{\partial\Sigma_t} T \mathbf{t} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z ds$. 注: 要求 $\mathbf{t}$ (即 $\partial\Sigma_t$ 的定向) 与 $\mathbf{n}$ 满足右手法则. 只考虑 z -方向受力及运动.

$$\int_{\partial\Sigma_t} T \mathbf{t} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z ds \xrightarrow[(a \times b) \cdot c = a \cdot (b \times c)]{\text{向量运算公式}} = \int_{\partial\Sigma_t} T (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{t} ds \xrightarrow[\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega]{\text{第一型曲线积分, Stokes 公式}} = \int_{\Sigma_t} \text{curl}(T \mathbf{n} \times \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

- Stokes 公式 (1854 年): 设 S 是可定向 (双侧) C^1 曲面, 边界 ∂S 逐段 C^1 , P, Q, R 是 $S \cup \partial S$ 上 C^1 向量场, 则 $\oint_{\partial S} P dx + Q dy + R dz = \iint_S (R_y - Q_z) dy dz + (P_z - R_x) dz dx + (Q_x - P_y) dx dy$, 又 $\mathbf{n} d\sigma = (dy dz, dz dx, dx dy)$ (在坐标平面的投影面积元)

- Σ_t 外侧的膜对它的沿 z -方向的张力:

$$\int_{\partial\Sigma_t} T \mathbf{t} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z \, ds = \int_{\Sigma_t} \operatorname{curl}(T \mathbf{n} \times \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathbf{n} \times \mathbf{e}_z &= \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -u_x & -u_y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{(-u_y, u_x, 0)}{\sqrt{1+|Du|^2}}, \quad \operatorname{curl}(T \mathbf{n} \times \mathbf{e}_z) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial_x}{\sqrt{1+|Du|^2}} & \frac{\partial_y}{\sqrt{1+|Du|^2}} & \frac{\partial_z}{\sqrt{1+|Du|^2}} \\ -\frac{T u_y}{\sqrt{1+|Du|^2}} & \frac{T u_x}{\sqrt{1+|Du|^2}} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \underbrace{\left(-\partial_z \left(\frac{T u_x}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right), -\partial_z \left(\frac{T u_y}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right), \partial_x \left(\frac{T u_x}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) + \partial_y \left(\frac{T u_y}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) \right)}_{=0, \text{因为这里的函数均不依赖于变量 } z} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \operatorname{curl}(T \mathbf{n} \times \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = (0, 0, \partial_x \left(\frac{T u_x}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) + \partial_y \left(\frac{T u_y}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right)) \cdot (-u_x, -u_y, 1) (dx dy) = [\partial_x \left(\frac{T u_x}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) + \partial_y \left(\frac{T u_y}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right)] dx dy$$

- 时间段 $[c, d]$ 内 Σ_t 外侧的膜对它的沿 z -方向的张力产生的冲量:

$$\int_c^d \int_{\partial\Sigma_t} T \mathbf{t} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z \, ds \, dt = \int_c^d \int_{\Sigma} \left[\partial_x \left(\frac{T u_x}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) + \partial_y \left(\frac{T u_y}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) \right] dx dy \, dt$$

- 冲量定律 $\Rightarrow \int_c^d \int_{\Sigma} u_{tt}(x, y, t) \rho_0 \, dx dy dt =$

$$\int_c^d \int_{\Sigma} \left[\partial_x \left(\frac{T u_x}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) + \partial_y \left(\frac{T u_y}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) \right] dx dy \, dt + \int_c^d \int_{\Sigma} \rho_0 f(x, y, t) \, dx dy \, dt \xrightarrow[\substack{\text{积分中值定理} \\ c, d, \Sigma \text{ 的任意性} + \text{被积函数连续的假设}}]{}$$

$$\rho_0 u_{tt} = \left[\partial_x \left(\frac{T u_x}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) + \partial_y \left(\frac{T u_y}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) \right] + \rho_0 f(x, y, t) \xrightarrow[\substack{a^2 \doteq \frac{T_0}{\rho_0} \\ \frac{T}{\sqrt{1+|Du|^2}} - T_0 \text{ 是二阶小量}}]{}$$

二维波动方程 $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t)$

- 边界条件: 类似弦振动情形讨论

双曲平均曲率方程 = 非线性膜的自由振动

回顾对膜振动方程的推导, 其中得到 $\rho_0 u_{tt} = \left[\partial_x \left(\frac{T u_x}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) + \partial_y \left(\frac{T u_y}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) \right] :$

- 定理 ($\mathbb{R}^3$ 中曲面的微分几何): 函数 $z = f(x, y)$ 图像的平均曲率是 $H(f) = \frac{1}{2} \operatorname{div} \left(\frac{Df}{\sqrt{1+|Df|^2}} \right)$, 高斯曲率是

$$K(f) = \frac{\det(D^2 f)}{(1+|Df|^2)^2}.$$

参考 (n 维情形): David Gilbarg, Neil S. Trudinger: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer, 2001. (pp. 356-357) 中译本: 二阶椭圆型偏微分方程, 第二版修订版, 高等教育出版社, 2016. (334-335 页)

- 蓝色方程中取 $T = T_0 \Rightarrow$ 膜自由振动方程 $u_{tt} = 2a^2 H(u)$ (双曲平均曲率方程), 其中 $a^2 = \frac{T_0}{\rho_0} : u = u(x, y, t)$ 满足二阶拟线性双曲型方程

$$\frac{1}{a^2} u_{tt} = \partial_x \left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \right) + \partial_y \left(\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \right)$$

弹性介质中的振动方程 (三维波动方程)

- 假设: 均匀、各向同性的线性弹性体作微小振动 (关键概念: 应变、应力、本构关系)
- 位移梯度张量 Du : 设平衡时弹性体位于 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (参考构形). 在外力作用下, 原本处于 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 的质点运动到 $x + u(x, t)$ 点. 假设 $u(x, t) \in C^2$ 且 $|u|, |u_t|, |Du| \ll 1$. 由 Taylor 展开, 质点 x 和 $x + h$ 的相对位移为 $x + h + u(x + h, t) - (x + u(x, t)) = h + Du(x, t)h + O(|h|^2)$, 主部为 $h + Du(x, t)h = F(x, t)h$

定理 (矩阵的极分解)

设方阵 F 非奇异, 则存在正交阵 O 以及对称正定阵 U 和 V 使得 $F = OU = VO$.

证明: 注意 FF^T 是正定的实对称阵, 将之用正交阵 R 合同对角化, 设 $FF^T = R\Lambda^2 R^T$ (Λ 是对角阵), 则 $(F^{-1}R\Lambda)(\Lambda R^T(F^{-1})^T) = I$ (单位阵) $\Rightarrow Q \doteq F^{-1}R\Lambda$ 是正交阵 $\Rightarrow F = R\Lambda Q^T \Rightarrow F = \underbrace{(RQ^T)}_{\text{正交}} \underbrace{(Q\Lambda Q^T)}_{\text{对称正定}}$, 以及 $F = (R\Lambda R^T)(RQ^T)$. □

- 右 Cauchy-Green 应变张量 C : 对 $F = I + Du$, $C \doteq F^T F = U^T (O^T O U) = U^2 = I + Du + Du^T + (Du)^T Du$. U 是弹性体相对参考构形的真正的形变 (拉伸或压缩). (正交阵代表的是弹性体局部的旋转, 不是形变)

幂级数展开 $\Rightarrow U = (I + Du + Du^T + (Du)^T Du)^{\frac{1}{2}} = I + \frac{1}{2}(Du(x, t) + Du(x, t)^T) + O(|Du|^2)$, 忽略高阶项, 定义

- Cauchy 应变张量 $E(x, t) \doteq \frac{1}{2}(Du(x, t) + Du(x, t)^T)$

- 应力 $\tau(\nu)(x, t)$: 在 t 时刻, 作用在位于 x 处的一个单位法向为 ν 的面积微元 dS 上的弹性力为 $\tau(\nu)(x, t)dS$ (这是一个向量, 未必与 ν 平行!)
- **Cauchy 应力定理**: 存在 3 阶实对称矩阵 $\sigma(x, t)$ (应力张量) 使得 $\tau(\nu)(x, t) = \sigma(x, t)\nu$ (此处 ν 是列向量).
 σ 的三列分别代表沿 x_1, x_2, x_3 三个基底方向的应力, Cauchy 应力定理的本质是力的独立作用原理及合成
- 线性弹性体的本构关系 (广义 Hooke 定律): $\sigma(x, t) = 2\mu E(x, t) + \lambda(\operatorname{div} u)I_3$ (λ, μ — Lamé 常数 (bulk viscosity; shear viscosity), I_3 — 三阶单位阵)
- 弹性体的质量密度: 假设是常数 ρ_0 ; 单位质量弹性体所受外力: $f(x, t)$ (列向量)
- 微元法: 考虑以 x 和 $x + \Delta x$ 为对顶点的长方体. 注意 $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$
- 牛顿第二定律 (注意 u 和 f 都是列向量值函数):

t 时刻微元的质量 $\times$ 加速度 $= \rho_0 \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \times u_{tt}(x, t) = t$ 时刻微元受到的应力 + 外力 $\rho_0 \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 f(x, t)$

- 作用在 x_1 方向两个侧面的应力之和 = 右侧表面受到的力 + 左侧表面受到的力

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x + \Delta x_1 \mathbf{e}_1) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21}(x + \Delta x_1 \mathbf{e}_1) & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31}(x + \Delta x_1 \mathbf{e}_1) & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_2 \Delta x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21}(x) & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31}(x) & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Delta x_2 \Delta x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \sigma_{11}(x) \\ \partial_1 \sigma_{21}(x) \\ \partial_1 \sigma_{31}(x) \end{pmatrix} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$$

- 类似可得作用在 x_2 方向两个侧面的应力之和 $\begin{pmatrix} \partial_2 \sigma_{12}(x) \\ \partial_2 \sigma_{22}(x) \\ \partial_2 \sigma_{32}(x) \end{pmatrix} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$; 在 x_3 方向两个侧面的应力之和 $\begin{pmatrix} \partial_3 \sigma_{13}(x) \\ \partial_3 \sigma_{23}(x) \\ \partial_3 \sigma_{33}(x) \end{pmatrix} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$

- t 时刻微元受到的所有应力之和为 $\begin{pmatrix} \partial_1 \sigma_{11}(x) + \partial_2 \sigma_{12}(x) + \partial_3 \sigma_{13}(x) \\ \partial_1 \sigma_{21}(x) + \partial_2 \sigma_{22}(x) + \partial_3 \sigma_{23}(x) \\ \partial_1 \sigma_{31}(x) + \partial_2 \sigma_{32}(x) + \partial_3 \sigma_{33}(x) \end{pmatrix} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \doteq \operatorname{div} \sigma \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ (散度

算子是作用于行向量的)

$$\rho_0 \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \times u_{tt}(x, t) = t \text{ 时刻微元受到的应力} + \rho_0 \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 f(x, t) \Rightarrow \rho_0 u_{tt}(x, t) = \operatorname{div} \sigma(x, t) + \rho_0 f(x, t)$$

- 线性弹性体的本构关系 (广义 Hooke 定律)+Cauchy 应变张量 $E(x, t) \doteq \frac{1}{2}(\operatorname{Du}(x, t) + \operatorname{Du}(x, t)^\top) \Rightarrow$

$$\sigma(x, t) = 2\mu E(x, t) + \lambda(\operatorname{div} u)I_3 \Rightarrow \sigma(x, t) = \mu(\operatorname{Du} + (\operatorname{Du})^\top) + \lambda(\operatorname{div} u)I_3 \text{ 分量运算 (Einstein 求和约定):}$$

$$\operatorname{div} \sigma = \mathbf{e}_i \partial_j \sigma_{ij} = \mu \mathbf{e}_i \partial_j (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \lambda \mathbf{e}_i \partial_j (\operatorname{div} u) \delta_{ij} = \mu \mathbf{e}_i \partial_i (\partial_j u_j) + \mu \mathbf{e}_i \Delta u_i + \lambda \mathbf{e}_i \partial_i (\operatorname{div} u) = (\mu + \lambda) \mathbf{e}_i \partial_i (\operatorname{div} u) + \mu \mathbf{e}_i \Delta u_i = (\mu + \lambda) \operatorname{D}(\operatorname{div} u) + \mu \Delta u$$

- 弹性介质中的振动方程: (向量运算公式 $\operatorname{curl} \operatorname{curl} u = \operatorname{grad} \operatorname{div} u - \Delta u$)

$$\rho_0 u_{tt}(x, t) = (\mu + \lambda) \operatorname{D}(\operatorname{div} u) + \mu \Delta u + \rho_0 f(x, t) \Leftrightarrow \rho_0 u_{tt}(x, t) = (\mu + \lambda) \operatorname{curl} \operatorname{curl} u + (\lambda + 2\mu) \Delta u + \rho_0 f(x, t)$$

- 等体积波 ($\operatorname{div} u = 0$): $u_{tt}(x, t) = a^2 \Delta u + f(x, t) \quad a^2 \doteq \mu / \rho_0$

- 无旋波 ($\operatorname{curl} u = 0$): $u_{tt}(x, t) = b^2 \Delta u + f(x, t) \quad b^2 \doteq (\lambda + 2\mu) / \rho_0$

- u 的每个分量都满足三维波动方程. 注意弹性体中存在两种不同波速的波 (应用: 地震波溯源和探矿)

电动力学—Maxwell 方程组

- 描述电磁现象的基本物理量
 - 物理量: ρ — 电荷密度 (单位体积包含的电荷量); $\mathbf{j}$ — 电流密度 (方向为电荷流动的方向, 大小为单位时间通过垂直于电流方向的单位面积的电荷量); $\mathbf{E}$ — 电场强度 (静止的单位正点电荷受到的力); $\mathbf{B}$ — 磁感应强度 (大小是单位电流元受到的最大力, 方向是电流元受力为零时的方向或其反向)
 - 物理常量: μ_0 — 真空的磁导率; ϵ_0 — 真空的介电常数
- 电磁场与电荷的作用 — Lorentz 力 (1895 年): $\mathbf{F} = \rho \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ($\mathbf{v}$ 为带电荷 ρ 的质点的运动速度)
- 向量函数运算公式: $\operatorname{div} \operatorname{curl} \equiv 0$; $\operatorname{curl}(\operatorname{curl} \mathbf{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}$
- Maxwell 方程组 (1865 年) (推广: 介质中考虑到磁化和极化的 Maxwell 方程组 + Ohm 定律)
 - Coulomb 定律 (1785 年) $\Rightarrow$ Gauss 定理 (1839 年): $\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
 - 磁场的 Gauss 定律 (无磁单极子): $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$
 - Faraday 电磁感应定律 (1831 年): $\operatorname{curl} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
 - Ampère 定律 (1825 年) + Maxwell 位移电流假设: $\operatorname{curl} \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t})$

上述第 1、4 方程蕴含电荷守恒定律: $\partial_t \rho + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$.

● Maxwell 方程组

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{curl} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{curl} \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right).\end{aligned}$$

● 电场服从波动方程 ($c \doteq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$): $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{E} = - \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{grad} \rho + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \right)$

● 磁场服从波动方程: $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{B} = \mu_0 \operatorname{curl} \mathbf{j}$

● c 的值与真空中光速相同 $\Rightarrow$ 光是一种电磁波; 电磁场以波的形式运动并传播能量

● 波动方程在自变量的 Lorentz 变换下不变 $\Rightarrow$ 相对论 $\Rightarrow$ 广义相对论的 Einstein 方程 $\Rightarrow$ 引力波

电动力学方面的推荐参考书: 陈秉乾, 舒幼生, 胡望雨: 电磁学专题研究. 高等教育出版社, 2001 年. (侧重物理和历史)

李大潜, 秦铁虎: 物理学与偏微分方程 (上册). 高等教育出版社, 1997 年. [第一章] (侧重偏微分方程理论方面的推导和数学结构的介绍)

气体动力学—可压缩 Euler 方程组

- 物理量: ρ — 密度; e — 内能; T — 温度; v — 流速; p — 压强; f — 单位质量气体所受外力. 自变量: $t > 0, x \in \mathbb{R}^3$
- 非等熵可压缩 Euler 方程组 (状态方程: $p = p(\rho, e)$, 记号: 在直角坐标系中, 若 v 是列向量, 则 $v \otimes v = vv^\top$)
 - $$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0 & \text{(质量守恒)} \\ (\rho v)_t + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) + \operatorname{grad} p = \rho f & \text{(动量守恒)} \\ (\rho(e + \frac{1}{2}|v|^2))_t + \operatorname{div}((\rho e + \frac{1}{2}\rho|v|^2 + p)v) = \rho f \cdot v & \text{(能量守恒)} \end{cases}$$
- 理想气体: $p = R\rho T, R > 0$ — 常数; 多方气体: $e = c_\nu T, c_\nu$ — 定容比热; 对理想多方气体, $e = \frac{p}{(\gamma-1)\rho}, \gamma > 1$ — 常数 (对空气, $\gamma \approx 1.4$)

- 等熵可压缩 Euler 方程组 (状态方程: $p = p(\rho)$, 记 $c = \sqrt{p'(\rho)}$ — 声速)

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0 & (\text{质量守恒}) \\ (\rho v)_t + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) + \operatorname{grad} p = \rho f & (\text{动量守恒}) \end{cases}$$
- 浅水波方程: 等熵可压缩 Euler 方程组 + ($p = a\rho^2$) (此时 $x \in \mathbb{R}^2$, ρ — 水深; v — 水平方向水的流速)
- 习题: 设 $f \equiv 0$, v 和 $\hat{\rho} \doteq \rho - \rho_0$ 及其一阶和二阶偏导数都是小量, 其中 $\rho_0 > 0$ 是常数. 将第一个方程对 t 求导, 第二个方程求散度, 略去高阶项 $\Rightarrow$ 声学方程 $\boxed{\hat{\rho}_{tt} - c_0^2 \Delta \hat{\rho} = 0}$ $c_0 = \sqrt{p'(\rho_0)}$ — 声速
注: 设 σ 是矩阵, 则 $\operatorname{div} \sigma$ 是指对 σ 的行向量取散度后得到的列向量.

习题 1. 对空间周期区域上的不可压缩 Euler 方程组

$$v_t + v \cdot \nabla v + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot v = 0$$

的经典解, 证明如下能量守恒式: $\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} |v(x, t)|^2 dx = 0$.

注 — 设 $v = (v^1, v^2, v^3)$, 则上述不可压 Euler 方程组的分量形式是

$$v_t^i + \sum_{k=1}^3 v^k \partial_k v^i + \partial_i p = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad \sum_{k=1}^3 \partial_k v^k = 0.$$

周期区域: 三维平坦环面 $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3 / \mathbb{Z}^3$ (从拓扑角度讲, 是将 $\mathbb{R}^3$ 中单位立方体 $[0, 1]^3$ 的相对的面按同向粘合 (作等价类) 得到的商空间), 或者理解为未知函数 $p(x_1, x_2, x_3, t)$, $v(x_1, x_2, x_3, t)$ 关于自变量 x_1, x_2, x_3 都是周期为 1 的函数, 而上述积分区域是 $[0, 1]^3$.

(Onsager 猜想: 不可压 Euler 方程组的属于 $C_t C_x^{0, \alpha}$ 的弱解保持能量守恒方程 $\Leftrightarrow (\alpha > 1/3)$. Isett, Philip: A proof of Onsager's conjecture. Ann. of Math. (2) 188 (2018), no. 3, 871–963.)

阅读任务和作业

- 必读 — 郇中丹, 黄海洋: 偏微分方程 (第二版), 高等教育出版社, 2013. [pp.112–120]
- 作业: 无.
- 参考文献 (选读)
 - 李大潜, 秦铁虎: 物理学与偏微分方程 (上册). 高等教育出版社, 1997. [第一章 (电动力学), 第二章 (流体力学), 第五章 (弹性力学)]
 - 谷超豪, 李大潜, 沈玮熙: 应用偏微分方程. 高等教育出版社, 2014. [第二章, 弹性力学中的波]

最后更新: 2022-10-9

偏微分方程

第六讲 热传导、扩散与热方程

袁海荣 (华东师范大学 数学科学学院)

2022 年 9 月 29 日

……我们不禁要问：随着数学知识的不断扩展，单个的研究者想要了解这些知识的所有部门，岂不是变得不可能了吗？为了回答这个问题，我想指出，数学中每一步真正的进展都与更有力的工具和更简单的方法的发现密切联系着，这些工具和方法同时会有助于理解已有的理论，并把陈旧的、复杂的东西抛到一边。数学科学发展的这种特点是根深蒂固的。因此，对于个别的数学工作者来说，只要掌握了这些有力的工具和简单的方法，他就有可能在数学的各个分支中比其他学科更容易地找到前进的道路。

——David Hilbert (1862 年 1 月 23 日 — 1943 年 2 月 14 日)



传记: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hilbert/>

学习要点

- 了解热方程的应用背景, 掌握热传导方程的宏观推导, 三类边界条件的写法及物理意义
- 理解极值原理与能量积分方法的背景、思想, 初步掌握其具体做法
- 熟练掌握多元微积分的概念、公式和计算
- 体会物理与数学在研究自然现象上观点的异同; 为什么物理上显然的结论在数学上还需要给出严格的证明?
- **体会数学的有效性:** 很多不同背景的问题具有相同的数学形式, 可以利用从某一背景得到的启发来研究另一背景的问题 (例: L^1 和 L^2 中积分估计的来源、速度的极值原理)

热方程的推导: 宏观角度

- 问题: 确定 $\mathbb{R}^3$ 中物体 (视为区域 Ω) 内各点 x 在时刻 t 的温度 $u(x, t)$
- 基本物理量
 - 温度 $u(x, t) \geq 0$: 热力学温标, 单位: K (开尔文). 水的三相点 (即固、液、汽三相平衡共存的状态) 的温度约定为 0.0076°C , 热力学温标是将水三相点的温度定义为 273.16K 后所得到的温度. 温度刻画理想气体分子热运动的平均动能 (分子平均动能为 $\frac{3}{2}ku$, k 是 Boltzmann 常数). [温度的定义: 热力学第零定律]
 - 热量 Q : 从高温物体传递给低温物体的能量 (热量是一个过程量, 能量是一个状态量)
 - 质量密度 $\rho(x)$: 微元 dx 内所含物质的质量为 $\rho(x) dx$ (质量本质是一种测度)
 - 热量与温度的关系 — 比热 $c(x) > 0$: 单位质量的物质升高单位温度所需的热量
 - 热源 $F(x, t)$ — 单位质量的物质在单位时间内产生的热量

● 物理定律

- 热量传递的三种形式:

对流 (advection, 输运), 传导 (conduction, 扩散), 辐射 (radiation, 电磁波)

- Fourier 热传导定律: 在时间微元 dt 内, 沿由法向 $\mathbf{n}$ 所给出的定向, 通过面积微元 $d\sigma$ 的热量 dQ 的绝对值与沿该曲面单位法向 $\mathbf{n}$ 的温度的方向导数 $\partial u / \partial \mathbf{n} = Du \cdot \mathbf{n}$ 成正比, 符号与 $\partial u / \partial \mathbf{n}$ 相反:

$$dQ = k(x)(-Du) \cdot \mathbf{n}(x) d\sigma dt$$

- 这里 $k(x) > 0$ — x 点物质的热传导系数 (实验确定); 负号 — 热量从高温一侧传向低温一侧, 流动方向是 $-Du$ (热力学第二定律)

- 热力学第一定律 (能量守恒定律)

物体内部任意部分升温所需的热量 = 外部流入的热量 + 内部热源产生的热量

- 任取 $G \subset \Omega$, 设 ∂G 是 C^1 曲面. 在 $[t_1, t_2]$ 时间段,

$$\text{温度升高所需热量} = \int_G [u(x, t_2) - u(x, t_1)] c(x) \rho(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} \int_G u_t(x, t) c(x) \rho(x) dx dt$$

- $[t_1, t_2]$ 时间段内从 G 的外部经边界 ∂G 流入的热量 (取 $\mathbf{n} = -\nu$ 是指向 G 内的单位法向, 则 $-\partial u / \partial \mathbf{n} = \mathbf{Du} \cdot (-\mathbf{n}) = \mathbf{Du} \cdot \nu = \partial u / \partial \nu$)

$$= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial G} k(x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) d\sigma dt \xrightarrow[\text{散度定理}]{\nu \text{ 是 } \partial G \text{ 的外单位法向}} \int_{t_1}^{t_2} \int_G \operatorname{div}(k(x) \mathbf{Du}(x, t)) dx dt$$

- 散度定理: $\int_{\Omega} \operatorname{div} V(x) dx = \int_{\partial \Omega} V(x) \cdot \nu(x) d\sigma(x)$, $\nu(x)$ 为 $x \in \partial \Omega$ 处的外单位法向; $d\sigma$ 为曲面 $\partial \Omega$ 的面积元 (Hausdorff 测度); $V(x) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$
- G 内产生的热量 $= \int_{t_1}^{t_2} \int_G F(x, t) \rho(x) dx dt$

• 热方程 (注意 $\Delta u = \operatorname{div} Du$)

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_G u_t(x, t) c(x) \rho(x) \, dx \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_G \operatorname{div}(k(x) Du(x, t)) \, dx \, dt +$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_G F(x, t) \rho(x) \, dx \, dt \xrightarrow[t_1, t_2, G \text{ 的任意性}]{\text{设被积函数连续, 即 } u \in C_{x,t}^{2,1}, k \in C^1} u_t(x, t) c(x) \rho(x) =$$

$$\operatorname{div}(k(x) Du(x, t)) + F(x, t) \rho(x) \xrightarrow[\text{设 } \rho(x) = \rho, c(x) = c, k(x) = k \text{ 都是正的常数 (均匀介质)}]{a^2 \doteq \frac{k}{c\rho}, f(x,t)=F(x,t)/c(x)} \rightarrow$$

热方程 $u_t = a^2 \Delta u + f(x, t)$

边界条件

- Dirichlet 条件 $u(x, t) = b(x, t), x \in \partial\Omega, t \geq 0$: 物体边界处温度 $b(x, t)$ 已知
- Neumann 条件 $\frac{\partial u}{\partial \nu} = q(x, t), x \in \partial\Omega, t \geq 0, \nu: x$ 点的 $\partial\Omega$ 的外单位法向: 物体边界处单位面积单位时间流出的热量 dQ 已知
(用 Fourier 热传导定律, $dQ = -k(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}d\sigma dt = -k(x)q(x, t)d\sigma dt$)

- Robin 条件 $\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u = r(x, t), x \in \partial\Omega, t \geq 0, \nu: x$ 点的 $\partial\Omega$ 的外单位法向: 物体表面与另外一种介质接触, 而这种介质的温度已知
- Newton 热交换定律: 在单位时间通过单位面积从物体表面传递到介质中的热量与两者的温度差成正比: $dQ = k_1(u - u_1)d\sigma dt$, 这里 $k_1 > 0$ 是热交换系数, u 是物体表面的温度, u_1 是与物面接触的介质的温度
- 能量守恒: $-k \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma dt = k_1(u - u_1)d\sigma dt \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{k_1}{k}u = \frac{k_1}{k}u_1}$ (注意当 ν 是外法向时, $\sigma \doteq k_1/k \geq 0$)

- 将上述三类边界条件与弦振动方程的三类边界条件作对比: 数学形式完全一样, 物理背景完全不同
- 初值条件: $u(x, 0) = \phi(x)$ (初始时刻物体内部的温度已知. 注意只需要一个初值条件)
- 初边值问题
- Cauchy 问题

扩散: 宏观角度

- 问题: 溶质在溶液中的扩散、半导体掺杂等
- 基本物理量
 - 摩尔浓度 $u(x, t) \geq 0$: 单位体积溶液中所含溶质的摩尔数
 - 源项 $F(x, t)$: 单位时间单位体积内生成溶质的摩尔数
- 物理定律
 - 溶质摩尔数守恒定律
 - Fick 扩散定律: $\boxed{du = -k(x, t) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS dt}$ (单位时间内沿着单位法向 $\mathbf{n}$ 通过单位面积曲面的溶质摩尔数与摩尔浓度沿方向 $\mathbf{n}$ 的方向导数成正比, 符号相反)
 - $k(x, t) > 0$: 扩散系数.
- 扩散方程: $u_t - \operatorname{div}(k(x, t) Du) = F(x, t)$. (推导: 完全类似热传导方程)
- 三类边界条件: 类似.

扩散: 介观角度

- 微粒的一维扩散问题 — 试管: $x \in \mathbb{R}$, 时间 $t \geq 0$. 将大量微粉 (化学分子) 放入试管中, 用函数 $u(x, t)$ 代表在时刻 t , 在 x 点处微粒的线密度 (浓度), 即在 t 时刻, 位于 x 点处长为 dx 的微元内的微粒数量 (或质量) 是 $u(x, t) dx$. 设初始时刻微粒分布是 $u(x, 0) = \phi(x)$, 求 $u(x, t)$.
- 概率描述: 在试管中释放一个粒子, 将 $u(x, t)$ 视作概率密度函数 (要求 $\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = 1$), $\int_a^b u(x, t) dx$ 表示这个微粒出现在区间 $[a, b]$ 内的概率.

- 关键概念 — 概率转移函数: 经过时间 τ , 上述 t 时刻位于 x 点处微元 dx 内的微粒 $u(x, t) dx$ 中有一部分跑到了包含 z 点, 长为 dz 的微元内. 我们将这个比例记为 $f(z, \tau | x) dz$ (注意这个比例还和 dz 成正比, 所以可以这样写), 表示在微元 dz 内, 来自微元 dx 的微粒数量是 $(u(x, t) dx)f(z, \tau | x)dz$. 函数 $f(z, \tau | x)$ 称作 概率转移函数. 这是刻画依赖于时间的随机现象 (随机过程) 的非常重要的概念.

- **基本假设** — 空间均匀性和各向同性 (与具体地点和方向无关): $f(z, \tau | x)$ 只依赖于 $y = z - x$ 和 τ (每个微元中的微粒扩散到别的微元的比例, 只和距离远近及所花的时间有关, 而与其所在的具体的空间位置和运动方向无关)
 - 此时概率转移函数写作 $f(y, \tau)$
 - 假设: $\int_{\mathbb{R}} f(y, \tau) dy = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} y f(y, \tau) dy = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} y^2 f(y, \tau) dy = d\tau \quad (d > 0 \text{ 是常数})$

- 概率转移函数: $f(y, \tau)$, 假设其满足

$$\int_{\mathbb{R}} f(y, \tau) dy = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} y f(y, \tau) dy = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} y^2 f(y, \tau) dy = d\tau \quad (d > 0 \text{ 是常数})$$

- 微粒数守恒 (概率的规范条件): $u(x, t)dx f(y, \tau)dy$ 代表 t 时刻 x 点所在微元 dx 内的微粒用了 τ 时间跑到 $x + y$ 处长为 dy 的微元内的数量. 关于 dy 积分表示把散落在各个微元 dy 的微粒加起来, 它应当等于原来的微粒数

$$\text{量 } u(x, t)dx: \int_{\mathbb{R}} (u(x, t)dx f(y, \tau))dy = u(x, t)dx \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(y, \tau) dy = 1.$$

注意到按照定义, 概率转移函数是非负的, 所以可以把 $f(y, t)$ 看成是一个依赖于时间 t 的概率密度函数.

- 概率转移函数对应的期望为零, 代表着扩散与方向无关.
- 扩散的方差与所用时间成正比, 源于对 Brown 运动等物理现象观测所得的结果.

- u 满足的 PDE 的推导: 在 $t + \tau$ 时刻, 位于 x 处的微元 dx 内的微粒都是从 t 时刻位于其它处的微元 dy 扩散来的, 即关于 dy 积分, 应当有

$$u(x, t + \tau) dx = \int_{\mathbb{R}} u(y, t) dy f(x - y, \tau) dx.$$

约掉 dx , 形式上作 Taylor 展开 (注意区分微分算符 d 和参数 d):

$$\begin{aligned} u(x, t + \tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(y, t) f(x - y, \tau) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x - z, t) f(z, \tau) dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (u(x, t) - u_x(x, t)z + \frac{1}{2}u_{xx}(x, t)z^2 + \cdots) f(z, \tau) dz \\ &= u(x, t) + \frac{1}{2}u_{xx}(x, t)d\tau + \cdots \Rightarrow \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} = \frac{1}{2}du_{xx}(x, t) + \cdots \\ &\xrightarrow[\tau \rightarrow 0+]{\text{忽略其它项}} \boxed{\text{扩散方程 } u_t = \frac{1}{2}du_{xx}}. \end{aligned}$$

- 基本解: 设一个微粒最初放在原点: $u(x, 0) = \delta_0$ (在原点的 Dirac 测度), 扩散方程的测度初值问题
$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{2} du_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \delta_0 \end{cases}$$
 的解是
$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi dt}} e^{-\frac{x^2}{2dt}},$$
 即微粒在细管中的线密度就是正态分布 $N(0, dt)$.

此结论以后证明. $N(0, dt)$ 代表期望为零, 方差是 dt 的正态分布 [概率论]

流体力学方程组—Navier-Stokes 方程组

- 物理量: v — 速度; p — 压强; f — 外力; $\mu > 0$ — 粘性系数
- 齐次不可压 Navier-Stokes 方程组 (密度 $\rho \equiv 1$)

$$v_t + v \cdot \nabla v + \nabla p - \mu \Delta v = f, \quad \nabla \cdot v = 0$$

- 世纪难题: 三维情形的湍流 (非线性输运、压力、粘性三者的竞争和作用) (平面情形已解决)

● 简化模型:

i) 忽略输运项 — Stokes 方程组: $v_t + \nabla p - \mu \Delta v = f, \quad \nabla \cdot v = 0;$ ii) 稳态 Stokes 方程组 $\nabla p - \mu \Delta v = f, \quad \nabla \cdot v = 0$ iii) 忽略粘性 — 不可压 Euler 方程: $v_t + v \cdot \nabla v + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot v = 0$ iv) 忽略压力 — Burgers 方程: $v_t + v \cdot \nabla v - \mu \Delta v = f$ v) 忽略压力和粘性 — 无粘 Burgers 方程 (激波): $v_t + v \cdot \nabla v = f$ vi) 忽略输运和压力 — 热方程: $v_t - \mu \Delta v = f$ vii) 忽略输运和、压力和扩散 — Newton 第二定律: $v_t = f$

能量积分

- 目标问题 (两端绝热的无内部热源的杆的温度分布):

$0 < x < L, t \geq 0; u_t = u_{xx}; u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0; u(x, 0) = \phi(x)$, 假设经典解 $u \in C^{2,1}$ 存在 ($C^{2,1}$ 表示关于 x 二阶连续可导, 关于 t 连续可导的函数集合)

- 能量 (或概率) 守恒 (考虑非负解 $u(x, t) \geq 0$): $E_1(t) = \int_0^L u(x, t) dx$.

基本问题: 扩散方程是否可以保证如果初始条件非负, 解就是非负的? (否则该方程在物理上不合理) $\Rightarrow$ 极值原理方法

$$\frac{dE_1(t)}{dt} = \int_0^L u_t(x, t) dx = \int_0^L u_{xx}(x, t) dx = u_x(L, t) - u_x(0, t) = 0 \Rightarrow E_1(t) \equiv E_1(0)$$

- 动能 (能量积分): $E_2(t) = \int_0^L |u(x, t)|^2 dx$ (源于 N-S 方程组, u -速度, 动能
 $= \frac{1}{2} \int \rho |u(x, t)|^2 dx$, 其中 $\rho \equiv 1$)

$$\frac{dE_2(t)}{dt} = \int_0^L 2uu_t(x, t) dx = \int_0^L 2uu_{xx}(x, t) dx = 2uu_x|_0^L - 2 \int_0^L u_x^2 dx = -2 \int_0^L u_x^2 dx \leq 0 \Rightarrow E_2(t) \leq E_2(0) \Rightarrow \text{解的唯一性和 } L^2 \text{ 中关于初值的稳定性}$$

- 推广: 对 PDE, 乘上解或解的导数的适当组合, 化为散度形式 (即熵-熵流对方程), 在适当 (时空) 区域积分, 得到一些正定项被边界条件和初始条件控制的不等式: i) 由这些正定项作为范数, 通过光滑函数在该范数下的完备化, 构造函数空间 (如 Sobolev 空间); ii) 这些能量不等式作为解的估计, 直接得到在该空间解的唯一性和稳定性结论; iii) 利用函数空间的紧性或弱紧性, 通过近似解满足的一致能量不等式构造精确解 (紧性方法) $\Rightarrow$ 抛物型方程在 Sobolev 空间中的适定性理论

极值原理

- 目标问题 (两端绝热的无内部热源的杆的温度分布):

$$0 < x < L, 0 \leq t \leq T; u_t = u_{xx}; u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0; u(x, 0) = \phi(x)$$

- 由能量或概率守恒提出的问题: 初始条件非负, 是否保证解非负? [物理上显然, 但该模型是否准确描述物理? 故这只是一个猜想, 需要对该模型做出数学的证明]
- 结论: 设 $\phi(x) \geq 0$, 则 $u(x, t) \geq 0$.

- 结论: 设 $\phi(x) \geq 0$, 则 $u(x, t) \geq 0$. [证明细节以后学习. 以下是证明思路]
- 第一步: 方程的极值原理 (解的最大值和最小值都只在抛物边界 $\{x = 0, t \geq 0\} \cup \{x = L, t \geq 0\} \cup \{x \in [0, L], t = 0\}$ 取到). 利用线性, 只需证明最大值的情形
 - i) 先松弛, 利用最大值点处函数导数的符号特性, 说明偏微分不等式 $u_t - u_{xx} < 0$ 的经典解的最大值不在区域内部及上边界取到;
 - ii) 对 $u - \epsilon t$ 用 i) 的结论, 然后令 $\epsilon \rightarrow 0+$. (最小值情形: 若 $u_t - u_{xx} > 0$, 则 u 的最小值点必在抛物边界; 若 $u_t - u_{xx} \geq 0$, 考虑辅助函数 $u + \epsilon t$.)
- 第二步: 对 Dirichlet 边值条件情形可直接用上述极值原理解决.

- 第三步: 对齐次 Robin 条件, 若正的最大值在边界点取到, 与边界条件矛盾, 得到结论.
- 第四步: 对齐次 Neumann 条件, 引入待定函数 $w(x)$, 使得 $v(x) \doteq w(x)u(x)$ 满足 Robin 条件, 用第三步的结论 (但方程中会有输运项和源项 $u_t = a^2 u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u$, 输运项 bu_x 对极值原理无影响, 源项 cu 用含时间的未知函数替换 $v = e^{\lambda t}u$ 取适当大的 λ 控制, 使得源项系数符号是好的).
- 结论: 和能量方法类似, 看似显然的物理结论的严格数学证明需要相当难度的数学工具和技巧 (含参变量积分求导, 散度定理 (微积分基本定理), 不等式放缩, 用导数刻画极值点, 对问题的适当松弛等) $\Rightarrow$ 二阶抛物型方程在 Höler 空间中的适定性理论

欧式期权定价的 Black-Scholes 方程

- 欧式看跌 (涨) 期权: 设某证券的价格是 $S(t)$, 其中 t 代表时间. 该证券的欧式看跌 (涨) 期权是指: 在约定的到期日 T , 以约定的执行价格 K , 出售(购买) 一份该证券的权利; 该权利只有在到期日才能实施, 且可以放弃; 在到期日之前的时刻 t , 该期权可以以价格 $V(t)$ 出售, $V(t)$ 称为权利金, 也就是期权的价格.
- 对冲和定价函数: 期权的价格 $V(t)$ 的不确定性应当和证券 $S(t)$ 的不确定性具有相同来源, 是个依赖于 $S(t)$ 的函数, 否则就不能通过对它们作投资组合后把风险消掉. 为此, 可以假设存在一个确定的二元函数 $u(s, t)$, 称为 定价函数, 使得 $V(t) = u(S(t), t)$. 所以定价问题本质上是求解定价函数 u .

欧式期权定价的 Black-Scholes 方程

- 欧式看跌 (涨) 期权: 设某证券的价格是 $S(t)$, 其中 t 代表时间. 该证券的欧式看跌 (涨) 期权是指: 在约定的到期日 T , 以约定的执行价格 K , 出售(购买) 一份该证券的权利; 该权利只有在到期日才能实施, 且可以放弃; 在到期日之前的时刻 t , 该期权可以以价格 $V(t)$ 出售, $V(t)$ 称为权利金, 也就是期权的价格.
- 对冲和定价函数: 期权的价格 $V(t)$ 的不确定性应当和证券 $S(t)$ 的不确定性具有相同来源, 是个依赖于 $S(t)$ 的函数, 否则就不能通过对它们作投资组合后把风险消掉. 为此, 可以假设存在一个确定的二元函数 $u(s, t)$, 称为 定价函数, 使得 $V(t) = u(S(t), t)$. 所以定价问题本质上是求解定价函数 u .

● 基本假设

- 无套利; 无手续费等额外费用. 设无风险利率为 r (复利)

套利: 指在无风险, 无资金投入的情况下获得收益.

- 证券价格服从随机微分方程 $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$. ($W(t)$ -Brown 运动; μ -漂移系数; σ -风险波动率)

(♠) 关键点: 随机微分的 Itô 链式法则: 对 $u(S(t), t)$ 关于 S, t 作 Taylor 展开到二阶

$\Rightarrow du(S(t), t) = u_t dt + u_s dS + \frac{1}{2}u_{tt}(dt)^2 + u_{st} dt dS + \frac{1}{2}u_{ss}(dS)^2$, 代

入 $dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW$, 略去 $(dt)^{\frac{3}{2}}$ 及更高阶的项 (利用 Itô 随机积分的 (形式上的) 看

法: 记 $dW(t) = W(t+dt) - W(t)$, 由于 $\mathbb{E}[dW(t)^2] = dt$, 形式上认为 $dW(t) \sim \sqrt{dt} \Rightarrow$

$$dV(t) = (u_t + \frac{1}{2}u_{ss}\sigma^2 S(t)^2) dt + u_s dS(t) = (u_t + \mu S(t)u_s + \frac{1}{2}u_{ss}\sigma^2 S(t)^2) dt + \sigma S(t)u_s dW(t).$$

- **无风险投资组合:** 同时持有期权和证券, 即作投资组合 $\Pi(t) = V(t) - \delta(t)S(t)$, ($\delta(t)$: 证券的份额, 待定, 可正可负, 通过持有或借入 (融券) 实现). 目的: 选取适当的 $\delta(t)$, 使得在 $(t, t + dt)$ 时段内, 不改变份额 $\delta(t)$, 而 $\Pi(t)$ 是无风险的, 即在时刻 $t + dt$, 投资组合的回报应当和存款利息一样:
 $\Pi(t + dt) - \Pi(t) = r\Pi(t)dt$, 从而 (注意 $\delta(t)$ 没有改变, 毋需对其微分) $\Rightarrow (\diamond) dV(t) - \delta(t)dS(t) = d\Pi(t) = \Pi(t + dt) - \Pi(t) = r\Pi(t)dt = r(V(t) - \delta(t)S(t)) dt$.

- 将上页 Itô 链式法则 $dV(t) = (u_t + \mu S(t)u_s + \frac{1}{2}u_{ss}\sigma^2 S(t)^2) dt + \sigma S(t)u_s dW(t)$ 和证券价格 $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$ 代入

$$(\diamond) \quad dV(t) - \delta(t)dS(t) = r(V(t) - \delta(t)S(t)) dt \xrightarrow[\text{注意 } V(t)=u(S(t),t)]{\text{函数 } u \text{ 的自变量为 } s=S(t), t=t} \text{ 在点}$$

$$(S(t), t), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \underbrace{\mu S(t) \frac{\partial u}{\partial s} - \delta(t)\mu S(t)}_{=0(\text{因为 } \delta(t)=\partial u/\partial s)} \right) dt + \underbrace{\left(\sigma S(t) \frac{\partial u}{\partial s} - \delta(t)\sigma S(t) \right)}_{\text{无风险} \Rightarrow \text{此项}=0 \Rightarrow \delta(t)=\partial u/\partial s} dW_t = r(u - \delta(t)S(t))dt$$

- $\Rightarrow$ Black-Scholes 方程 $\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + rs \frac{\partial u}{\partial s} - ru = 0.}$ $(\sigma, r - \text{常数})$ [类型: 二阶变系数线性倒向退化抛物型方程]

- 区域和边界条件 (以看跌期权为例): $\Omega = \{(s, t) : s \geq 0, 0 \leq t \leq T\}$ (T —约定的期权的执行时间. 假设证券价格非负, 故 $s \geq 0$)
 - 左边界 $\{s = 0\}$ 上: 证券价格是零 $\Rightarrow$ 看跌期权持有人执行权利, 以价格 K 卖出证券. 为了避免套利, 他买看跌期权的价格也应当是 K . 所以 $u(0, t) = K$.
 - 上边界 $\{s \geq 0, t = T\}$: 当证券价格 $s > K$ 时, 看跌期权没人会执行, 即它没有用处 $\Rightarrow$ 价格是 0. 当证券价格 $s \leq K$ 时, 为了避免套利, 期权价格应当是差价 $K - s$. (因为这时投资人有两种途径套现. 一是直接出售证券得到 s 元; 另一种是先购买看跌期权, 花费 V 元, 再以 K 元出售他持有的证券资产, 此时他净得 $K - V$ 元. 两种途径可同时实现, 所以必须要成立 $V = K - s$ 才能避免套利. 所以此边界条件是 $u(s, T) = \max\{K - s, 0\}$.)
 - 该倒向初边值问题可通过自变量和未知函数的变量替换, 转化为热传导方程的 Cauchy 问题, 从而给出解的公式—Black-Scholes 期权定价公式.

阅读任务和作业

- 必读- 郇中丹, 黄海洋: 偏微分方程 (第二版), 高等教育出版社, 2013. [pp.164–166]
- 作业: 无.

最后更新: 2022-10-11

偏微分方程

第七讲 变分原理与椭圆型方程

袁海荣 (华东师范大学 数学科学学院)

2022 年 10 月 11 日

在解决一个数学问题时, 如果我们没有获得成功, 原因常常在于我们没有认识到更一般的观点, 即眼下要解决的问题不过是一连串有关问题中的一个环节. 采取这样的观点之后, 不仅我们所研究的问题会容易得到解决, 同时还会获得一种能应用于有关问题的普遍方法. ……这种寻求一般方法的途径肯定是最行得通也是最可靠的, 因为手中没有明确的问题而去寻求一般方法的人, 他的工作多半是徒劳无益的.

—David Hilbert (1862 年 1 月 23 日—1943 年 2 月 14 日)



传记: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hilbert/>

学习要点

- 了解二阶椭圆型方程和典型定解条件的来源和背景 (几何变分问题、周期解、稳态解、分离变量解、位势论等)
- 了解椭圆型方程极值原理和能量积分方法的背景
- 类比函数的极值问题, 理解变分方法的意义, 熟练掌握泛函 Euler-Lagrange 方程的推导
- 理解弱解的意义, 初步了解弱解的应用 (有限元法)
- 初步理解函数空间和泛函分析对于求解 PDE 的意义

变分问题与解方程

- 泛函:

$$J: C^1(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}; J(w) \doteq \int_{\Omega} F(x, w(x), Dw(x)) \, dx,$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是边界光滑的有界区域, $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ 是已知函数.

- 变分问题: 求泛函 J 在容许集 $\mathcal{A}$ 上的极小(大)值点

$$\operatorname{argmin}_{w \in \mathcal{A}} J(w) \quad \text{或} \quad \operatorname{argmax}_{w \in \mathcal{A}} J(w).$$

- 一阶变分 (Gâteaux 导数, 非线性泛函分析) $J'(u) : V \rightarrow \mathbb{R}$ — 固定 $u \in \mathcal{A}$, 对任意 $v \in V$, 使得 $u + tv \in \mathcal{A}$, 其中 $t \in \mathbb{R}$, $|t| \ll 1$, (这样的集合 V 称作测试函数集), 定义 (若极限存在)

$$J'(u)v \doteq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} = \left. \frac{d}{dt} J(u + tv) \right|_{t=0}.$$

- 利用变分刻画极值点: 设 u_* 是极值点, 则 $J'(u_*)v = 0, \forall v \in V$, 即变分 $J'(u_*) = 0$.
- 注意: 一阶变分 $J'(u)$ 是个测试函数空间 V 到实数集 $\mathbb{R}$ 的映射. 要表示一个映射, 往往要写出它对给定的自变量所取的值, 即 $J'(u)v$. 对 PDE 而言, 变分方程 $J'(u)v = 0$ 是对应弱解的写法; 而 $J'(u) = 0$ 是对应经典解的写法.

- 一阶变分 (Gâteaux 导数, 非线性泛函分析) $J'(u) : V \rightarrow \mathbb{R}$ — 固定 $u \in \mathcal{A}$, 对任意 $v \in V$, 使得 $u + tv \in \mathcal{A}$, 其中 $t \in \mathbb{R}$, $|t| \ll 1$, (这样的集合 V 称作测试函数集), 定义 (若极限存在)

$$J'(u)v \doteq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} = \left. \frac{d}{dt} J(u + tv) \right|_{t=0}.$$

- 利用变分刻画极值点: 设 u_* 是极值点, 则 $J'(u_*)v = 0, \forall v \in V$, 即变分 $J'(u_*) = 0$.
- 注意: 一阶变分 $J'(u)$ 是个测试函数空间 V 到实数集 $\mathbb{R}$ 的映射. 要表示一个映射, 往往要写出它对给定的自变量所取的值, 即 $J'(u)v$. 对 PDE 而言, 变分方程 $J'(u)v = 0$ 是对应弱解的写法; 而 $J'(u) = 0$ 是对应经典解的写法.

- 一阶变分 (Gâteaux 导数, 非线性泛函分析) $J'(u) : V \rightarrow \mathbb{R}$ — 固定 $u \in \mathcal{A}$, 对任意 $v \in V$, 使得 $u + tv \in \mathcal{A}$, 其中 $t \in \mathbb{R}$, $|t| \ll 1$, (这样的集合 V 称作测试函数集), 定义 (若极限存在)

$$J'(u)v \doteq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} = \left. \frac{d}{dt} J(u + tv) \right|_{t=0}.$$

- 利用变分刻画极值点: 设 u_* 是极值点, 则 $J'(u_*)v = 0, \forall v \in V$, 即变分 $J'(u_*) = 0$.
- 注意: 一阶变分 $J'(u)$ 是个测试函数空间 V 到实数集 $\mathbb{R}$ 的映射. 要表示一个映射, 往往要写出它对给定的自变量所取的值, 即 $J'(u)v$. 对 PDE 而言, 变分方程 $J'(u)v = 0$ 是对应弱解的写法; 而 $J'(u) = 0$ 是对应经典解的写法.

- 类比: 紧集上连续函数必取到最大值和最小值; Fermat 引理 (极值点若是内点, 且可导, 则导数必然是零); 一阶变分对应梯度向量 (是 $\mathbb{R}^n$ 上线性泛函); 复习可微、可导的概念
- 关键点: 泛函极值点 $\Leftrightarrow$ 变分方程的解: 可利用拓扑性质说明极值可以取到 (极值点存在), 从而说明非线性 PDE 的 (某种意义下的) 解存在!
- 优化和最优控制问题本质上都是变分问题
- 许多几何和物理问题都具有变分结构

- 类比: 紧集上连续函数必取到最大值和最小值; Fermat 引理 (极值点若是内点, 且可导, 则导数必然是零); 一阶变分对应梯度向量 (是 $\mathbb{R}^n$ 上线性泛函); 复习可微、可导的概念
- 关键点: 泛函极值点 $\Leftrightarrow$ 变分方程的解: 可利用拓扑性质说明极值可以取到 (极值点存在), 从而说明非线性 PDE 的 (某种意义下的) 解存在!
- 优化和最优控制问题本质上都是变分问题
- 许多几何和物理问题都具有变分结构

- 类比: 紧集上连续函数必取到最大值和最小值; Fermat 引理 (极值点若是内点, 且可导, 则导数必然是零); 一阶变分对应梯度向量 (是 $\mathbb{R}^n$ 上线性泛函); 复习可微、可导的概念
- 关键点: 泛函极值点 $\Leftrightarrow$ 变分方程的解: 可利用拓扑性质说明极值可以取到 (极值点存在), 从而说明非线性 PDE 的 (某种意义下的) 解存在!
- 优化和最优控制问题本质上都是变分问题
- 许多几何和物理问题都具有变分结构

变分原理

- Hamilton 原理: 对于任何力学系统, 给定初始时刻 $t = t_0$ 的初始状态和终结时刻 $t = t_1$ 的终结状态之后, 其真实的运动区别于其它可能的运动之处在于, 真实的运动使得泛函 $J = \int_{t_0}^{t_1} L dt$, ($L = T - U$) 的一阶变分 J' 为零. 这里 T, U 分别表示该力学系统在 t 时刻的总动能和总势能, $L = T - U$ 叫作该系统的 Lagrange 函数.
- 最小势能原理: 对于任何静止的平衡稳定的力学系统, 其真实状态区别于其它容许状态之处在于, 真实状态使得该系统势能的一阶变分为零.

变分原理

- Hamilton 原理: 对于任何力学系统, 给定初始时刻 $t = t_0$ 的初始状态和终结时刻 $t = t_1$ 的终结状态之后, 其真实的运动区别于其它可能的运动之处在于, 真实的运动使得泛函 $J = \int_{t_0}^{t_1} L dt$, ($L = T - U$) 的一阶变分 J' 为零. 这里 T, U 分别表示该力学系统在 t 时刻的总动能和总势能, $L = T - U$ 叫作该系统的 Lagrange 函数.
- 最小势能原理: 对于任何静止的平衡稳定的力学系统, 其真实状态区别于其它容许状态之处在于, 真实状态使得该系统势能的一阶变分为零.

Riemann 映射定理、变分法直接方法

定理 (Riemann 映射定理)

复平面的单连通的非空真子集 U 共形等价于其 (开) 单位圆 $B_1(0)$: 对 $z_0 \in U$, 存在唯一的双全纯映射 $f: U \rightarrow B_1(0)$ 使得 $f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0$.

类比数学分析“有界闭区间上连续函数必取到最大值和最小值”的证明.

- 1) 利用对数函数和分式线性变换的复合, 直接构造 U 到单位圆的包含原点的一个开集 Ω 的双全纯变换; 问题简化为 $U = \Omega$ 的情形.
- 2) 变分问题 — 容许集: $\mathcal{A} = \{f: \Omega \rightarrow B_1(0) \mid \text{全纯的单射, 且 } f(0) = 0\}$; 泛函: $L[f] \doteq |f'(0)|$; 变分问题: $\max_{f \in \mathcal{A}} L[f]$;

Riemann 映射定理、变分法直接方法

定理 (Riemann 映射定理)

复平面的单连通的非空真子集 U 共形等价于其 (开) 单位圆 $B_1(0)$: 对 $z_0 \in U$, 存在唯一的双全纯映射 $f: U \rightarrow B_1(0)$ 使得 $f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0$.

类比数学分析“有界闭区间上连续函数必取到最大值和最小值”的证明.

- 1) 利用对数函数和分式线性变换的复合, 直接构造 U 到单位圆的包含原点的一个开集 Ω 的双全纯变换; 问题简化为 $U = \Omega$ 的情形.
- 2) 变分问题 — 容许集: $\mathcal{A} = \{f: \Omega \rightarrow B_1(0) \mid \text{全纯的单射, 且 } f(0) = 0\}$; 泛函: $L[f] \doteq |f'(0)|$; 变分问题: $\max_{f \in \mathcal{A}} L[f]$;

Riemann 映射定理、变分法直接方法

定理 (Riemann 映射定理)

复平面的单连通的非空真子集 U 共形等价于其 (开) 单位圆 $B_1(0)$: 对 $z_0 \in U$, 存在唯一的双全纯映射 $f: U \rightarrow B_1(0)$ 使得 $f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0$.

类比数学分析“有界闭区间上连续函数必取到最大值和最小值”的证明.

- 1) 利用对数函数和分式线性变换的复合, 直接构造 U 到单位圆的包含原点的一个开集 Ω 的双全纯变换; 问题简化为 $U = \Omega$ 的情形.
- 2) 变分问题 — 容许集: $\mathcal{A} = \{f: \Omega \rightarrow B_1(0) \mid \text{全纯的单射, 且 } f(0) = 0\}$; 泛函: $L[f] \doteq |f'(0)|$; 变分问题: $\max_{f \in \mathcal{A}} L[f]$;

3) 变分法直接方法—最大值点的存在性

- 近似解存在性 — 由Cauchy 导数公式, 当 $f \in \mathcal{A}$ 时 $f'(0)$ 一致有界, 从而由确界原理, 上确界 $s = \sup_{f \in \mathcal{A}} L[f]$ 有限, 存在极大序列 $\{f_n\} \subset \mathcal{A}$ 使得 $|f'_n(0)| \rightarrow s$ ($n \rightarrow \infty$).
- 紧性 — Montel 定理: Ω 上一致有界的全纯函数列必有子列在 Ω 的任意紧子集上一致收敛 (内闭一致收敛); 完备性 — Morera 定理: 设全纯函数列 f_n 在 Ω 的任意紧子集上都一致收敛到 f , 则 f 在 Ω 上全纯; Hurwitz 定理: 设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是连通开集, f_n 是 Ω 上的单的全纯映射, 内闭一致收敛到 f , 则 f 或者是单射, 或者是常数函数. (用以保证极大化序列的极限仍是单射.)

4) 证明变分问题的解 f 是所求的 Riemann 双全纯映射

- 开映射定理: 设 f 是区域 Ω 上的非常数值的全纯函数, 则 f 是开映射 (把开集映为开集). 结合隐函数定理, 只需证明 f 是满射;
- 反证法. 用到 Schwarz 引理: 设 $f: B_1(0) \rightarrow B_1(0)$ 是全纯映射, 且 $f(0) = 0$. 则
 - i) $\forall z \in B_1(0), |f(z)| \leq |z|$; ii) 若对某个 $z_0 \neq 0$ 成立 $|f(z_0)| = |z_0|$, 则 f 是个旋转;
 - iii) $|f'(0)| \leq 1$, 且若等号成立, f 必然是个旋转.

参考: Stein, Elias M.; Shakarchi, Rami. Complex analysis. Princeton Lectures in Analysis, 2. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. (Chapter 8)

3) 变分法直接方法—最大值点的存在性

- 近似解存在性 — 由Cauchy 导数公式, 当 $f \in \mathcal{A}$ 时 $f'(0)$ 一致有界, 从而由确界原理, 上确界 $s = \sup_{f \in \mathcal{A}} L[f]$ 有限, 存在极大序列 $\{f_n\} \subset \mathcal{A}$ 使得 $|f'_n(0)| \rightarrow s$ ($n \rightarrow \infty$).
- 紧性 — Montel 定理: Ω 上一致有界的全纯函数列必有子列在 Ω 的任意紧子集上一致收敛 (内闭一致收敛); 完备性 — Morera 定理: 设全纯函数列 f_n 在 Ω 的任意紧子集上都一致收敛到 f , 则 f 在 Ω 上全纯; Hurwitz 定理: 设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是连通开集, f_n 是 Ω 上的单的全纯映射, 内闭一致收敛到 f , 则 f 或者是单射, 或者是常数函数. (用以保证极大化序列的极限仍是单射.)

4) 证明变分问题的解 f 是所求的 Riemann 双全纯映射

- 开映射定理: 设 f 是区域 Ω 上的非常数值的全纯函数, 则 f 是开映射 (把开集映为开集). 结合隐函数定理, 只需证明 f 是满射;
- 反证法. 用到 Schwarz 引理: 设 $f: B_1(0) \rightarrow B_1(0)$ 是全纯映射, 且 $f(0) = 0$. 则
 - i) $\forall z \in B_1(0), |f(z)| \leq |z|$; ii) 若对某个 $z_0 \neq 0$ 成立 $|f(z_0)| = |z_0|$, 则 f 是个旋转;
 - iii) $|f'(0)| \leq 1$, 且若等号成立, f 必然是个旋转.

参考: Stein, Elias M.; Shakarchi, Rami. Complex analysis. Princeton Lectures in Analysis, 2. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. (Chapter 8)

3) 变分法直接方法—最大值点的存在性

- 近似解存在性 — 由Cauchy 导数公式, 当 $f \in \mathcal{A}$ 时 $f'(0)$ 一致有界, 从而由确界原理, 上确界 $s = \sup_{f \in \mathcal{A}} L[f]$ 有限, 存在极大序列 $\{f_n\} \subset \mathcal{A}$ 使得 $|f'_n(0)| \rightarrow s$ ($n \rightarrow \infty$).
- 紧性 — Montel 定理: Ω 上一致有界的全纯函数列必有子列在 Ω 的任意紧子集上一致收敛 (内闭一致收敛); 完备性 — Morera 定理: 设全纯函数列 f_n 在 Ω 的任意紧子集上都一致收敛到 f , 则 f 在 Ω 上全纯; Hurwitz 定理: 设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是连通开集, f_n 是 Ω 上的单的全纯映射, 内闭一致收敛到 f , 则 f 或者是单射, 或者是常数函数. (用以保证极大化序列的极限仍是单射.)

4) 证明变分问题的解 f 是所求的 Riemann 双全纯映射

- 开映射定理: 设 f 是区域 Ω 上的非常数值的全纯函数, 则 f 是开映射 (把开集映为开集). 结合隐函数定理, 只需证明 f 是满射;
- 反证法. 用到 Schwarz 引理: 设 $f: B_1(0) \rightarrow B_1(0)$ 是全纯映射, 且 $f(0) = 0$. 则
 - i) $\forall z \in B_1(0), |f(z)| \leq |z|$; ii) 若对某个 $z_0 \neq 0$ 成立 $|f(z_0)| = |z_0|$, 则 f 是个旋转;
 - iii) $|f'(0)| \leq 1$, 且若等号成立, f 必然是个旋转.

参考: Stein, Elias M.; Shakarchi, Rami. Complex analysis. Princeton Lectures in Analysis, 2. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. (Chapter 8)

3) 变分法直接方法—最大值点的存在性

- 近似解存在性 — 由Cauchy 导数公式, 当 $f \in \mathcal{A}$ 时 $f'(0)$ 一致有界, 从而由确界原理, 上确界 $s = \sup_{f \in \mathcal{A}} L[f]$ 有限, 存在极大序列 $\{f_n\} \subset \mathcal{A}$ 使得 $|f'_n(0)| \rightarrow s$ ($n \rightarrow \infty$).
- 紧性 — Montel 定理: Ω 上一致有界的全纯函数列必有子列在 Ω 的任意紧子集上一致收敛 (内闭一致收敛); 完备性 — Morera 定理: 设全纯函数列 f_n 在 Ω 的任意紧子集上都一致收敛到 f , 则 f 在 Ω 上全纯; Hurwitz 定理: 设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是连通开集, f_n 是 Ω 上的单的全纯映射, 内闭一致收敛到 f , 则 f 或者是单射, 或者是常数函数. (用以保证极大化序列的极限仍是单射.)

4) 证明变分问题的解 f 是所求的 Riemann 双全纯映射

- 开映射定理: 设 f 是区域 Ω 上的非常数值的全纯函数, 则 f 是开映射 (把开集映为开集). 结合隐函数定理, 只需证明 f 是满射;
- 反证法. 用到 Schwarz 引理: 设 $f: B_1(0) \rightarrow B_1(0)$ 是全纯映射, 且 $f(0) = 0$. 则
 - i) $\forall z \in B_1(0), |f(z)| \leq |z|$; ii) 若对某个 $z_0 \neq 0$ 成立 $|f(z_0)| = |z_0|$, 则 f 是个旋转;
 - iii) $|f'(0)| \leq 1$, 且若等号成立, f 必然是个旋转.

3) 变分法直接方法—最大值点的存在性

- 近似解存在性 — 由Cauchy 导数公式, 当 $f \in \mathcal{A}$ 时 $f'(0)$ 一致有界, 从而由确界原理, 上确界 $s = \sup_{f \in \mathcal{A}} L[f]$ 有限, 存在极大序列 $\{f_n\} \subset \mathcal{A}$ 使得 $|f'_n(0)| \rightarrow s$ ($n \rightarrow \infty$).
- 紧性 — Montel 定理: Ω 上一致有界的全纯函数列必有子列在 Ω 的任意紧子集上一致收敛 (内闭一致收敛); 完备性 — Morera 定理: 设全纯函数列 f_n 在 Ω 的任意紧子集上都一致收敛到 f , 则 f 在 Ω 上全纯; Hurwitz 定理: 设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是连通开集, f_n 是 Ω 上的单的全纯映射, 内闭一致收敛到 f , 则 f 或者是单射, 或者是常数函数. (用以保证极大化序列的极限仍是单射.)

4) 证明变分问题的解 f 是所求的 Riemann 双全纯映射

- 开映射定理: 设 f 是区域 Ω 上的非常数值的全纯函数, 则 f 是开映射 (把开集映为开集). 结合隐函数定理, 只需证明 f 是满射;
- 反证法. 用到 Schwarz 引理: 设 $f: B_1(0) \rightarrow B_1(0)$ 是全纯映射, 且 $f(0) = 0$. 则
 - i) $\forall z \in B_1(0), |f(z)| \leq |z|$; ii) 若对某个 $z_0 \neq 0$ 成立 $|f(z_0)| = |z_0|$, 则 f 是个旋转;
 - iii) $|f'(0)| \leq 1$, 且若等号成立, f 必然是个旋转.

3) 变分法直接方法—最大值点的存在性

- 近似解存在性 — 由Cauchy 导数公式, 当 $f \in \mathcal{A}$ 时 $f'(0)$ 一致有界, 从而由确界原理, 上确界 $s = \sup_{f \in \mathcal{A}} L[f]$ 有限, 存在极大序列 $\{f_n\} \subset \mathcal{A}$ 使得 $|f'_n(0)| \rightarrow s$ ($n \rightarrow \infty$).
- 紧性 — Montel 定理: Ω 上一致有界的全纯函数列必有子列在 Ω 的任意紧子集上一致收敛 (内闭一致收敛); 完备性 — Morera 定理: 设全纯函数列 f_n 在 Ω 的任意紧子集上都一致收敛到 f , 则 f 在 Ω 上全纯; Hurwitz 定理: 设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是连通开集, f_n 是 Ω 上的单的全纯映射, 内闭一致收敛到 f , 则 f 或者是单射, 或者是常数函数. (用以保证极大化序列的极限仍是单射.)

4) 证明变分问题的解 f 是所求的 Riemann 双全纯映射

- 开映射定理: 设 f 是区域 Ω 上的非常数值的全纯函数, 则 f 是开映射 (把开集映为开集). 结合隐函数定理, 只需证明 f 是满射;
- 反证法. 用到 Schwarz 引理: 设 $f: B_1(0) \rightarrow B_1(0)$ 是全纯映射, 且 $f(0) = 0$. 则
 - i) $\forall z \in B_1(0), |f(z)| \leq |z|$; ii) 若对某个 $z_0 \neq 0$ 成立 $|f(z_0)| = |z_0|$, 则 f 是个旋转;
 - iii) $|f'(0)| \leq 1$, 且若等号成立, f 必然是个旋转.

参考: Stein, Elias M.; Shakarchi, Rami. Complex analysis. Princeton Lectures in Analysis, 2. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. (Chapter 8)

变分方程 (Euler-Lagrange 方程及其弱解形式)

- 复习 (重要! 散度定理: 1831 年, Ostrogradsky)
 - 散度定理: $\int_{\Omega} \operatorname{div} V(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} V(x) \cdot \nu(x) \, d\sigma(x)$, $\nu(x)$ 为 $x \in \partial\Omega$ 处的外单位法向; $d\sigma$ 为曲面 $\partial\Omega$ 的面积元 (Hausdorff 测度); $V(x) \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$.
 - 设 $G \in C^1(\Omega)$, 则 $\operatorname{div}(GV) = G \operatorname{div} V + DG \cdot V \Rightarrow$ 分部积分公式
$$\int_{\Omega} V(x) \cdot DG(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} G(x) V(x) \cdot \nu(x) \, d\sigma(x) - \int_{\Omega} G(x) \operatorname{div} V(x) \, dx.$$
- 泛函: $J(w) \doteq \int_{\Omega} F(x, w(x), Dw(x)) \, dx$, 其中 $F: (x, z, p) \rightarrow \mathbb{R}$, $F \in C^1$ 已给定.

- 计算一阶变分: 设 $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$, 则 (含参变量积分求导)

$$\begin{aligned} J'(u)v &= \left. \frac{d}{dt} \int_{\Omega} F(x, u(x) + tv(x), Du(x) + tDv(x)) dx \right|_{t=0} \\ &= \int_{\Omega} \left[F_z(x, u(x), Du(x))v(x) + \langle F_p(x, u(x), Du(x)), Dv(x) \rangle \right] dx \\ &\quad \xrightarrow[\text{第二项用分部积分}]{\text{设 } F, u \in C^2} \\ &= \int_{\Omega} \left[F_z(x, u(x), Du(x)) - \operatorname{div} F_p(x, u(x), Du(x)) \right] v(x) dx \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} v(x) F_p(x, u(x), Du(x)) \cdot \nu(x) d\sigma(x) \quad (\diamond) \end{aligned}$$

- 拟线性方程的 Dirichlet 问题: $\mathcal{A} = \{w \in C^2(\bar{\Omega}) : w(x) = \varphi(x), \forall x \in \partial\Omega\} \Rightarrow V = \{v \in C^2(\bar{\Omega}) : v(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega\} \Rightarrow (\text{边界项为零})$

- 弱解:
$$\int_{\Omega} [F_z(x, u(x), Du(x))v(x) + \langle F_p(x, u(x), Du(x)), Dv(x) \rangle] dx = 0, \forall v \in V.$$

- 经典解:
$$F_z(x, u(x), Du(x)) - \operatorname{div} F_p(x, u(x), Du(x)) = 0 \text{ in } \Omega, u = \varphi(x) \text{ on } \partial\Omega.$$

- (◇) 中去积分号 (整体到局部) 的关键点: 利用 v 的任意性, 设 $f \in C(\bar{\Omega})$, $\int_{\Omega} f v dx = 0, \forall v \in V \Rightarrow f \equiv 0$. (难点 — 构造恰当的 v , 由简到繁. (i) $\Omega = \mathbb{R}$ 时, 对 $x \in (-1, 1)$ 定义 $\tilde{v}(x) = (1 - x^2)^3$; 对 $|x| \geq 1$, 定义 $\tilde{v} \equiv 0$, 则 $\tilde{v} \in C^2(\mathbb{R})$. (ii) 一般情形: 设在 $B_R(\hat{x}) \subset \Omega$ 上 $f > \epsilon > 0$, 取 $v(x) = \tilde{v}(\frac{|x - \hat{x}|}{R})$.)

- 拟线性方程的 Dirichlet 问题: $\mathcal{A} = \{w \in C^2(\bar{\Omega}) : w(x) = \varphi(x), \forall x \in \partial\Omega\} \Rightarrow V = \{v \in C^2(\bar{\Omega}) : v(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega\} \Rightarrow (\text{边界项为零})$

- 弱解:
$$\int_{\Omega} [F_z(x, u(x), Du(x))v(x) + \langle F_p(x, u(x), Du(x)), Dv(x) \rangle] dx = 0, \forall v \in V.$$

- 经典解:
$$F_z(x, u(x), Du(x)) - \operatorname{div} F_p(x, u(x), Du(x)) = 0 \text{ in } \Omega, u = \varphi(x) \text{ on } \partial\Omega.$$

- (◇) 中去积分号 (整体到局部) 的关键点: 利用 v 的任意性, 设 $f \in C(\bar{\Omega})$, $\int_{\Omega} f v dx = 0, \forall v \in V \Rightarrow f \equiv 0$. (难点 — 构造恰当的 v , 由简到繁. (i) $\Omega = \mathbb{R}$ 时, 对 $x \in (-1, 1)$ 定义 $\tilde{v}(x) = (1 - x^2)^3$; 对 $|x| \geq 1$, 定义 $\tilde{v} \equiv 0$, 则 $\tilde{v} \in C^2(\mathbb{R})$. (ii) 一般情形: 设在 $B_R(\hat{x}) \subset \Omega$ 上 $f > \epsilon > 0$, 取 $v(x) = \tilde{v}(\frac{|x - \hat{x}|}{R})$.)

- 拟线性方程的 Dirichlet 问题: $\mathcal{A} = \{w \in C^2(\bar{\Omega}) : w(x) = \varphi(x), \forall x \in \partial\Omega\} \Rightarrow V = \{v \in C^2(\bar{\Omega}) : v(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega\} \Rightarrow (\text{边界项为零})$

- 弱解:
$$\int_{\Omega} [F_z(x, u(x), Du(x))v(x) + \langle F_p(x, u(x), Du(x)), Dv(x) \rangle] dx = 0, \forall v \in V.$$

- 经典解:
$$F_z(x, u(x), Du(x)) - \operatorname{div} F_p(x, u(x), Du(x)) = 0 \text{ in } \Omega, u = \varphi(x) \text{ on } \partial\Omega.$$

- (◇) 中去积分号 (整体到局部) 的关键点: 利用 v 的任意性, 设 $f \in C(\bar{\Omega})$, $\int_{\Omega} f v dx = 0, \forall v \in V \Rightarrow f \equiv 0$. (难点 — 构造恰当的 v , 由简到繁. (i) $\Omega = \mathbb{R}$ 时, 对 $x \in (-1, 1)$ 定义 $\tilde{v}(x) = (1 - x^2)^3$; 对 $|x| \geq 1$, 定义 $\tilde{v} \equiv 0$, 则 $\tilde{v} \in C^2(\mathbb{R})$. (ii) 一般情形: 设在 $B_R(\hat{x}) \subset \Omega$ 上 $f > \epsilon > 0$, 取 $v(x) = \tilde{v}(\frac{|x - \hat{x}|}{R})$.)

- 拟线性方程的 Neumann 问题: $\mathcal{A} = \{w \in C^2(\bar{\Omega})\}$, 测试函数空间仍然是 $\mathcal{A}$.

- 弱解:
$$\int_{\Omega} [F_z(x, u(x), Du(x)) \nu(x) + \langle F_p(x, u(x), Du(x)), D\nu(x) \rangle] dx = 0, \forall \nu \in \mathcal{A}$$
 (注意与 Dirichlet 问题的区别: 测试函数 ν 范围不同).

- 经典解:

$$F_z(x, u(x), Du(x)) - \operatorname{div} F_p(x, u(x), Du(x)) = 0 \text{ in } \Omega, \quad \langle F_p(x, u(x), Du(x)), \nu(x) \rangle = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

- 去积分号: 先取 $\nu \in V \subset \mathcal{A}$, 再取 $\nu \in \mathcal{A}$.

凸泛函的变分问题与散度形拟线性椭圆型方程

- 泛函: $J(w) \doteq \int_{\Omega} F(x, w(x), Dw(x)) \, dx$;
- E-L 方程: $F_z(x, u(x), Du(x)) - \operatorname{div} F_p(x, u(x), Du(x)) = 0$. 链式法则 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F_p(x, u(x), Du(x)) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial F}{\partial p_i}(x, u(x), Du(x)) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial p_i}(x, u(x), Du(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial p_i}(x, u(x), Du(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right) \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j}(x, u(x), Du(x)) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x). \end{aligned}$$

- 结论 — $F : (x, z, p) \rightarrow \mathbb{R}$ 关于变量 p 凸, $F \in C^2 \Rightarrow$ 实对称阵 $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j}(x, u(x), Du(x)) \right)_{n \times n}$ 正定 $\Rightarrow$ EL 方程是椭圆型的.

- 例和习题

- Poisson 方程 (练习): $F(x, z, p) = \frac{1}{2}|p|^2 - zf(x) \Rightarrow$ (EL): $-\Delta u(x) = f(x)$.

- 极小曲面方程 (练习): 函数 $z = w(x)$ ($x \in \Omega$) 的图像作为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的曲面, 其面积是

$$J(w) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Dw(x)|^2} dx \Rightarrow \text{(EL): } \sum_{i=1}^n D_i \left(\frac{D_i u}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = 0.$$

- 欧氏空间到球面的调和映照 (harmonic map) — Dirichlet 泛函的推广: $\mathcal{E}(u) \doteq \int_{\Omega} |Du|^2 dx$, 容许集 $\mathcal{A} = \{u \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^m) : |u| = 1 \text{ in } \Omega, u = g \text{ on } \partial\Omega\} \Rightarrow$
(EL 方程)-(二阶椭圆组): $\Delta u + |Du|^2 u = 0$ (带约束的极值问题, 要用 Lagrange 乘子法).

- 结论 — $F : (x, z, p) \rightarrow \mathbb{R}$ 关于变量 p 凸, $F \in C^2 \Rightarrow$ 实对称阵 $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j}(x, u(x), Du(x)) \right)_{n \times n}$ 正定 $\Rightarrow$ EL 方程是椭圆型的.

- 例和习题

- Poisson 方程 (练习): $F(x, z, p) = \frac{1}{2}|p|^2 - zf(x) \Rightarrow$ (EL): $-\Delta u(x) = f(x)$.

- 极小曲面方程 (练习): 函数 $z = w(x)$ ($x \in \Omega$) 的图像作为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的曲面, 其面积是

$$J(w) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Dw(x)|^2} dx \Rightarrow \text{(EL): } \sum_{i=1}^n D_i \left(\frac{D_i u}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = 0.$$

- 欧氏空间到球面的调和映照 (harmonic map) — Dirichlet 泛函的推广: $\mathcal{E}(u) \doteq \int_{\Omega} |Du|^2 dx$, 容许集 $\mathcal{A} = \{u \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^m) : |u| = 1 \text{ in } \Omega, u = g \text{ on } \partial\Omega\} \Rightarrow$
(EL 方程)-(二阶椭圆组): $\Delta u + |Du|^2 u = 0$ (带约束的极值问题, 要用 Lagrange 乘子法).

- 结论 — $F : (x, z, p) \rightarrow \mathbb{R}$ 关于变量 p 凸, $F \in C^2 \Rightarrow$ 实对称阵 $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j}(x, u(x), Du(x)) \right)_{n \times n}$ 正定 $\Rightarrow$ EL 方程是椭圆型的.

- 例和习题

- Poisson 方程 (练习): $F(x, z, p) = \frac{1}{2}|p|^2 - zf(x) \Rightarrow$ (EL): $-\Delta u(x) = f(x)$.
- 极小曲面方程 (练习): 函数 $z = w(x)$ ($x \in \Omega$) 的图像作为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的曲面, 其面积是 $J(w) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Dw(x)|^2} dx \Rightarrow$ (EL): $\sum_{i=1}^n D_i \left(\frac{D_i u}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = 0$.
- 欧氏空间到球面的调和映照 (harmonic map) — Dirichlet 泛函的推广: $\mathcal{E}(u) \doteq \int_{\Omega} |Du|^2 dx$, 容许集 $\mathcal{A} = \{u \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^m) : |u| = 1 \text{ in } \Omega, u = g \text{ on } \partial\Omega\} \Rightarrow$ (EL 方程)-(二阶椭圆组): $\Delta u + |Du|^2 u = 0$ (带约束的极值问题, 要用 Lagrange 乘子法).

梯度流与隐式 Euler 格式

- 梯度流系统: $\frac{dX(t)}{dt} = -E'(X(t))$ (这里 $E'(X)$ 是泛函 E 在 X 处的变分 — Gâteaux 导数), 例:
 - 热方程 $\rho_t = \Delta \rho$, 梯度流结构对应泛函: $E(\rho) = \int \rho \ln \rho$ (Boltzmann H-函数, 负熵); 或 $E(\rho) = \int |\mathrm{D}\rho|^2 \, \mathrm{d}x$
 - 线性 Fokker-Planck 方程 $\rho_t = \Delta \rho + \nabla \cdot (\rho \nabla V)$, 梯度流结构对应泛函: $E(\rho) = \int \rho \ln \rho + \int \rho V$
 - 多孔介质 (porous medium) 方程 $\rho_t = \Delta \rho^m$, 梯度流结构对应泛函: $E(\rho) = \frac{1}{m-1} \int \rho^m$
 - McKean-Vlasov 方程 $\rho_t = \nabla \cdot (\rho \nabla (\rho * W))$, 梯度流结构对应泛函: $E(\rho) = \frac{1}{2} \int \rho(x) \rho(y) W(x-y) \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y$
- 时间半离散隐式 Euler 格式: 对任意固定的 $\tau > 0$, 求解 X_τ^{n+1} 使得
$$\frac{X_\tau^{n+1} - X_\tau^n}{\tau} = -E'(X_\tau^{n+1})$$
 - 利用变分问题 $\min_X \left[E(X) + \frac{|X_\tau^n - X|^2}{2\tau} \right]$ 求出 X_τ^{n+1}
 - 构造近似解: $X_\tau(t) = X_\tau^n$, 若 $t \in [n\tau, (n+1)\tau)$. 在适当函数 (测度) 空间中证明 $\tau_k \rightarrow 0+$ 时近似解序列 $\{X_{\tau_k}\}$ 有极限

常用函数空间

- 连续可微函数空间 $C^k(\Omega)$ (椭圆型、抛物型方程, 极值原理), Lipschitz 空间 $C^{k,1}(\Omega)$ (ODE)
- Hölder 空间 $C^{k,\alpha}(\Omega)$ ($0 < \alpha < 1$) (椭圆型、抛物型方程, Schauder 理论)
- $L^p(\Omega)$ ($1 \leq p \leq \infty$) ($L^2(\Omega)$ 是 Hilbert 空间)
- Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega), W_0^{k,p}(\Omega)$ $k = 1, 2, \dots, p \in [1, \infty]$, 其中 $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ 和 $W_0^{k,p}(\Omega)$ 是 Hilbert 空间; 负指数 Sobolev 空间 $H^{-1}(\Omega) = H_0^1(\Omega)^*$ 及其推广 $W^{-k,p'}(\Omega) = W_0^{k,p}(\Omega)$ ($\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$)
- 时空-Sobolev 空间 $L^p([0, T]; W^{k,p}(\Omega)), C^j([0, T]; W^{k,p}(\Omega)), W^{1,q}([0, T]; W^{k,p}(\Omega))$ 等
- Besov 空间和 Triebel 空间 (用 Fourier 变换和空间插值定义)
- 有界变差函数空间 (双曲守恒律方程、激波)
- 测度空间 (带 Wasserstein 度量的概率测度空间等)
- 关注的性质: 完备性; 紧性和 (弱) 紧性 (自反性)[致密性定理; Ascoli-Arzelà 引理; Montel 定理; Harnack 定理; Rellich 紧嵌入定理等]; 光滑函数的稠密性; 延拓和限制 (迹定理); 嵌入定理 (各类空间之间的关系); 坐标变换下的不变性等 (定义流形上函数空间及纤维丛)

时间周期解与稳态解, 分离变量法 $\Rightarrow$ 椭圆型方程

● 周期解: Schrödinger 方程 (1926 年)

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{x}) \right] \psi(\mathbf{x}, t)$$

- $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ — 波函数 (概率密度函数: $\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} = 1$)
- 在 $U \subset \mathbb{R}^3$ 中发现电子的概率: $\int_U |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x}$; 电子的平均 (期望) 位置
 $\bar{\mathbf{x}} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{x} |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x}$
- $V(\mathbf{x}) = -\frac{e^2}{|\mathbf{x}|}$: 位于原点的氢原子核的势阱 (Columb 定律: $\mathbf{F} = -Ce^2 \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$, $-\nabla V(\mathbf{x}) = \mathbf{F}$.)
- 记 $r = |\mathbf{x}|$, 作尺度变换 (重新选取量纲) 使得 $e = m = \hbar = 1 \Rightarrow \mathrm{i}\psi_t = -\frac{1}{2}\Delta\psi - \frac{1}{r}\psi$
- 分离变量:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = T(t)v(\mathbf{x}) \Rightarrow 2\mathrm{i}\frac{T'}{T} = \frac{-\Delta v - \frac{2}{r}v}{v} (= \lambda) \Rightarrow \begin{cases} T(t) = e^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\lambda t} (\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R} \text{ 时有时间周期解,}) \\ -\Delta v - \frac{2}{r}v = \lambda v. \end{cases}$$

- 温度的稳态分布: $u_t - \Delta u = f(x) \Rightarrow -\Delta u = f(x)$; 与时间无关的外力作用下膜的平衡位置: $u_{tt} - \Delta u = f(x) \Rightarrow -\Delta u = f(x)$
- (气体动力学) 定常亚音等熵无旋流: $\left(1 - \frac{\gamma-1}{2} |\mathbf{Du}|^2\right) \Delta u - D_i u D_j u D_{ij} u = 0$
($\gamma > 1$, 当 $|\mathbf{Du}| < [2/(\gamma+1)]^{1/2}$ 时是椭圆型的;
 $[2/(\gamma+1)]^{1/2} < |\mathbf{Du}| < [2/(\gamma-1)]^{1/2}$ 时是双曲型的, ($\mathbf{Du}$ 代表流速,
 $\rho \doteq \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} |\mathbf{Du}|^2\right)^{1/(\gamma-1)}$ 代表气流密度)
- 分离变量法: $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, u(x, t) = v(x)T(t) \Rightarrow T'' + a^2 k^2 T = 0, \Delta v + k^2 v = 0$
(Helmholtz 方程)

- 温度的稳态分布: $u_t - \Delta u = f(x) \Rightarrow -\Delta u = f(x)$; 与时间无关的外力作用下膜的平衡位置: $u_{tt} - \Delta u = f(x) \Rightarrow -\Delta u = f(x)$
- (气体动力学) 定常亚音等熵无旋流: $\left(1 - \frac{\gamma-1}{2} |\mathbf{Du}|^2\right) \Delta u - D_i u D_j u D_{ij} u = 0$
($\gamma > 1$, 当 $|\mathbf{Du}| < [2/(\gamma + 1)]^{1/2}$ 时是椭圆型的;
 $[2/(\gamma + 1)]^{1/2} < |\mathbf{Du}| < [2/(\gamma - 1)]^{1/2}$ 时是双曲型的, ($\mathbf{Du}$ 代表流速,
 $\rho \doteq \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} |\mathbf{Du}|^2\right)^{1/(\gamma-1)}$ 代表气流密度)
- 分离变量法: $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, u(x, t) = v(x)T(t) \Rightarrow T'' + a^2 k^2 T = 0, \Delta v + k^2 v = 0$
(Helmholtz 方程)

- 温度的稳态分布: $u_t - \Delta u = f(x) \Rightarrow -\Delta u = f(x)$; 与时间无关的外力作用下膜的平衡位置: $u_{tt} - \Delta u = f(x) \Rightarrow -\Delta u = f(x)$
- (气体动力学) 定常亚音等熵无旋流: $\left(1 - \frac{\gamma-1}{2} |\mathbf{Du}|^2\right) \Delta u - D_i u D_j u D_{ij} u = 0$
($\gamma > 1$, 当 $|\mathbf{Du}| < [2/(\gamma + 1)]^{1/2}$ 时是椭圆型的;
 $[2/(\gamma + 1)]^{1/2} < |\mathbf{Du}| < [2/(\gamma - 1)]^{1/2}$ 时是双曲型的, ($\mathbf{Du}$ 代表流速,
 $\rho \doteq \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} |\mathbf{Du}|^2\right)^{1/(\gamma-1)}$ 代表气流密度)
- 分离变量法: $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, u(x, t) = v(x)T(t) \Rightarrow T'' + a^2 k^2 T = 0, \Delta v + k^2 v = 0$
(Helmholtz 方程)

Newton 万有引力定律 $\Rightarrow$ 椭圆型方程; 能量泛函

- 引力位势 — Newton 万有引力定律 (1687 年)

- 质点情形: 在原点的质量为 M 的质点产生的引力场强度是 (设万有引力常数为 G)

$F(x) = -G \frac{M}{|x|^3} x$ (向量场). 引入位势函数 $V(x) = -\frac{GM}{|x|}$ (标量场. Lagrange, 1777 年), 则 $-DV(x) = F(x)$.

- 连续分布情形 (叠加原理): 设物体占据 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, 其质量分布 (密度函数) 为 $\rho(x)$, 则 Ω 产生的引力势为 $V(x) = -G \int_{\Omega} \frac{\rho(y) dy}{|x-y|}$ (Newton 位势)

*(练习) 计算: 当 $x \notin \Omega$ 时, 有 $\Delta V(x) = 0$. [1789 年, Laplace 提出 Laplace 方程; 1813 年, Poisson 提出 Poisson 方程, 将不规则物体的万有引力的计算化为标准的 PDE 问题]

* 若 $\rho \in C^\alpha(\Omega)$ ($0 < \alpha < 1$), 则 $\forall x \in \Omega, \Delta V(x) = -4\pi G \rho(x)$ (奇异积分算子理论)

- 数学难点: Dirac 测度 (广义函数的概念和理论, L. Schwartz, 1945 年)

Newton 万有引力定律 $\Rightarrow$ 椭圆型方程; 能量泛函

- 引力位势 — Newton 万有引力定律 (1687 年)

- 质点情形: 在原点的质量为 M 的质点产生的引力场强度是 (设万有引力常数为 G)

$F(x) = -G \frac{M}{|x|^3} x$ (向量场). 引入位势函数 $V(x) = -\frac{GM}{|x|}$ (标量场. Lagrange, 1777 年), 则 $-DV(x) = F(x)$.

- 连续分布情形 (叠加原理): 设物体占据 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, 其质量分布 (密度函数) 为 $\rho(x)$, 则 Ω 产生的引力势为 $V(x) = -G \int_{\Omega} \frac{\rho(y) dy}{|x-y|}$ (Newton 位势)

*(练习) 计算: 当 $x \notin \Omega$ 时, 有 $\Delta V(x) = 0$. [1789 年, Laplace 提出 Laplace 方程; 1813 年, Poisson 提出 Poisson 方程, 将不规则物体的万有引力的计算化为标准的 PDE 问题]

* 若 $\rho \in C^\alpha(\Omega)$ ($0 < \alpha < 1$), 则 $\forall x \in \Omega, \Delta V(x) = -4\pi G \rho(x)$ (奇异积分算子理论)

- 数学难点: Dirac 测度 (广义函数的概念和理论, L. Schwartz, 1945 年)

Newton 万有引力定律 $\Rightarrow$ 椭圆型方程; 能量泛函

- 引力位势 — Newton 万有引力定律 (1687 年)

- 质点情形: 在原点的质量为 M 的质点产生的引力场强度是 (设万有引力常数为 G)

$F(x) = -G \frac{M}{|x|^3} x$ (向量场). 引入位势函数 $V(x) = -\frac{GM}{|x|}$ (标量场. Lagrange, 1777 年), 则 $-DV(x) = F(x)$.

- 连续分布情形 (叠加原理): 设物体占据 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, 其质量分布 (密度函数) 为 $\rho(x)$, 则 Ω 产生的引力势为 $V(x) = -G \int_{\Omega} \frac{\rho(y) dy}{|x-y|}$ (Newton 位势)

*(练习) 计算: 当 $x \notin \Omega$ 时, 有 $\Delta V(x) = 0$. [1789 年, Laplace 提出 Laplace 方程; 1813 年, Poisson 提出 Poisson 方程, 将不规则物体的万有引力的计算化为标准的 PDE 问题]

* 若 $\rho \in C^\alpha(\Omega)$ ($0 < \alpha < 1$), 则 $\forall x \in \Omega, \Delta V(x) = -4\pi G \rho(x)$ (奇异积分算子理论)

- 数学难点: Dirac 测度 (广义函数的概念和理论, L. Schwartz, 1945 年)

Newton 万有引力定律 $\Rightarrow$ 椭圆型方程; 能量泛函

- 引力位势 — Newton 万有引力定律 (1687 年)

- 质点情形: 在原点的质量为 M 的质点产生的引力场强度是 (设万有引力常数为 G)

$F(x) = -G \frac{M}{|x|^3} x$ (向量场). 引入位势函数 $V(x) = -\frac{GM}{|x|}$ (标量场. Lagrange, 1777 年), 则 $-DV(x) = F(x)$.

- 连续分布情形 (叠加原理): 设物体占据 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, 其质量分布 (密度函数) 为 $\rho(x)$, 则 Ω 产生的引力势为 $V(x) = -G \int_{\Omega} \frac{\rho(y) dy}{|x-y|}$ (Newton 位势)

*(练习) 计算: 当 $x \notin \Omega$ 时, 有 $\Delta V(x) = 0$. [1789 年, Laplace 提出 Laplace 方程; 1813 年, Poisson 提出 Poisson 方程, 将不规则物体的万有引力的计算化为标准的 PDE 问题]

* 若 $\rho \in C^\alpha(\Omega)$ ($0 < \alpha < 1$), 则 $\forall x \in \Omega, \Delta V(x) = -4\pi G \rho(x)$ (奇异积分算子理论)

- 数学难点: Dirac 测度 (广义函数的概念和理论, L. Schwartz, 1945 年)

Newton 万有引力定律 $\Rightarrow$ 椭圆型方程; 能量泛函

- 引力位势 — Newton 万有引力定律 (1687 年)

- 质点情形: 在原点的质量为 M 的质点产生的引力场强度是 (设万有引力常数为 G)

$F(x) = -G \frac{M}{|x|^3} x$ (向量场). 引入位势函数 $V(x) = -\frac{GM}{|x|}$ (标量场. Lagrange, 1777 年), 则 $-DV(x) = F(x)$.

- 连续分布情形 (叠加原理): 设物体占据 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, 其质量分布 (密度函数) 为 $\rho(x)$, 则 Ω 产生的引力势为 $V(x) = -G \int_{\Omega} \frac{\rho(y) dy}{|x-y|}$ (Newton 位势)

*(练习) 计算: 当 $x \notin \Omega$ 时, 有 $\Delta V(x) = 0$. [1789 年, Laplace 提出 Laplace 方程; 1813 年, Poisson 提出 Poisson 方程, 将不规则物体的万有引力的计算化为标准的 PDE 问题]

* 若 $\rho \in C^\alpha(\Omega)$ ($0 < \alpha < 1$), 则 $\forall x \in \Omega, \Delta V(x) = -4\pi G \rho(x)$ (奇异积分算子理论)

- 数学难点: Dirac 测度 (广义函数的概念和理论, L. Schwartz, 1945 年)

- 势能泛函 (PDE 能量积分方法, 重要): 质量为 $\rho(x) dx$ 的物体在位势为 $V(x)$ 的引力场中具有 的势能为 $\rho(x) dx V(x)$ $\xrightarrow{\Delta V(x) = -4\pi G \rho(x)}$ $\Rightarrow$ 系统总势能为
$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho(x) V(x) dx = -\frac{1}{4\pi G} \int_{\mathbb{R}^3} V(x) \Delta V(x) dx \xrightarrow[\text{假设 } \lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = 0, |Du| \text{ 有限}]{\text{分部积分公式}} = \frac{1}{4\pi G} \int_{\mathbb{R}^3} |DV(x)|^2 dx \text{ (Dirichlet 泛函)}$$

静电场 Gauss 定律 $\Rightarrow$ 椭圆型方程

- Coulomb 定律 (1785 年): 位于原点的静止点电荷 q (可正可负) 对位于 x 点的静止点电荷 q' (可正可负) 的电场力 $F = k \frac{qq'}{|x|^3} x$; q 产生的电场强度:
 $E = F/q' = k \frac{q}{|x|^3} x$; ($k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$) 叠加原理 (力合成的平行四边形法则, 力的独立作用原理 — 物理实验结论) $\Rightarrow$ 电荷密度 (单位体积的电荷数) 为 $\rho(x)$ 的物体 Ω 产生的电场 $E(y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{(y-x)\rho(x)}{|y-x|^3} dx$ (ϵ_0 — 真空的介电常数)

- 静电场电位势 — Gauss 定律 (1839 年): 设带电体 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 分布有电荷密度为 $\rho(x)$ 的电荷, Ω 产生的电场强度为 $E(x)$, 则由上述 Coulomb 定律 (对点电荷情形用散度定理验证, 再用叠加原理) $\Rightarrow$ Gauss 定律:

$$\iint_{\partial\Omega} E \cdot \nu \, d\sigma = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} \rho \, dx \xrightarrow[\text{散度定理}]{\Omega \text{任意性}} \operatorname{div} E(x) =$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x) \xrightarrow[\text{设电场无旋, 区域 } \Omega \text{ 单连通, 于是 } \exists u \text{ 使得 } E = -Du]{\Delta \doteq \operatorname{div} D} -\Delta u = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

- 电场能 (完全类比引力势能): $\int_{\Omega} |Du(x)|^2 dx$ ($\Rightarrow$ Sobolev 空间中边值问题解的唯一性和稳定性; Ω 上电场 E 的能量定义为 $\int_{\Omega} |E(x)|^2 dx$)
- 边界条件: i) Dirichlet ($u|_{\partial\Omega} = 0$) — 给定电压 (如接地); ii) Neumann ($\partial u / \partial \nu|_{\partial\Omega} = 0$) — 绝缘 (电场线无法穿过); iii) Robin ($\partial u / \partial \nu + hu|_{\partial\Omega} = 0$) — 不同导电介质界面
- 内区域/外区域 (一般来说, 无穷远处需要某种有界或极限存在条件)
- 极值原理: 不是常数的调和函数的最大值和最小值只能在区域边界取到 (热方程极值原理的特殊情形) $\Rightarrow$ Hölder 空间中经典解的唯一性和稳定性

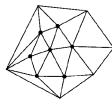
变分法及弱解的应用: 有限元法

- 典型问题: 在 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 中 $-\Delta u = f$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u = 0$.

弱解形式: $\int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \forall v \in C_c^1(\Omega)$ (v : 测试函数;

$C_c^1(\Omega)$: $\text{supp } u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}} \subset \Omega$ 是紧集且 $u \in C^1(\Omega)$. 这里 $\bar{V}$ 表示集合 $V \subset \mathbb{R}^2$ 的闭包.)

- 区域的三角剖分: 将 Ω 用 Ω_N 近似, 其中 Ω_N 是有限个不重叠的三角形组成的多边形区域, 其内顶点记为 $V_1, \dots, V_N$ (注意三角形个数多于 N)

 $N = 1$  $N = 7$

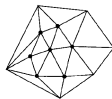
变分法及弱解的应用: 有限元法

- 典型问题: 在 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 中 $-\Delta u = f$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u = 0$.

弱解形式: $\int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \forall v \in C_c^1(\Omega)$ (v : 测试函数;

$C_c^1(\Omega)$: $\text{supp } u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}} \subset \Omega$ 是紧集且 $u \in C^1(\Omega)$. 这里 $\bar{V}$ 表示集合 $V \subset \mathbb{R}^2$ 的闭包.)

- 区域的三角剖分: 将 Ω 用 Ω_N 近似, 其中 Ω_N 是有限个不重叠的三角形组成的多边形区域, 其内顶点记为 $V_1, \dots, V_N$ (注意三角形个数多于 N)

 $N = 1$  $N = 7$

- 构建测试函数 $v_1(x), \dots, v_N(x)$: (i) v_k 在内顶点 V_k 取值为 1, 在与 V_k 相邻的顶点 (即与 V_k 通过一条三角形的边相连的顶点, 未必是内顶点) 处取值为零;
ii) 在每个以 V_k 为顶点的三角形内, $v_k(x) = ax_1 + bx_2 + c$, 由要求 i) 确定系数 a, b, c (对不同三角形, 系数 a, b, c 不同); iii) 再将 v_k 零延拓到全空间.

* 几何: $v_k(x)$ 的图像是以 $(V_k, 1)$ 为顶点 (高为 1), 以 V_k 相邻的那些三角形为底的多面体. v_k 由区域的三角剖分唯一确定.

* (注意 $v_k|_{\partial\Omega_N} = 0$. 但 $v_k \notin C^1$, 所以要说明 v_k 可以作为测试函数, 需要推广函数空间到 Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega)$, 保证弱解形式有效, 为此需要 $C_c^1(\Omega)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中稠密)

- 解的近似表示: $u_N(x) \doteq u_1 v_1(x) + \dots + u_N v_N(x)$ (分片线性函数, 其中常数 $u_1, \dots, u_N$ 待定)

- 构建测试函数 $v_1(x), \dots, v_N(x)$: (i) v_k 在内顶点 V_k 取值为 1, 在与 V_k 相邻的顶点 (即与 V_k 通过一条三角形的边相连的顶点, 未必是内顶点) 处取值为零;
ii) 在每个以 V_k 为顶点的三角形内, $v_k(x) = ax_1 + bx_2 + c$, 由要求 i) 确定系数 a, b, c (对不同三角形, 系数 a, b, c 不同); iii) 再将 v_k 零延拓到全空间.
* 几何: $v_k(x)$ 的图像是以 $(V_k, 1)$ 为顶点 (高为 1), 以 V_k 相邻的那些三角形为底的多面体. v_k 由区域的三角剖分唯一确定.
* (注意 $v_k|_{\partial\Omega_N} = 0$. 但 $v_k \notin C^1$, 所以要说明 v_k 可以作为测试函数, 需要推广函数空间到 Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega)$, 保证弱解形式有效, 为此需要 $C_c^1(\Omega)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中稠密)
- 解的近似表示: $u_N(x) \doteq u_1 v_1(x) + \dots + u_N v_N(x)$ (分片线性函数, 其中常数 $u_1, \dots, u_N$ 待定)

- 构建测试函数 $v_1(x), \dots, v_N(x)$: (i) v_k 在内顶点 V_k 取值为 1, 在与 V_k 相邻的顶点 (即与 V_k 通过一条三角形的边相连的顶点, 未必是内顶点) 处取值为零;
ii) 在每个以 V_k 为顶点的三角形内, $v_k(x) = ax_1 + bx_2 + c$, 由要求 i) 确定系数 a, b, c (对不同三角形, 系数 a, b, c 不同); iii) 再将 v_k 零延拓到全空间.
* 几何: $v_k(x)$ 的图像是以 $(V_k, 1)$ 为顶点 (高为 1), 以 V_k 相邻的那些三角形为底的多面体. v_k 由区域的三角剖分唯一确定.
* (注意 $v_k|_{\partial\Omega_N} = 0$. 但 $v_k \notin C^1$, 所以要说明 v_k 可以作为测试函数, 需要推广函数空间到 Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega)$, 保证弱解形式有效, 为此需要 $C_c^1(\Omega)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中稠密)
- 解的近似表示: $u_N(x) \doteq u_1 v_1(x) + \dots + u_N v_N(x)$ (分片线性函数, 其中常数 $u_1, \dots, u_N$ 待定)

- 构建测试函数 $v_1(x), \dots, v_N(x)$: (i) v_k 在内顶点 V_k 取值为 1, 在与 V_k 相邻的顶点 (即与 V_k 通过一条三角形的边相连的顶点, 未必是内顶点) 处取值为零;
ii) 在每个以 V_k 为顶点的三角形内, $v_k(x) = ax_1 + bx_2 + c$, 由要求 i) 确定系数 a, b, c (对不同三角形, 系数 a, b, c 不同); iii) 再将 v_k 零延拓到全空间.
* 几何: $v_k(x)$ 的图像是以 $(V_k, 1)$ 为顶点 (高为 1), 以 V_k 相邻的那些三角形为底的多面体. v_k 由区域的三角剖分唯一确定.
* (注意 $v_k|_{\partial\Omega_N} = 0$. 但 $v_k \notin C^1$, 所以要说明 v_k 可以作为测试函数, 需要推广函数空间到 Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega)$, 保证弱解形式有效, 为此需要 $C_c^1(\Omega)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中稠密)
- 解的近似表示: $u_N(x) \doteq u_1 v_1(x) + \dots + u_N v_N(x)$ (分片线性函数, 其中常数 $u_1, \dots, u_N$ 待定)

- 目标问题: $\int_{\Omega} \mathbf{D}u \cdot \mathbf{D}v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad (\clubsuit), \forall \text{ 测试函数 } v \in H_0^1(\Omega)$
- 近似解: $u_N(x) \doteq u_1 v_1(x) + \cdots + u_N v_N(x)$, 其中 $v_k \in H_0^1(\Omega)$. 注意: 在内顶点 V_k 处, $u_N(V_k) = u_k$.
- 将 $(\clubsuit)$ 中 u 换作 u_N , v 依次取为 v_j ($j = 1, 2, \dots, N$) $\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^N u_i \underbrace{\int_{\Omega_N} \mathbf{D}v_i \cdot \mathbf{D}v_j \, dx}_{\doteq m_{ij}} = \underbrace{\int_{\Omega_N} f v_j \, dx}_{\doteq f_j} \xrightarrow{\text{线性代数方程组}} \sum_{i=1}^N m_{ij} u_i = f_j, \quad j = 1, \dots, N$$

(m_{ij}) — 大型稀疏矩阵: 当 V_i, V_j 不相邻 (没有边相连) 时, $m_{ij} = 0$

● 有限元法的推广

- 矩形剖分; 用高阶多项式生成测试函数
- 发展型方程: i) 时间半离散化 — 结合前向或后向 Euler 格式, 将发展方程化为稳态方程问题; ii) 空间半离散化 — 用弱解形式, 但系数 u_k 依赖于 t , 化为 ODE 组 (Galerkin 方法)
- 例: $u_t = u_{xx} + f(x, t), t > 0, 0 < x < l; u(x, 0) = \phi(x); u(0, t) = u(l, t) = 0$ 弱解形式
$$\frac{d}{dt} \int_0^l uv \, dx = - \int_0^l u_x v_x \, dx + \int_0^l f(x, t) v(x) \, dx, \forall v \in H_0^1([0, l]);$$

设 $u(x, t) = \sum_{k=1}^N U_k(t) v_k(x) \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^N \left(\int_0^l v_i v_j \, dx \right) \frac{dU_i}{dt} = - \sum_{i=1}^N \left(\int_0^l v'_i(x) v'_j(x) \, dx \right) U_i(t) + \int_0^l f(x, t) v_j(x) \, dx, j = 1, \dots, N$$

习题 1. 设区域 Ω 上带齐次 Dirichlet 边界条件的 Poisson 方程 $-\Delta u = f$ 有一个解 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, 证明: 它是泛函 $J(w) = \int_{\Omega} (\frac{1}{2} |\mathbf{D}w|^2 - fw) \, dx$ 在容许集 $\{w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) : w|_{\partial\Omega} = 0\}$ 上的唯一的极小值点.

习题 2. 给定 $T > 0$ 和具紧支集的函数 $\phi, \psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 置 $\mathcal{A} = \{u \in C_c^2(\mathbb{R}^n \times [0, T]) : u(x, 0) = \phi(x), u(x, T) = \psi(x)\}$, 以及 $L(u)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2} |u_t(x, t)|^2 - \frac{1}{2} |\mathbf{D}u(x, t)|^2 \right) dx$. 证明: $\mathcal{A}$ 上的泛函 $S[u] = \int_0^T L(u)(t) \, dt$ 的 Euler-Lagrange 方程是波动方程 $u_{tt} - \Delta u = 0$.

阅读任务和作业

- 必读 — 郇中丹, 黄海洋: 偏微分方程 (第二版), 高等教育出版社, 2013. [pp.51–55; pp.195–197]
- 作业: p. 55: 3; p. 197: 1, 3, 4, 5.
- 参考文献

梯度流 Cédric Villani: Topics in optimal transportation, second edition. (最优输运理论专题, 第二版). 高等教育出版社, 2017. [§8.3, §8.4]

- 变分法
- 季孝达, 薛兴恒, 陆英, 宋立功: 数学物理方程 (第二版), 科学出版社, 2009. [第 6 章]
 - Evans, Lawrence C. Partial Differential Equations. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. [第 8 章]
 - Walter Craig: A Course on Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics, 197. American Mathematical Society, Providence, RI, 2018. [§6.6]

有限元法 Strauss, Walter A. Partial Differential Equations. An Introduction. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992. (Second edition, 2008.) [§8.5]

最后更新: 2022-11-14

偏微分方程

第八讲 Poisson 方程与 Newton 位势

袁海荣 (华东师范大学 数学科学学院)

2022 年 10 月 18 日

很多中国的小孩看不到数学最精华的地方, 认为只要将题目做对、将考试考好, 就很高兴. 但数学的真谛不是做题、特别不是做别人出的题, 而是要自己发掘好的研究方向、好的问题, 走出一条自己的路.

——丘成桐

学习要点

- 熟练掌握散度定理、Green 公式和“挖洞”技巧
- 熟练掌握 Laplace 算子的基本解 (具体表达式, 验证)
- 理解第二 Green 公式体现的对偶思想
- 了解验证 Newton 位势是 Poisson 方程特解的分析技巧
- 初步了解广义函数及其意义

散度定理和 Green 公式

● 散度定理 (1831 年, Ostrogradsky)

- 散度定理:
$$\int_{\Omega} \operatorname{div} V(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} V(x) \cdot \mathbf{n}(x) \, d\sigma(x)$$
, $\mathbf{n}(x)$ 为 $x \in \partial\Omega$ 处的外单位法向; $d\sigma$ 为

曲面 $\partial\Omega$ 的面积元 (Hausdorff 测度); 向量场 $V(x) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. 设函数

$g \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, 则 $\operatorname{div}(gV) = g \operatorname{div} V + Dg \cdot V \Rightarrow$

- 分部积分公式:
$$\int_{\Omega} V(x) \cdot Dg(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} g(x) V(x) \cdot \mathbf{n}(x) \, d\sigma(x) - \int_{\Omega} g(x) \operatorname{div} V(x) \, dx$$

[意义: 对不连续函数、测度等定义弱导数的理论基础]

● 第一 Green 公式 (1828 年):

$$\int_{\Omega} u(x) \Delta v(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(y) \, d\sigma(y) - \int_{\Omega} Du(x) \cdot Dv(x) \, dx$$

(对 $V = Dv$, $g = u$ 用分部积分公式; $\Delta v = \operatorname{div} Dv$.) 意义: 定义边值问题的弱解, 用 Hilbert 空间的 Riesz 表示定

理求出 Sobolev 空间 H^1 中的弱解 (变分方法)

散度定理和 Green 公式

● 散度定理 (1831 年, Ostrogradsky)

- 散度定理:
$$\int_{\Omega} \operatorname{div} V(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} V(x) \cdot \mathbf{n}(x) \, d\sigma(x)$$
, $\mathbf{n}(x)$ 为 $x \in \partial\Omega$ 处的外单位法向; $d\sigma$ 为

曲面 $\partial\Omega$ 的面积元 (Hausdorff 测度); 向量场 $V(x) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. 设函数

$g \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, 则 $\operatorname{div}(gV) = g \operatorname{div} V + Dg \cdot V \Rightarrow$

- 分部积分公式:
$$\int_{\Omega} V(x) \cdot Dg(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} g(x) V(x) \cdot \mathbf{n}(x) \, d\sigma(x) - \int_{\Omega} g(x) \operatorname{div} V(x) \, dx$$

[意义: 对不连续函数、测度等定义弱导数的理论基础]

● 第一 Green 公式 (1828 年):

$$\int_{\Omega} u(x) \Delta v(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(y) \, d\sigma(y) - \int_{\Omega} Du(x) \cdot Dv(x) \, dx$$

(对 $V = Dv$, $g = u$ 用分部积分公式; $\Delta v = \operatorname{div} Dv$.) 意义: 定义边值问题的弱解, 用 Hilbert 空间的 Riesz 表示定理求出 Sobolev 空间 H^1 中的弱解 (变分方法)

- 第二 Green 公式:

$$\int_{\Omega} u(x) \Delta v(x) \, dx - \int_{\Omega} v(x) \Delta u(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(y) \, d\sigma(y) - \int_{\partial\Omega} v(y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) \, d\sigma(y)$$

(第一 Green 公式中交换 u, v ; 原式与所得式相减.)

- 第二 Green 公式的意义 — 适当边界条件下 Δ 是 Hilbert 空间 (如 $H_0^1(\Omega)$ 或 $H^1(\Omega)$) 上的自伴算子 ($\Rightarrow$ 泛函分析中自伴紧算子的谱理论 — (应用于其逆算子 Δ^{-1})) 设 u, v 都是下列问题的解

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_{\Omega} u(x) \Delta v(x) \, dx = \int_{\Omega} v(x) \Delta u(x) \, dx \Rightarrow \langle \Delta u, v \rangle = \langle u, \Delta v \rangle \text{ (类比实对称阵)}$$

● 第二 Green 公式:

$$\int_{\Omega} u(x) \Delta v(x) \, dx - \int_{\Omega} v(x) \Delta u(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(y) \, d\sigma(y) - \int_{\partial\Omega} v(y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) \, d\sigma(y)$$

(第一 Green 公式中交换 u, v ; 原式与所得式相减.)

- 第二 Green 公式的意义 — 适当边界条件下 Δ 是 Hilbert 空间 (如 $H_0^1(\Omega)$ 或 $H^1(\Omega)$) 上的自伴算子 ($\Rightarrow$ 泛函分析中自伴紧算子的谱理论 — (应用于其逆算子 Δ^{-1})) 设 u, v 都是下列问题的解

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_{\Omega} u(x) \Delta v(x) \, dx = \int_{\Omega} v(x) \Delta u(x) \, dx \Rightarrow \langle \Delta u, v \rangle = \langle u, \Delta v \rangle \text{ (类比实对称阵)}$$

Laplace 算子的基本解

• n 维 Laplace 算子的基本解:

$$\Phi(x) = \phi(|x|) \doteq \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}, & n = 2, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases} \quad \omega_n \doteq \text{“}\mathbb{R}^n \text{ 中单位球的表面积”}$$

- 重要事实 — 构造特解 (特别是有解析表达式的特解) 对于 PDE 求解非常重要 i) 利用特解就可以刻画一些重要物理现象; ii) 检验理论与物理实验结果是否相符; iii) 检验数值算法合理性和有效性; iv) 利用足够多的特解作有限或无限组合 (取极限) 得到一般解
- 构造特解的常见方法 — 利用 PDE 的不变群化为 ODE 或代数方程 i) Laplace 方程: $\mathbb{R}^n$ 自同构群 (旋转 $\Rightarrow$ 球 (柱) 对称解, 平移 $\Rightarrow$ 低维解; ii) 波动方程, 热方程: Lorentz 变换、伽利略变换等 $\Rightarrow$ 行波解; 共形变换 (尺度伸缩) $\Rightarrow$ 自相似解 (一般情形: PDE 的 Lie 群方法; 可积系统)

Laplace 算子的基本解

- n 维 Laplace 算子的基本解:

$$\Phi(x) = \phi(|x|) \doteq \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}, & n = 2, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases} \quad \omega_n \doteq \text{“}\mathbb{R}^n \text{ 中单位球的表面积”}$$

- 重要事实 — 构造特解 (特别是有解析表达式的特解) 对于 PDE 求解非常重要 i) 利用特解就可以刻画一些重要物理现象; ii) 检验理论与物理实验结果是否相符; iii) 检验数值算法合理性和有效性; iv) 利用足够多的特解作有限或无限组合 (取极限) 得到一般解
- 构造特解的常见方法 — 利用 PDE 的不变群化为 ODE 或代数方程 i) Laplace 方程: $\mathbb{R}^n$ 自同构群 (旋转 $\Rightarrow$ 球 (柱) 对称解, 平移 $\Rightarrow$ 低维解; ii) 波动方程, 热方程: Lorentz 变换、伽利略变换等 $\Rightarrow$ 行波解; 共形变换 (尺度伸缩) $\Rightarrow$ 自相似解 (一般情形: PDE 的 Lie 群方法; 可积系统)

- Laplace 算子在 $\mathbb{R}^n$ 中正交变换下的不变性: (对 $A = I_n, b = c = 0$ 情形用如下定理, 其中 $T(x) = Tx \Rightarrow DT(x) = T \Rightarrow D^2T(x) = 0, T$ 是正交阵)

定理 (C^2 微分同胚下 PDE 类型不变)

在 C^2 微分同胚 $y = T(x)$ 下, PDE $\boxed{\text{Tr}[A(x)D^2u(x)] + \langle b(x), Du(x) \rangle + c(x)u(x) = f(x)}$ 变为 $\text{Tr}[\bar{A}(y)D_y^2v(y)] + \langle \bar{b}(y), D_yv(y) \rangle + c(T^{-1}(y))v(y) = f(T^{-1}y)$, 其中 $v(y) = u(T^{-1}y)$, 而

$$\bar{A}(y) = DT(x)A(x)DT(x)^T|_{x=T^{-1}(y)}, \bar{b}(y) = [b(x)DT(x)^T + \text{Tr}[A(x)D^2T(x)]]|_{x=T^{-1}(y)}.$$

由此定理, 现在 $\bar{A}(y) = I_n$, 故 $\Delta_x u(x) = 0 \Rightarrow \Delta_y u(T^{-1}y) = 0 \Rightarrow \Delta_x u(T^{-1}x) =$

0 $\xrightarrow{\text{解 } u \text{ 在自变量正交变换下还是解}}$ $u \text{ 只依赖于 } |x| \Rightarrow$

于是有可能存在自变量正交变换下不变的解, 利用正交群作用于 $\mathbb{R}^n$ 的轨道分类

$u(x) = \phi(r), r = |x|$. 任务: 确定函数 ϕ

- Laplace 算子在 $\mathbb{R}^n$ 中正交变换下的不变性: (对 $A = I_n, b = c = 0$ 情形用如下定理, 其中 $T(x) = Tx \Rightarrow DT(x) = T \Rightarrow D^2T(x) = 0, T$ 是正交阵)

定理 (C^2 微分同胚下 PDE 类型不变)

在 C^2 微分同胚 $y = T(x)$ 下, PDE $\boxed{\text{Tr}[A(x)D^2u(x)] + \langle b(x), Du(x) \rangle + c(x)u(x) = f(x)}$ 变为 $\text{Tr}[\bar{A}(y)D_y^2v(y)] + \langle \bar{b}(y), D_yv(y) \rangle + c(T^{-1}(y))v(y) = f(T^{-1}y)$, 其中 $v(y) = u(T^{-1}y)$, 而 $\bar{A}(y) = DT(x)A(x)DT(x)^\top|_{x=T^{-1}(y)}, \bar{b}(y) = [b(x)DT(x)^\top + \text{Tr}[A(x)D^2T(x)]]|_{x=T^{-1}(y)}.$

由此定理, 现在 $\bar{A}(y) = I_n$, 故 $\Delta_x u(x) = 0 \Rightarrow \Delta_y u(T^{-1}y) = 0 \Rightarrow \Delta_x u(T^{-1}x) = 0$ 解 u 在自变量正交变换下还是解 $\rightarrow u$ 只依赖于 $|x| \Rightarrow$
于是有可能存在自变量正交变换下不变的解, 利用正交群作用于 $\mathbb{R}^n$ 的轨道分类
 $u(x) = \phi(r), r = |x|$. 任务: 确定函数 ϕ

- 球坐标下的 n 维 Laplace 算子: $\Delta_{r,\varphi} u = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^{n-1}} u$. 这里 $\Delta_{S^{n-1}}$ 是 $n-1$ 维单位球面 S^{n-1} 上的 Laplace-Beltrami 算子:

定义 (用了求和约定): 给定 m 维黎曼流形 (M, g) , 设局部坐标 x 下度量 $g = g_{ij} dx^i dx^j$, 记 $|g| = \det(g_{ij})$, $(g^{ij}) = (g^{-1})_{ij}$. 设 $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ 是光滑函数, 定义梯度算子 $\nabla u = g^{ij} \partial_i u \partial_j$; 对光滑向量场 $X = X^j \partial_j$, 定义其散度

$\nabla \cdot X = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} X^i)$. 定义 Laplace-Beltrami 算子

$$\Delta u \doteq \nabla \cdot (\nabla u) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j u).$$

• 局部坐标的取法 ($\mathbb{R}^n$ 的球坐标系):

$$(\diamond) \quad \begin{cases} x^1 = r \sin \varphi_1 \cdots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1}, \\ x^2 = r \sin \varphi_1 \cdots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}, \\ x^3 = r \sin \varphi_1 \cdots \sin \varphi_{n-3} \cos \varphi_{n-2}, \\ \dots\dots\dots \\ x^{n-1} = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ x^n = r \cos \varphi_1, \quad 0 \leq \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2} \leq \pi, 0 \leq \varphi_{n-1} \leq 2\pi. \end{cases}$$

$\mathbb{R}^n$ 的标准度量 $g = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 = (dr)^2 + r^2 g_{S^{n-1}}$, 由此可计算球面的标准度量 $g_{S^{n-1}}$, 从而得到 $\Delta_{S^{n-1}}$ 的局部坐标下的表达式 ($n=3$ 时 $\theta = \varphi_1$ 是纬度, $\varphi = \varphi_2$ 是经度, 注意记号: $\sin^k \theta = (\sin \theta)^k$)

$$\Delta_{S^{n-1}} u = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 \varphi_1 \cdots \sin^2 \varphi_{k-1} \sin^{n-k-1} \varphi_k} \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \left(\sin^{n-k-1} \varphi_k \frac{\partial u}{\partial \varphi_k} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta_{S^2} u = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

• $\Delta_{r,\varphi} u = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^{n-1}} u.$

• Laplace 算子的球对称解: $\frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial \phi(r)}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow \phi(r) =$

$$\begin{cases} b \ln r + c, & n = 2, \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c, & n \geq 3 \end{cases} \xrightarrow[c=0]{\text{取适当 } b \text{ 使得以后解的表达式较为简洁}} \text{基本解 } \Phi(x) = \phi(|x|) \text{ 满足}$$

$$\Delta \Phi(x) = 0, \forall x \neq 0.$$

补充: 球坐标变换下的重积分计算公式

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx &= \int_{r=0}^{\infty} \int_{\varphi_1=0}^{\pi} \cdots \int_{\varphi_{n-2}=0}^{\pi} \int_{\varphi_{n-1}=0}^{2\pi} f(x(r\varphi)) J(n, r, \varphi) \, d\varphi_{n-1} d\varphi_{n-2} \cdots d\varphi_1 dr \\ &= \int_{r=0}^{\infty} \left(\int_{S_1(0)} f(x(r\varphi)) d\sigma(\varphi) \right) r^{n-1} dr\end{aligned}$$

其中, $dx = dx_1 \cdots dx_n$, $r = |x|$, $x(r\varphi)$ 即前述球坐标变换 ($\diamond$), 该变换的 Jacobi 行列式的绝对值就是 $J(n, r, \varphi) = r^{n-1} (\sin \varphi_1)^{n-2} \cdots (\sin \varphi_{n-3})^2 \sin \varphi_{n-2}$.

$d\sigma(\varphi) = (\sin \varphi_1)^{n-2} \cdots (\sin \varphi_{n-3})^2 \sin \varphi_{n-2} d\varphi_{n-1} d\varphi_{n-2} \cdots d\varphi_1$ 就是在局部坐标 $(\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1})$ 下单位球面 $S_1(0)$ 上的面积微元.

注意: 数学分析学习了 $n = 2, 3$ 时对应的上述结论. 一般情形: 几何测度论中的 co-area 公式, 微分几何中的体积微分形式等.

对偶方法: 用边界值和自由项表示解

- 问题 — Poisson 方程的 Dirichlet 问题 (♣): 在 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 中 $\Delta u = f$, $u|_{\partial\Omega} = g$ (自由项 f, g 已知).
- 思路: 设自由项性质很好, 解 u 存在且使下列计算成立, 得到 u 的解析表达式; 再寻求边值和自由项的适当条件, 保证所得解析表达式确实是解.
- 方法: 第二 Green 公式 (找对偶问题的特解, 即恰当的测试函数): 设 $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的外单位法向, 则

$$\int_{\Omega} u(y) \Delta v(y) \, dy - \int_{\Omega} v(y) \Delta u(y) \, dy = \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(y) \, d\sigma(y) - \int_{\partial\Omega} v(y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) \, d\sigma(y)$$

- 固定 $x \in \Omega$, 在第二 Green 公式中取 $u(y)$ 为 (♣) 的解,

$$v(y) \doteq \Phi(x-y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}, & n=2, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}, & n \geq 3. \end{cases}$$

- 难点: 函数 $v(y)$ 在 $y = x \in \Omega$ 处无定义, 不符合 Green 公式成立的条件
- 如何克服难点? (挖洞技巧) — 退一步: 挖掉球 $B_\epsilon(x)$, 在区域 $\Omega_\epsilon \doteq \Omega \setminus \overline{B_\epsilon(x)}$ 上对 $u(y), v(y)$ 用第二 Green 公式; 进一步: 令 $\epsilon \rightarrow 0+$ 取极限. [配图!]

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\epsilon} u(y) \underbrace{\Delta v(y)}_{=0} dy - \int_{\Omega_\epsilon} \underbrace{v(y) \Delta u(y)}_{=f(y)\Phi(x-y)} dy &= \int_{\partial\Omega_\epsilon} u(y) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(y) d\sigma(y) - \\ &\int_{\partial\Omega_\epsilon} v(y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) d\sigma(y) \xrightarrow[\partial\Omega_\epsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\epsilon(x)]{\text{注意 } \partial B_\epsilon(x) \text{ 处 } \mathbf{n} = \frac{x-y}{|x-y|} \text{ 指向球心}} = \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(y) d\sigma(y) - \\ &\underbrace{\int_{\partial\Omega} v(y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) d\sigma(y)}_{=I_\epsilon} + \underbrace{\int_{\partial B_\epsilon(x)} u(y) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(y) d\sigma(y) - \int_{\partial B_\epsilon(x)} v(y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) d\sigma(y)}_{=II_\epsilon = O(\epsilon)} \quad \text{以} \end{aligned}$$

$n \geq 3$ 为例, 由于 $v(y) \geq 0$, $|II_\epsilon| \leq |Du|_{L^\infty} \int_{\partial B_\epsilon(x)} v(y) d\sigma(y) =$
 $|Du|_{L^\infty} \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\partial B_\epsilon(x)} \frac{1}{\epsilon^{n-2}} d\sigma = |Du|_{L^\infty} \frac{\omega_n \epsilon^{n-1}}{(n-2)\omega_n \epsilon^{n-2}} = O(\epsilon).$

$$\Rightarrow - \int_{\Omega_\epsilon} f(y) \Phi(x-y) dy = \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(y) d\sigma(y) - \int_{\partial\Omega} v(y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) d\sigma(y) + \underbrace{\int_{\partial B_\epsilon(x)} u(y) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(y) d\sigma(y)}_{=I_\epsilon \rightarrow u(x)} - O(\epsilon) \quad (\spadesuit)$$

• I_ϵ 的计算

- $v(y) = \Phi(x-y) = \phi(|x-y|),$

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, & n=2, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{r^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \phi'(r) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r}, & n=2, \\ -\frac{1}{\omega_n} \frac{1}{r^{n-1}}, & n \geq 3 \end{cases} = -\frac{1}{\omega_n} r^{1-n}$$

- $D|x| = \frac{x}{|x|} \Rightarrow |y-x| = \epsilon$ 时, $D_y|x-y| = -\frac{x-y}{|x-y|} = -\mathbf{n}$, 注意 $\mathbf{n}$ 是指向球心 x 的单位法向

- $|y-x| = \epsilon$ 时, $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = D_y \Phi(x-y) \cdot \mathbf{n} = -\phi'(|x-y|) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -\phi'(\epsilon) = \frac{1}{\omega_n} \frac{1}{\epsilon^{n-1}}$. (注意 ω_n 是 n 维单位球体的表面积, 故 $|\partial B_\epsilon(x)| = \omega_n \epsilon^{n-1}$.)

$$\Rightarrow I_\epsilon = \frac{1}{|\partial B_\epsilon(x)|} \int_{\partial B_\epsilon(x)} u(y) d\sigma(y) \xrightarrow[\text{积分中值定理和被积函数的连续性}]{\epsilon \rightarrow 0} u(x) \quad \left[\text{注意基本解中的系数的取法使得这里的结果变得很简单} \right]$$

- 注意 $f \in C(\bar{\Omega})$ 时 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\epsilon} f(y) \Phi(x-y) dy = \int_{\Omega} f(y) \Phi(x-y) dy$, 因为该瑕积分绝对可积! (回忆瑕积分的定义, 比较判别法)

$$(\spadesuit) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \text{极限的唯一性}$$

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) d\sigma(y) - \int_{\partial\Omega} g(y) D_y \Phi(x-y) \cdot \mathbf{n}(y) d\sigma(y) - \int_{\Omega} f(y) \Phi(x-y) dy$$

- 缺点: 要表示解, 还需要知道 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y)|_{\partial\Omega}$, 但 $\Delta u = 0, u|_{\partial\Omega} = 0$ 的解已唯一 (能量积分, 方程乘以 u , 用第一 Green 公式), 所以再给定 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y)$, 定解问题未必有解.

- 注意 $f \in C(\bar{\Omega})$ 时 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\epsilon} f(y) \Phi(x-y) dy = \int_{\Omega} f(y) \Phi(x-y) dy$, 因为该瑕积分绝对可积! (回忆瑕积分的定义, 比较判别法)

$$(\spadesuit) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \text{极限的唯一性}$$

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) d\sigma(y) - \int_{\partial\Omega} g(y) D_y \Phi(x-y) \cdot \mathbf{n}(y) d\sigma(y) - \int_{\Omega} f(y) \Phi(x-y) dy$$

- 缺点: 要表示解, 还需要知道 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y)|_{\partial\Omega}$, 但 $\Delta u = 0, u|_{\partial\Omega} = 0$ 的解已唯一 (能量积分, 方程乘以 u , 用第一 Green 公式), 所以再给定 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y)$, 定解问题未必有解.

求解 Poisson 方程 Dirichlet 问题的思路:

- i) 用 Newton 位势 $Nf(x) \doteq - \int_{\Omega} f(y) \Phi(x-y) dy$ 得到 Poisson 方程 $\Delta w = f$ 的特解 $w = Nf$;
- ii) 转化为 Laplace 方程的 Dirichlet 问题, 通过解一个特殊的边值问题消去 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y)$, 引入 Green 函数;
- iii) 对具特殊对称性的区域 (球、上半空间等), 利用基本解和静电源像法计算 Green 函数 $\Rightarrow$ 解的形式表达式 $\Rightarrow$ 严格证明.

Newton 位势

- Newton 位势: $Nf(x) \doteq - \int_{\Omega} f(y) \Phi(x-y) dy$, 其中 $\Phi(x-y) \doteq \phi(|x-y|)$,

$$\phi(r) \doteq \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, & n=2, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{r^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \phi'(r) = -\frac{1}{\omega_n} r^{1-n} \Rightarrow D_x \Phi(x-y) = \phi'(|x-y|) \frac{x-y}{|x-y|} = \frac{-1}{\omega_n} \frac{x-y}{|x-y|^n}$$

定理 (Newton 位势)

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域, 且 $f \in C^1(\bar{\Omega})$. 结论: $u(x) \doteq Nf(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 且 $\Delta u(x) = f(x), \forall x \in \Omega$.

证明. **第一步**: 利用近似积分核逼近, 证明 $Du(x) = \int_{\Omega} \frac{1}{\omega_n} \frac{x-y}{|x-y|^n} f(y) dy$ 且

$u \in C^1(\mathbb{R}^n)$; **第二步**: 利用积分区域分解和分部积分证明 $Du \in C^1(\Omega)$ [关

键: 挖洞 (局部化)、导数的分配] **第三步**: 利用基本解的性质及“挖洞”技

巧, 证明在每个点 $x \in \Omega$ 成立 $\Delta u(x) = f(x)$.

• 复习: 要用的数学分析工具 — 分部积分公式; 以及

定理 (一致收敛函数列的逐项求导 华东师大 < 数学分析 > 第四版下册定理 13.11)

设 i) $\{f_n\} \subset C^1(\Omega)$ 是定义在有界区域 Ω 上的连续可微的函数列, 在点 x_0 收敛;
ii) $\{Df_n\}$ 在 Ω 上一致收敛. 结论: f_n 一致收敛到一个连续可微函数, 且
 $D(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} Df_n(x)$.

定理 (含参变量积分的求导 华东师大 < 数学分析 > 第四版下册定理 19.3)

设 Ω 是有界区域, 函数 $f(x, y)$ 及其偏导函数 $\partial_x f(x, y)$ 都在 $\{(x, y) \in [a, b] \times \bar{\Omega}\}$ 上连续. 结论: 1) 积分 $I(x) \doteq \int_{\Omega} f(x, y) dy$ 在 $[a, b]$ 上可微; 2) $\frac{dI(x)}{dx} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy$.

- 第一步: 利用近似积分核逼近, 证明 $f \in C(\bar{\Omega})$ 时 $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$, 且

$$Du(x) = \int_{\Omega} \frac{1}{\omega_n} \frac{x-y}{|x-y|^n} f(y) \, dy.$$

- 难点: 对 $Nf(x)$ 不能用含参变量积分求导定理 (对 $x \in \Omega$, 被积函数 $-f(y)\Phi(x-y)$ 及其导数在 $y=x$ 都无定义, 从而不连续). 但是, 利用球坐标, 积分 $\int_{\Omega} \frac{1}{\omega_n} \frac{x-y}{|x-y|^n} f(y) \, dy$ 收敛 (存在), 从而可以用如下逼近方法绕过此难点.

- 逼近方法: 将积分核 $\Phi(x) = \phi(|x|)$ 用 $g_{\epsilon}(x) = g_{\epsilon}(|x|) = \begin{cases} \frac{\epsilon^2 - |x|^2}{2\omega_n \epsilon^n} + \phi(\epsilon), & |x| \leq \epsilon \\ \phi(|x|), & |x| > \epsilon \end{cases}$ 近似. 注

意, 对固定的 $\epsilon > 0$, $\left. \frac{d}{dr} \left(\frac{\epsilon^2 - r^2}{2\omega_n \epsilon^n} \right) \right|_{r=\epsilon} = -\frac{1}{\omega_n} \epsilon^{1-n} = \phi'(\epsilon) \Rightarrow g_{\epsilon} \in C^1$.

- 第一步: 利用近似积分核逼近, 证明 $f \in C(\bar{\Omega})$ 时 $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$, 且

$$Du(x) = \int_{\Omega} \frac{1}{\omega_n} \frac{x-y}{|x-y|^n} f(y) dy.$$

- 难点: 对 $Nf(x)$ 不能直接用含参变量积分求导定理 (对 $x \in \Omega$, 被积函数 $-f(y)\Phi(x-y)$ 及其导数在 $y=x$ 都无定义, 从而不连续). 但是, 利用球坐标, 积分 $\int_{\Omega} \frac{1}{\omega_n} \frac{x-y}{|x-y|^n} f(y) dy$ 收敛 (存在), 从而可以用如下逼近方法绕过此难点.

- 逼近方法: 将积分核 $\Phi(x) = \phi(|x|)$ 用 $g_{\epsilon}(x) = g_{\epsilon}(|x|) = \begin{cases} \frac{\epsilon^2 - |x|^2}{2\omega_n \epsilon^n} + \phi(\epsilon), & |x| \leq \epsilon \\ \phi(|x|), & |x| > \epsilon \end{cases}$ 近似. 注

意, 对固定的 $\epsilon > 0$, $\left. \frac{d}{dr} \left(\frac{\epsilon^2 - r^2}{2\omega_n \epsilon^n} \right) \right|_{r=\epsilon} = -\frac{1}{\omega_n} \epsilon^{1-n} = \phi'(\epsilon) \Rightarrow g_{\epsilon} \in C^1$.

- 置 $v_\epsilon(x) \doteq - \int_\Omega g_\epsilon(|x-y|)f(y) \, dy$, 则 $v_\epsilon \rightrightarrows u$. 事实上, 对固定的 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|u(x) - v_\epsilon(x)| \leq \int_\Omega |-\phi(|x-y|) + g_\epsilon(|x-y|)| |f(y)| \, dy \leq \int_{|y-x| \leq \epsilon} \left| \phi(|x-y|) - \phi(\epsilon) - \frac{\epsilon^2 - |x-y|^2}{2\omega_n \epsilon^n} \right| |f(y)| \, dy \xrightarrow[\text{球坐标}]{\omega_n \text{ 是 } \mathbb{R}^n \text{ 单位球的表面积}} \leq$$

$$\|f\|_{L^\infty} \omega_n \int_0^\epsilon \left(\phi(r) - \phi(\epsilon) + \frac{\epsilon^2 - r^2}{2\omega_n \epsilon^n} \right) r^{n-1} \, dr \xrightarrow[\text{考虑 } n \geq 3 \text{ 情形}]{n=2 \text{ 留作习题}} =$$

$$\|f\|_{L^\infty} \omega_n \frac{1}{(n-2)\omega_n} \left(\int_0^\epsilon r \, dr - \int_0^\epsilon \epsilon^{2-n} r^{n-1} \, dr + \frac{n-2}{2\epsilon^n} \left(\epsilon^2 \frac{r^n}{n} - \frac{r^{n+2}}{n+2} \right) \Big|_0^\epsilon \right) =$$

$$\|f\|_{L^\infty} \frac{1}{(n-2)} \frac{(n+4)(n-2)}{2n(n+2)} \epsilon^2 = \|f\|_{L^\infty} \frac{(n+4)}{2n(n+2)} \epsilon^2 \quad (\clubsuit)$$

- 由含参变量积分求导定理, $\frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_i}(x) = - \int_\Omega \frac{\partial g_\epsilon}{\partial x_i}(x-y)f(y) \, dy$. 注意由含参变量积分的连续性, 得到 $v_\epsilon \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

- 置 $v_\epsilon(x) \doteq - \int_\Omega g_\epsilon(|x-y|)f(y) \, dy$, 则 $v_\epsilon \rightrightarrows u$. 事实上, 对固定的 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|u(x) - v_\epsilon(x)| \leq \int_\Omega |-\phi(|x-y|) + g_\epsilon(|x-y|)| |f(y)| \, dy \leq \int_{|y-x| \leq \epsilon} \left| \phi(|x-y|) - \phi(\epsilon) - \frac{\epsilon^2 - |x-y|^2}{2\omega_n \epsilon^n} \right| |f(y)| \, dy \xrightarrow[\text{球坐标}]{\omega_n \text{ 是 } \mathbb{R}^n \text{ 单位球的表面积}} \leq$$

$$\|f\|_{L^\infty} \omega_n \int_0^\epsilon \left(\phi(r) - \phi(\epsilon) + \frac{\epsilon^2 - r^2}{2\omega_n \epsilon^n} \right) r^{n-1} \, dr \xrightarrow[\text{考虑 } n \geq 3 \text{ 情形}]{n=2 \text{ 留作习题}} =$$

$$\|f\|_{L^\infty} \omega_n \frac{1}{(n-2)\omega_n} \left(\int_0^\epsilon r \, dr - \int_0^\epsilon \epsilon^{2-n} r^{n-1} \, dr + \frac{n-2}{2\epsilon^n} \left(\epsilon^2 \frac{r^n}{n} - \frac{r^{n+2}}{n+2} \right) \Big|_0^\epsilon \right) =$$

$$\|f\|_{L^\infty} \frac{1}{(n-2)} \frac{(n+4)(n-2)}{2n(n+2)} \epsilon^2 = \|f\|_{L^\infty} \frac{(n+4)}{2n(n+2)} \epsilon^2 \quad (\clubsuit)$$

- 由含参变量积分求导定理, $\frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_i}(x) = - \int_\Omega \frac{\partial g_\epsilon}{\partial x_i}(x-y)f(y) \, dy$. 注意由含参变量积分的连续性, 得到 $v_\epsilon \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

- 下面证明 $\frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_i}(x) \Rightarrow \int_{\Omega} \frac{x_i - y_i}{\omega_n |x - y|^n} f(y) \, dy$, 从而由一致收敛函数列求导定理, 得到 $Du(x) = \int_{\Omega} \frac{x - y}{\omega_n |x - y|^n} f(y) \, dy$. 再由一致收敛的连续函数列的极限也连续, 得到 $Du(x) \in C(\mathbb{R}^n)$.

事实上,
$$\left| \frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_i}(x) - \int_{\Omega} \frac{x_i - y_i}{\omega_n |x - y|^n} f(y) \, dy \right| \leq \int_{|y-x| \leq \epsilon} \|f\|_{L^\infty} \left(\frac{|x_i - y_i|}{\omega_n \epsilon^n} + \frac{|x_i - y_i|}{\omega_n |x - y|^n} \right) \, dy \leq \|f\|_{L^\infty} \int_0^\epsilon \left(\frac{r^n}{\epsilon^n} + 1 \right) \, dr \leq \frac{n+2}{n+1} \|f\|_{L^\infty} \epsilon \quad (\clubsuit)$$

- 注意上述结论对 $f \in C(\bar{\Omega})$ 都成立 (此时就有 $v_\epsilon \in C^1$, 且估计式 $(\clubsuit)$ 右端都只依赖于 $\|f\|_{L^\infty}$, 与 Df 无关)
- 请体会“逼近”及对应“估计”的重要意义. 为什么可以成功? 要找到、发掘出原问题的特点
(自然界的对象一定有好的结构; 勤奋 + 运气 + 勇气 $\Rightarrow$ 找到有好的结构的数学问题)

- 下面证明 $\frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_i}(x) \Rightarrow \int_{\Omega} \frac{x_i - y_i}{\omega_n |x - y|^n} f(y) \, dy$, 从而由一致收敛函数列求导定理, 得到 $Du(x) = \int_{\Omega} \frac{x - y}{\omega_n |x - y|^n} f(y) \, dy$. 再由一致收敛的连续函数列的极限也连续, 得到 $Du(x) \in C(\mathbb{R}^n)$.

事实上,
$$\left| \frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_i}(x) - \int_{\Omega} \frac{x_i - y_i}{\omega_n |x - y|^n} f(y) \, dy \right| \leq \int_{|y-x| \leq \epsilon} \|f\|_{L^\infty} \left(\frac{|x_i - y_i|}{\omega_n \epsilon^n} + \frac{|x_i - y_i|}{\omega_n |x - y|^n} \right) \, dy \leq \|f\|_{L^\infty} \int_0^\epsilon \left(\frac{r^n}{\epsilon^n} + 1 \right) \, dr \leq \frac{n+2}{n+1} \|f\|_{L^\infty} \epsilon \quad (\clubsuit)$$

- 注意上述结论对 $f \in C(\bar{\Omega})$ 都成立 (此时就有 $v_\epsilon \in C^1$, 且估计式 $(\clubsuit)$ 右端都只依赖于 $\|f\|_{L^\infty}$, 与 Df 无关)
- 请体会“逼近”及对应“估计”的重要意义. 为什么可以成功? 要找到、发掘出原问题的特点
(自然界的对象一定有好的结构; 勤奋 + 运气 + 勇气 $\Rightarrow$ 找到有好的结构的数学问题)

- 下面证明 $\frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_i}(x) \Rightarrow \int_{\Omega} \frac{x_i - y_i}{\omega_n |x - y|^n} f(y) \, dy$, 从而由一致收敛函数列求导定理, 得到 $Du(x) = \int_{\Omega} \frac{x - y}{\omega_n |x - y|^n} f(y) \, dy$. 再由一致收敛的连续函数列的极限也连续, 得到 $Du(x) \in C(\mathbb{R}^n)$.

事实上,
$$\left| \frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_i}(x) - \int_{\Omega} \frac{x_i - y_i}{\omega_n |x - y|^n} f(y) \, dy \right| \leq \int_{|y-x| \leq \epsilon} \|f\|_{L^\infty} \left(\frac{|x_i - y_i|}{\omega_n \epsilon^n} + \frac{|x_i - y_i|}{\omega_n |x - y|^n} \right) \, dy \leq \|f\|_{L^\infty} \int_0^\epsilon \left(\frac{r^n}{\epsilon^n} + 1 \right) \, dr \leq \frac{n+2}{n+1} \|f\|_{L^\infty} \epsilon \quad (\clubsuit)$$

- 注意上述结论对 $f \in C(\bar{\Omega})$ 都成立 (此时就有 $v_\epsilon \in C^1$, 且估计式 $(\clubsuit)$ 右端都只依赖于 $\|f\|_{L^\infty}$, 与 Df 无关)
- 请体会“逼近”及对应“估计”的重要意义. 为什么可以成功? 要找到、发掘出原问题的特点
(自然界的对象一定有好的结构; 勤奋 + 运气 + 勇气 $\Rightarrow$ 找到有好的结构的数学问题)

- 第二步: 利用奇性分解 (通过“挖洞”局部化实现) 和分部积分证明 $Du \in C^1(\Omega)$ [关键: 导数的分配]. 取定 $\hat{x} \in \Omega$, 若 $B_R(\hat{x}) \subset \Omega$, 则

$Du \in C^1(B_R(\hat{x})) \Rightarrow u(x) \in C^2(B_R(\hat{x})).$ (连续和可微是局部性质, 局部化 — 重要!)

$$\begin{aligned}
 \bullet \text{ 已证明 } D_i u(x) &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x-y) f(y) \, dy \xrightarrow[\text{调和和分析技巧: 积分区域按奇性和大小作精细分解}]{x \in B_R(\hat{x}) \text{ 时第一项没有奇性, 可直接求导任意次}} = \\
 &- \int_{\Omega \setminus B_R(\hat{x})} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x-y) f(y) \, dy - \\
 &\int_{B_R(\hat{x})} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x-y) f(y) \, dy \xrightarrow[\text{对第二项作分部积分 (严格来写需要挖洞技巧, 但结果仍正确)}]{\text{让 } f \text{ 也承担一部分导数, 为此先把下划线部分的对参变量导数改为对被积变量导数}} = \\
 &- \int_{\Omega \setminus B_R(\hat{x})} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x-y) f(y) \, dy + \int_{B_R(\hat{x})} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(x-y) f(y) \, dy \\
 &= - \int_{\Omega \setminus B_R(\hat{x})} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x-y) f(y) \, dy + \left(\int_{\partial B_R(\hat{x})} \Phi(x-y) f(y) \frac{y_i - \hat{x}_i}{|y - \hat{x}|} \, d\sigma(y) - \int_{B_R(\hat{x})} \Phi(x-y) \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} \, dy \right)
 \end{aligned}$$

- 上式右端第一、二项被积函数正则, 直接用含参变量求导可知对 $x \in B_R(\hat{x})$ 是 C^∞ 的. 对第三项, 利用第一步的结论, 注意到 $D_i f \in C(\bar{\Omega}) \Rightarrow$ 第三项是 $C^1(\mathbb{R}^n)$ 的 $\Rightarrow Du \in C^1(B_R(\hat{x}))$

$$\begin{aligned} D_{ii}u(x) = & - \int_{\Omega \setminus B_R(\hat{x})} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2}(x-y)f(y) \, dy + \int_{\partial B_R(\hat{x})} \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(x-y)f(y) \frac{y_i - \hat{x}_i}{|y - \hat{x}|} \, d\sigma(y) \\ & - \int_{B_R(\hat{x})} \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(x-y) \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} \, dy \end{aligned}$$

- 第三步: 利用基本解的性质以及“挖洞”技巧证明 $\Delta u(\hat{x}) = f(\hat{x}), \forall \hat{x} \in \Omega$. (应用当 $x \neq y$ 时 $\Delta_x \Phi(x-y) = 0, D_x \Phi(x-y) = \frac{-1}{\omega_n} \frac{x-y}{|x-y|^n}$.) 当 $R \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} \Delta u(\hat{x}) &= - \int_{\Omega \setminus B_R(\hat{x})} \underbrace{\Delta_x \Phi(x-y)|_{x=\hat{x}}}_{=0} f(y) \, dy + \int_{\partial B_R(\hat{x})} \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(x-y) \Big|_{x=\hat{x}} f(y) \frac{y_i - \hat{x}_i}{|y - \hat{x}|}}_{= \frac{1}{\omega_n} \frac{f(y)}{|\hat{x}-y|^{n-1}} = \frac{1}{\omega_n} \frac{f(y)}{R^{n-1}}} \, d\sigma(y) - \\ &\quad \underbrace{\int_{B_R(\hat{x})} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(x-y) \Big|_{x=\hat{x}} \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} \, dy}_{= -\frac{1}{\omega_n} \frac{(\hat{x}-y) \cdot Df(y)}{|\hat{x}-y|^n}} \Rightarrow \Delta u(\hat{x}) = \underbrace{\frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(\hat{x})} f(y) \, d\sigma(y)}_{\rightarrow f(\hat{x})} + \underbrace{\int_{B_R(\hat{x})} \frac{1}{\omega_n} \frac{(\hat{x}-y) \cdot Df(y)}{|\hat{x}-y|^n} \, dy}_{= O(R)} \xrightarrow{R \rightarrow 0} \end{aligned}$$

$$f(\hat{x}) \Rightarrow \Delta u(\hat{x}) = f(\hat{x}).$$

$$(\text{注意: } \left| \int_{B_R(\hat{x})} \frac{1}{\omega_n} \frac{(\hat{x}-y) \cdot Df(y)}{|\hat{x}-y|^n} \, dy \right| \leq \|Df\|_{L^\infty} \int_0^R \frac{1}{r^{n-1}} r^{n-1} \, dr = \|Df\|_{L^\infty} R.)$$

Newton 位势的 Schauder 估计

- 利用 Newton 位势 $w(x) \doteq - \int_{\Omega} f(y) \Phi(x-y) dy$, Poisson 方程的 Dirichlet 内问题 $\Delta v = f, v|_{\partial\Omega} = g$ 可化为 Laplace 方程的 Dirichlet 内问题 $\Delta u = 0, u|_{\partial\Omega} = g - w|_{\partial\Omega}$, 对其光滑解 $u(x) \doteq v(x) - w(x)$, 成立如下公式

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) d\sigma(y) - \int_{\partial\Omega} g(y) D_y \Phi(x-y) \cdot \mathbf{n}(y) d\sigma(y)$$

- 关于 Newton 位势的精细估计 — Schauder 理论 (1935 年): i) 设 $f(x)$ 在 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上有界可积, 则 $w(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$, 且 $D_i w(x) = - \int_{\Omega} D_i \Phi(x-y) f(y) dy$; ii) 设 $f(x)$ 有界且 Hölder 连续: $\exists \alpha \in (0, 1)$ 使得 $f \in C^\alpha(\Omega)$, 则 $w \in C^2(\Omega)$, $\forall x \in \Omega$ 成立 $\Delta w(x) = f(x)$, 且

$$D_{ij} w(x) = - \int_{\Omega_0} D_{ij} \Phi(x-y) (f(y) - f(x)) dy + f(x) \int_{\partial\Omega_0} D_i \Phi(x-y) \mathbf{n}_j(y) d\sigma(y), \quad \forall i, j = 1, \dots, n,$$

这里 $\Omega_0 \supset \Omega$ 是散度定理适用的区域, 并将 $f(x)$ 在 Ω 外延拓为零; iii) $\forall B_{2R} \subset \Omega$, 存在常数 $C = C(n, B_R)$ 使得成立估计式 $[D^2 w]_{0, B_R} + R^\alpha [D^2 w]_{\alpha, B_R} \leq C(\|f\|_{C(B_{2R})} + R^\alpha [f]_{\alpha, B_{2R}})$.

参考文献: Gilbarg, David; Trudinger, Neil S. Elliptic partial differential equations of second order. Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. [中译本: 叶其孝等译, 二阶椭圆型偏微分方程, 高等教育出版社, 2016 年] (pp. 52-54. 那里的 Γ 就是这里的 $-\Phi$.)

奇异积分算子、Dirac 测度、广义函数

- 奇异积分算子 $T: f \mapsto Tf$: $(Tf)(x) \doteq \int_{\Omega} D_{ij} \Phi(x-y) f(y) dy$ 无定义 (积分不收敛), 但在求解 PDE 时经常出现, 如何给它一个合理的定义? (调和分析的主要研究对象之一)
- 卷积: 设 $f(x), g(x) \in L^1$, 定义函数 $f * g$: $(f * g)(x) \doteq \int f(x-y) g(y) dy$ (加权平均, 是研究函数或广义函数的重要工具)
- Dirac 测度 δ_a ($a \in \mathbb{R}^n$) 关于 $\mathbb{R}^n$ 的 Lebesgue 测度奇异, 是比 Lebesgue 可测函数更广泛的数学对象, 用于描述质点、点电荷、凝聚等物理对象或现象
 - $\mathbb{R}^n$ 上的一个 Radon 测度: $\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A; \\ 0, & a \notin A, \end{cases}$ 这里 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的任意 Borel 集
 - $C_c(\mathbb{R}^n)$ 上的连续线性泛函: $\forall \phi \in C_c(\mathbb{R}^n), \langle \delta_a, \phi \rangle \doteq \phi(a)$

• $\mathcal{D}'(\Omega)$ 广义函数

- 测试函数 — $\mathcal{D}(\Omega) \doteq C_c^\infty(\Omega)$: Ω 上具有紧支集的无穷可微函数构成的局部凸拓扑线性空间 (不是 Banach 空间, 它需要无限个半范数来刻画拓扑).

- 重要的例子: i) $\eta(x) \doteq \begin{cases} c_n e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$, 取常数 c_n 使得 $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = 1$. ii) 函数族 $\eta_\epsilon(x) \doteq \frac{1}{\epsilon^n} \eta(\frac{x}{\epsilon})$

(这里 $\epsilon > 0$).

- 拓扑 (序列收敛): 设 $\{\phi_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$, 称 $n \rightarrow \infty$ 时 $\phi_n \rightarrow \phi$ ($\mathcal{D}(\Omega)$), 若存在紧集 $K \subset \Omega$ 使得 $\text{supp } \phi_n \subset K$, 且对任意多重指标 α , 在 K 上 $D^\alpha \phi_n$ 一致收敛到 $D^\alpha \phi$.
- $\mathcal{D}'(\Omega)$ 广义函数 — $\mathcal{D}(\Omega)$ 上的连续线性泛函构成的线性空间.
- 广义函数的弱收敛 (拓扑): 设 $\{T_n\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, 称 $n \rightarrow \infty$ 时 T_n 弱收敛到 $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (记作 $T_n \rightharpoonup T$ ($n \rightarrow \infty$)), 若 $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, 成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \phi \rangle = \langle T, \phi \rangle$.
- 例子: Lebesgue 可积函数, Radon 测度. [泛函作用通过积分定义](#).

广义函数的导数, 基本解

- 设 T 是广义函数, α 是多重指标, 定义它的导数 $D^\alpha T$ 是如下广义函数: (可验证它是 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上连续线性泛函! 此外, 相容性成立: 由分部积分公式, 光滑函数的广义函数导数就是它的经典导数)

$$\langle D^\alpha T, \phi(x) \rangle \doteq (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi(x) \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

- 例: i) Heaviside 函数 $H(x) \doteq \begin{cases} 1, & \text{if } x > 0, \\ 0, & \text{if } x \leq 0, \end{cases}$ 则 $\langle \frac{dH}{dx}, \phi \rangle = -\langle H, \frac{d\phi}{dx} \rangle = -\int_0^\infty \frac{d\phi}{dx} dx = \phi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle$, 故广义

函数意义下 $H' = \delta_0$.

- ii) $\langle \delta_0^{(n)}, \phi \rangle = (-1)^n \phi^{(n)}(0)$. 广义函数 δ_0' 在物理中对应偶极子 (相距很近的符号相反的一对电荷或“磁荷”), δ_0'' 对应四极子 (由两个具有相反相位的偶极子形成, 声学).

● Laplace 算子 Δ 的基本解: 广义函数意义下成立 $\Delta(-\Phi(x)) = \delta_0$.

证明: 由于基本解球对称, 故利用球坐标计算较为简便. 回顾球坐标下的 n 维

Laplace 算子 $\Delta_{r,\varphi} u = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^{n-1}} u$. 对任意 $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, 考虑

$n \geq 3$ 情形: $\langle \Delta \Phi, \psi \rangle = \langle \Phi, \Delta \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(|x|) \Delta \psi(x) dx =$

$$\int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \phi(r) \left(\frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^{n-1}} \psi \right) r^{n-1} d\sigma dr =$$

$$\int_{S^{n-1}} \frac{1}{(n-2)\omega_n} \underbrace{\int_0^\infty r^{2-n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) dr}_{= \int_0^\infty \left((n-2) \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \psi}{\partial r}) \right) dr = -(n-2)\psi(0)} d\sigma +$$

$$\int_0^\infty \phi(r) r^{n-3} \underbrace{\int_{S^{n-1}} \Delta_{S^{n-1}} \psi(r, \omega) d\sigma(\omega)}_{=0, \text{利用流形上的散度定理以及球面无边: } \int_{S^{n-1}} \operatorname{div} V d\sigma = 0}$$

$$dr \Rightarrow \langle \Delta \Phi, \psi \rangle =$$

$$-\psi(0) = \langle -\delta_0, \psi \rangle \Rightarrow \Delta \Phi = -\delta_0.$$



- Laplace 算子 Δ 的基本解: 广义函数意义下成立 $\Delta(-\Phi(x)) = \delta_0$.

证明: 由于基本解球对称, 故利用球坐标计算较为简便. 回顾球坐标下的 n 维

Laplace 算子 $\Delta_{r,\varphi} u = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^{n-1}} u$. 对任意 $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, 考虑

$n \geq 3$ 情形: $\langle \Delta \Phi, \psi \rangle = \langle \Phi, \Delta \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(|x|) \Delta \psi(x) dx =$

$$\int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \phi(r) \left(\frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^{n-1}} \psi \right) r^{n-1} d\sigma dr =$$

$$\int_{S^{n-1}} \frac{1}{(n-2)\omega_n} \underbrace{\int_0^\infty r^{2-n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) dr}_{= \int_0^\infty \left((n-2) \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \psi}{\partial r}) \right) dr = -(n-2)\psi(0)}$$

$$\int_0^\infty \phi(r) r^{n-3} \underbrace{\int_{S^{n-1}} \Delta_{S^{n-1}} \psi(r, \omega) d\sigma(\omega)}_{=0, \text{利用流形上的散度定理以及球面无边: } \int_{S^{n-1}} \operatorname{div} V d\sigma = 0}$$

$$dr \Rightarrow \langle \Delta \Phi, \psi \rangle =$$

$$-\psi(0) = \langle -\delta_0, \psi \rangle \Rightarrow \Delta \Phi = -\delta_0.$$



Laplace 算子的基本解 (另一种证明)

n 维 Laplace 算子 $-\Delta$ 的基本解: $\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}, & n = 2, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases} \quad \omega(n) = \text{“}\mathbb{R}^n \text{ 中单位球的表面积”}.$

定理: 广义函数意义下成立 $-\Delta\Phi(x) = \delta_0$.

证明: (直接用第二 Green 公式.) 注意当 $x \neq 0$ 时 $\Delta\Phi(x) = 0$. 由此, 利用逼近和第二 Green 公式, $\forall \phi \in \mathcal{D}$, 我们有

$$\begin{aligned} \langle -\Delta\Phi, \phi \rangle &= -\langle \Phi, \Delta\phi \rangle = -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) \Delta\phi(x) \, dx = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \Phi(x) \Delta\phi(x) \, dx = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} (\Phi \Delta\phi - \phi \Delta\Phi) \, dx \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x|=\varepsilon} \left(\Phi \nabla\phi - \phi \nabla\Phi, \frac{-x}{|x|} \right) \, d\sigma(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} O(\varepsilon \ln \varepsilon) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x|=\varepsilon} \left(\phi \nabla\Phi, \frac{x}{|x|} \right) \, d\sigma(x) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_n} \int_{|x|=\varepsilon} \phi(x) \left(\frac{x}{|x|^n}, \frac{x}{|x|} \right) \, d\sigma(x) \quad (\text{回忆 } \nabla\Phi(x) = -\frac{1}{\omega_n} \frac{x}{|x|^n}) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{|x|=\varepsilon} \phi(x) \, d\sigma(x) = \phi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle. \end{aligned}$$

(这里 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示泛函与函数的配对, $(\cdot, \cdot)$ 表示欧氏空间中向量的内积.) 证毕!

例 1. 求解圆盘上 Poisson 方程的 Dirichlet 问题
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 1, & \text{若 } x^2 + y^2 < 1, \\ u|_{x^2+y^2=1} = x^2. \end{cases}$$

解. 第一步: 方程齐次化. 注意到 $u_0(x, y) \doteq \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ 满足方程 $\Delta u_0 = 1$, 置 $v = u - u_0$, 则

$$v_{xx} + v_{yy} = 0, \quad v|_{x^2+y^2=1} = x^2 - \frac{1}{4}.$$

第二步: 利用调和多项式待定解. 回顾 (复变函数课程) 以下事实: i) 置 $z \doteq x + iy$, 则 $\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$; ii) 由 Cauchy-Riemann 方程组, 全纯函数的实部和虚部都是调和函数. 由于 z^n 全纯, 它的实部和虚部都是调和函数. 由此构造调和多项式 $1, x, y, x^2 - y^2, xy$ (对应 $1, z, z^2$. 由于边界条件及边界曲线都是二次的, 只需这几项).

第三步: 待定系数. 设 $v = a_0 + a_1x + a_2y + a_3(x^2 - y^2) + a_4xy$, 它满足调和方程. 由边界条件,

$v(x, y)|_{x^2+y^2=1} = a_0 + a_1x + a_2\sqrt{1-x^2} + a_3(2x^2 - 1) + a_4x\sqrt{1-x^2} = -\frac{1}{4} + x^2$, 对比系数得 $a_3 = 1/2, a_0 = 1/4$, 其它都是零. 于是 $v = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, 原问题的解是 $u = v + u_0 = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{4}$. □

注意: Laplace 方程也叫作调和方程, 它的解叫作调和函数 (harmonic function). 在微分几何或其它一些书中常考虑 $-\Delta$ (它是一个正定算子), 所以和这里得到的很多公式会相差一个负号, 在读书时注意区别. 此外, 注意体会一般理论和具体解法的差别.

习题 1. 证明函数 $u(x, y) = \begin{cases} (x^2 - y^2) \ln \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right)^{\frac{1}{2}}, & 0 < x^2 + y^2 < \frac{1}{4}, \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$ 满足 $\Delta u \in C(B_{1/2})$, 但 $u(x, y) \notin C^2(B_{1/2})$.

习题 2. [Approximate Identity] 证明: i) $\epsilon \rightarrow 0+$ 时 $\eta_\epsilon \rightharpoonup \delta_0 (\mathcal{D}'(\Omega))$; ii) 设 $f \in C_c(\Omega)$, 则 $\rho_\epsilon * f \in \mathcal{D}(\Omega)$, 且 $\epsilon \rightarrow 0$ 时一致收敛到 f .

习题 3. 计算一元函数求导算子 $\frac{d^2}{dx^2}$ 的基本解.

[提示: 即求函数 $G(t)$ 使得广义函数意义下成立 $G''(t) = \delta_0$.]

阅读任务和作业

- 必读 — 郇中丹, 黄海洋: 偏微分方程 (第二版), 高等教育出版社, 2013. [pp.203–206; pp. 215–218]
- 作业: p.206: 1; p.218: 1.
- 参考文献
 - Gilbarg, David; Trudinger, Neil S. Elliptic partial differential equations of second order. Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. [中译本: 叶其孝等译, 二阶椭圆型偏微分方程, 高等教育出版社, 2016 年.] (第 2 章)
 - 谷超豪, 李大潜, 陈恕行, 郑宋穆, 谭永基: 数学物理方程, 第三版, 高等教育出版社, 2012 年. [第六章]

最后更新: 2022-11-10

偏微分方程

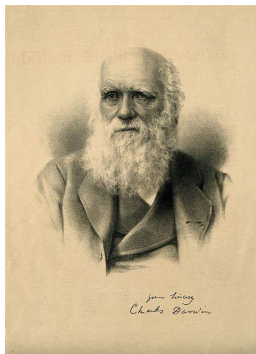
第九讲 Laplace 方程在半空间和球上的 Dirichlet 问题

袁海荣 (华东师范大学 数学科学学院)

2022 年 11 月 1 日

作为一个科学工作者, 我的成功取决于我复杂的心理素质. 其中最重要的是: 热爱科学、善于思索、勤于观察和搜集资料、具有相当的发现能力和广博的常识. 这些看起来的确令人奇怪, 凭借这些极平常的能力, 我居然在一些重要地方影响了科学家们的信仰.

—— *Charles Robert Darwin* (1809 年 2 月 12 日—1882 年 4 月 19 日)



传记: <https://www.britannica.com/biography/Charles-Darwin>

学习要点

- 掌握 Laplace 方程 Dirichlet 问题的 Green 函数的定义、性质及其证明
- 熟练掌握半空间情形 Poisson 公式的推导, 并会证明对连续边值它是经典解
- 熟练掌握球的 Poisson 公式的推导, 以及对连续边值验证它是经典解
- 了解用静电源像法构造 Green 函数的思路

Green 函数 $G(x, y)$

- 典型问题 — $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界光滑区域, Laplace 方程的 Dirichlet 内问题:
在 Ω 内 $\Delta u = 0$, $u|_{\partial\Omega} = g$.
- 出发点: 对光滑解 $u(x)$, 成立如下公式 ($\mathbf{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的外单位法向)

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) \, d\sigma(y) - \int_{\partial\Omega} g(y) \mathbf{D}_y \Phi(x-y) \cdot \mathbf{n}(y) \, d\sigma(y) \quad (\clubsuit)$$

- n 维 Laplace 算子的基本解:

$$\Phi(x) = \phi(|x|) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}, & n = 2, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases} \quad \omega_n = \mathbb{R}^n \text{ 中单位球的表面积}$$

- 难点: 如何消去 (♣) 中的蓝色项? 方法: 构造一个新的调和函数 $\phi^x(y)$, 它的边界值是 $\Phi(x-y)$, 再对 $\phi^x(y)$ 和 $u(y)$ 用第二 Green 公式, 使得出现这一项.

- 取定 $x \in \Omega$ 为参数, 求解 Dirichlet 问题 在 Ω 内 $\Delta\phi^x(y) = 0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $\phi^x(y) = \Phi(x-y)$.

- 第二 Green 公式

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \underbrace{\Delta u(y)}_{=0} \phi^x(y) dy - \int_{\Omega} u(y) \underbrace{\Delta \phi^x(y)}_{=0} dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) \underbrace{\phi^x(y)}_{=\Phi(x-y)} d\sigma(y) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi^x}{\partial \mathbf{n}}(y) \underbrace{u(y)}_{=g(y)} d\sigma(y)$$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) \Phi(x-y) d\sigma(y) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi^x}{\partial \mathbf{n}}(y) g(y) d\sigma(y) \xrightarrow[\substack{(\clubsuit) \\ G(x,y) \doteq \Phi(x-y) - \phi^x(y)}}{}$$

$$\boxed{u(x) = - \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}(y)} d\sigma(y)} \quad \left(\frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}(y)} \doteq D_y G(x,y) \cdot \mathbf{n}(y) \right)$$

Green 函数的性质

- $$u(x) = - \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}(y)} d\sigma(y), \quad \forall x \in \Omega,$$
 其中 $\frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}(y)} = D_y G(x,y) \cdot \mathbf{n}(y)$, $\mathbf{n}(y)$ 为 $y \in \partial\Omega$ 处外单位法向, $G(x,y) \doteq \Phi(x-y) - \phi^x(y)$, ($\spadesuit$) 在 Ω 内 $\Delta\phi^x(y) = 0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $\phi^x(y) = \Phi(x-y)$, $\Phi(x) = \phi(|x|) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}, & n = 2, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases}$
 $-\Delta_x \Phi(x) = \delta_0 \Rightarrow \Delta_y(-\Phi(x-y)) = \delta_x$
- Green 函数是 Dirichlet 问题的基本解: 在 Ω 内 $-\Delta_y G(x,y) = \delta_x$, 在 $\partial\Omega$ 上 $G(x,y) = 0$.
物理意义: 在 Ω 内 x 点放置一个点电荷, $\partial\Omega$ 接地 (电压为零), $G(x,y)$ 表示在 y 点的电势
- 意义: 将一般边值的 Dirichlet 问题转化为一类特殊边值的 Dirichlet 问题 ($\spadesuit$). 假设该问题有 $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 的经典解 (对具特殊对称性的区域 Ω 可利用基本解的组合构造出解 $\phi^x(y)$).

- $$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}(y)} d\sigma(y) = 1, \forall x \in \Omega.$$

证明: 由于 Ω 光滑且有界, 而 Dirichlet 问题 $\Delta u(x) = 0, u|_{\partial\Omega} = 1$ 存在唯一的解 $u \equiv 1$, 上述推导过程都合法. $\square$

- 倒易性: $G(x,y) = G(y,x), \forall x \neq y \in \Omega$ [物理意义: 在边界接地时, x 点的源产生的场在 y 点的势等于 y 点的源产生的场在 x 点的势.]

- 重要推论: 固定 $y \in \Omega$, 则对 $x \neq y$, 成立 $\Delta_x G(x,y) = \Delta_x G(y,x) = 0$ [考验: 对于偏导运算及符号的正确理解!]

- 性质 $G(x,y) = G(y,x), -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}(y)} d\sigma(y) = 1$ 可用于验证当 Ω 是球等特殊区域时, 公

式 $u(x) = -\int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}(y)} d\sigma(y), \forall x \in \Omega$ 给出 Dirichlet 问题的经典解, 从而避免了复杂的计算. 但对无界区域等要重新严格证明. [关键: 善于利用函数的一些整体性质 (如满足 PDE), 而非对具体的表达式直接暴力计算 (自然界的规律性和协调性!)]

- 倒易性: $G(x, y) = G(y, x), \forall x \neq y \in \Omega$, 其中 $G(x, y) \doteq \Phi(x - y) - \phi^x(y)$.

证明. (物理想法 — 分别构造在 x 处和 y 处的源产生的场; 数学方法 — 局部化 + 挖洞 + 第二 Green 公式)

第一步: 取定 $x \neq y \in \Omega$, 置 $u(z) \doteq G(x, z), v(z) \doteq G(y, z)$, 在 $\Omega_\epsilon \doteq \Omega \setminus (B_\epsilon(x) \cup B_\epsilon(y))$ 上对 $u(z), v(z)$ 用第二

Green 公式, 取 $\epsilon \ll 1$, 并注意 u, v 调和以及 $u|_{\partial\Omega} = 0 = v|_{\partial\Omega} \Rightarrow 0 = \int_{\Omega_\epsilon} [u(z)\Delta v(z) - v(z)\Delta u(z)] dz =$

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\epsilon(x) \cup \partial B_\epsilon(y)} \left[u(z) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(z) - v(z) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(z) \right] d\sigma(z) \Rightarrow \int_{\partial B_\epsilon(x) \cup \partial B_\epsilon(y)} \left[u(z) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(z) - v(z) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(z) \right] d\sigma(z) = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{\partial B_\epsilon(x)} \left[u(z) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(z) - v(z) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(z) \right] d\sigma(z) = \int_{\partial B_\epsilon(y)} \left[v(z) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(z) - u(z) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(z) \right] d\sigma(z)$$

$$\text{第二步: 左} = \int_{\partial B_\epsilon(x)} [\Phi(x - z) \partial_{\mathbf{n}} v(z) - \phi^x(z) \partial_{\mathbf{n}} v(z) - v(z) \partial_{\mathbf{n}} \Phi(x - z) + v(z) \partial_{\mathbf{n}} \phi^x(z)] d\sigma(z) \xrightarrow[\phi^x(z) \text{ 和 } v(z) \text{ 都在球 } B_\epsilon(x) \text{ 上调和, 对它俩用第二 Green 公式}]{\Rightarrow \int_{\partial B_\epsilon(x)} v(z) \partial_{\mathbf{n}} \phi^x(z) - \phi^x(z) \partial_{\mathbf{n}} v(z) d\sigma(z) = 0} \rightarrow =$$

$$\int_{\partial B_\epsilon(x)} [\Phi(x - z) \partial_{\mathbf{n}} v(z) - v(z) \partial_{\mathbf{n}} \Phi(x - z)] d\sigma(z) \xrightarrow[\text{(已假设 } |D_z \phi^y(z)| \text{ 有界} \Rightarrow |Dv(z)| \text{ 在 } x \text{ 附近有界)} + (|\Phi(x - z)| = O(\epsilon^{2-n}) \Rightarrow \text{第一项} = O(\epsilon))]{\text{回忆 } \partial_{\mathbf{n}}(z) \Phi(x - z) = -\phi'(\epsilon) = \frac{1}{\omega_n \epsilon^{n-1}}} \rightarrow =$$

$$O(\epsilon) - \frac{1}{|\partial B_\epsilon(x)|} \int_{\partial B_\epsilon(x)} v(z) d\sigma(z) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -v(x). \quad (\text{注} - |Dv(z)| \text{ 在 } x \text{ 附近有界, 与 } \epsilon \text{ 无关: 可直接验证 } |D\Phi(y - z)| \text{ 在 } x \text{ 附近有界, 与 } \epsilon \text{ 无关;}$$

$|D_z \phi^y(z)|$ 在 x 附近有界, 与 ϵ 无关, 即调和函数的梯度估计, 下一讲用均值性质证明.)

第三步: 类似可证明 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{右} = -u(y)$. 于是 $v(x) = u(y) \Rightarrow G(y, x) = G(x, y)$. □

半空间上的 Dirichlet 问题 — 静电像法

- $$u(x) = - \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}(y)} d\sigma(y), \quad \forall x \in \Omega$$
 , 其中 $\frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}(y)} = D_y G(x,y) \cdot \mathbf{n}(y)$, $\mathbf{n}(y)$ 为 $y \in \partial\Omega$ 处外单位法向,
 $G(x,y) \doteq \Phi(x-y) - \phi^x(y)$,

$$(\spadesuit) \text{ 在 } \Omega \text{ 内 } \Delta \phi^x(y) = 0, \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上 } \phi^x(y) = \Phi(x-y), \quad \Phi(x) = \phi(|x|) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}, & n=2, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases},$$

$$-\Delta_y G(x,y) = \delta_x, G(x,y)|_{y \in \partial\Omega} = 0$$

- 问题: $\begin{cases} \Delta \phi^x(y) = 0 & \text{在 } \mathbb{R}_+^n \doteq \{z = (z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) \in \mathbb{R}^n : z_n > 0\} \text{ 内,} \\ \phi^x(y) = \Phi(x-y) & \text{在 } \partial\mathbb{R}_+^n = \{z = (z_1, \dots, z_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n\} \text{ 上,} \end{cases}$ 这里 $x \in \mathbb{R}_+^n$ 是参数.

解: 设 $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$, 记 $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$ 是 x 关于坐标平面 $\{x_n = 0\}$ 的镜像对称点, 则解 $\phi^x(y) = \Phi(\bar{x} - y)$. □

总结 — 基本思想: 由 $G(x,y)$ 的物理意义, 利用基本解 (点电荷) 和区域的对称性, 放置镜像电荷 (可正可负), 使得在边界抵消位于 x 点的电荷的影响.

• Green 函数 (以 $n \geq 3$ 为例)

$$G(x, y) = \Phi(x - y) - \Phi(\bar{x} - y) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2}} \right) \cdot \mathbf{n} = (0, \dots, 0, -1).$$

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}(y)} \Big|_{y_n=0} = - \frac{\partial G(x, y)}{\partial y_n} \Big|_{y_n=0} =$$

$$= \frac{1}{\omega_n} (|x - y|^{-n}(x_n - y_n) + |\bar{x} - y|^{-n}(x_n + y_n)) \Big|_{y_n=0} = \frac{1}{\omega_n} \frac{-2x_n}{|x-y|^n} \Big|_{y_n=0}.$$

• 结论: 问题 $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{在 } \mathbb{R}_+^n \text{ 内,} \\ u = g & \text{在 } \partial \mathbb{R}_+^n \text{ 上} \end{cases}$ 的解为 (Poisson 公式)

$$u(x) = \frac{2x_n}{\omega_n} \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} \frac{g(y)}{|x - y|^n} d\sigma(y). \quad (d\sigma(y) = dy', y' \in \mathbb{R}^{n-1}, y = (y', y_n). \text{ 对}$$

$y \in \partial \mathbb{R}_+^n$, 下面也将 $g(y)$ 写作 $g(y')$. 这种写法不严格, 但比较方便.)

定理 (半空间上 Laplace 方程 Dirichlet 问题经典解的存在性)

设 $g \in C \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, 对 $x \in \mathbb{R}_+^n$, 置

$$u(x) = \frac{2x_n}{\omega_n} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \frac{g(y)}{|x-y|^n} d\sigma(y) = \frac{2x_n}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{g(y')}{|x-(y',0)|^n} dy'. \quad \text{结论:}$$

i) $u \in C^\infty \cap L^\infty(\mathbb{R}_+^n)$; ii) 在 $\mathbb{R}_+^n$ 内 $\Delta u = 0$;

iii) $\lim_{x \rightarrow x^0, x \in \mathbb{R}_+^n} u(x) = g(x^0), \forall x^0 \in \partial\mathbb{R}_+^n$.

- 记 $y = (y', y_n)$. Poisson 核 $K(x, y) \doteq \frac{\partial G(x, y)}{\partial y_n} = \frac{2x_n}{\omega_n} \frac{1}{|x-y|^n}$, 显然 K 关于 $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(x, x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ 是 C^∞ 光滑的,

$u(x) = \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} g(y) K(x, y) d\sigma(y)$. 由 Green 函数的对易性和光滑性 (直接验证!), 以及混合偏导数的换序性, $\Delta_x K(x, y) = -\Delta_x \frac{\partial G(x, (y', y_n))}{\partial y_n} = -\frac{\partial}{\partial y_n} (\Delta_x G(x, y)) \equiv 0$.

复习 [混合偏导数换序性, 华东师大《数学分析》第四版下册定理 17.7] 设二元函数 $f(x, y)$ 的二阶混合偏导函数

$f_{xy}(x, y)$ 和 $f_{yx}(x, y)$ 都在点 (x_0, y_0) 连续, 则 $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$. 此处用于 G 的三阶偏导数换序.

- 注意 $K(x, y) > 0$, 由比较判别法, 可知 $\forall x \in \mathbb{R}_+^n$, 无界区域的反常积分 $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(x, (y', 0)) dy'$ 收敛, 且由 Green 函数的性质, 可猜测其值为 1 (严格证明留作习题). 由此即得到 $|u(x)| \leq \|g\|_{L^\infty} \Rightarrow \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^n)} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})}$. 类似可证 $\forall h > 0$, 反常积分 $u(x) \doteq \frac{2x_n}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{g(y')}{|x - (y', 0)|^n} dy'$ 关于满足 $1/h \geq x_n \geq h$ 的 x 一致收敛. 由求导后一致收敛的含参变量反常积分的可微性, 可知 $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$, 且 $\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(y') \Delta_x K(x, (y', 0)) dy' = 0$.

复习 [求导与反常积分换序, 华东师大《数学分析》第四版下册定理 19.11]

设 $f(x, y)$ 与 $f_x(x, y)$ 在区域 $I \times [c, \infty)$ 上连续. 若 $\Phi(x) = \int_c^\infty f(x, y) dy$ 在 I 上收敛, $\int_c^\infty f_x(x, y) dy$ 在 I 上一致收敛,

则 $\Phi(x)$ 在 I 上可微, 且 $\Phi'(x) = \int_c^\infty f_x(x, y) dy$. [无界区域的反常积分收敛概念] $\Phi(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_c^M f(x, y) dy, x \in I$ [反常积分一致收敛概念]

$\forall \epsilon > 0, \exists N > c, \forall M > N, \forall x \in I \Rightarrow \left| \Phi(x) - \int_c^M f(x, y) dy \right| \leq \epsilon$ [反常积分一致收敛的 Weierstrass 判别法]

设有函数 $g(y)$ 使得 $|f(x, y)| \leq g(y), \forall (x, y) \in I \times [c, \infty)$, 若 $\int_c^\infty g(y) dy$ 收敛, 则 $\int_c^\infty f(x, y) dy$ 在 I 上一致收敛.

要点: 数学分析提供了典型情形的结论和证明方法, 实际应用中需结合具体情况加以推广 (所以不但要知道结论, 更要学会证明中体现的关键点和方法. 例如对于积分变量 $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, 局部化为 $\int_{A_n \leq |y| < A_{n+1}} f(x, y) dy$, 用普通含参变量积分求导定理, 再用一致收敛函数项级数逐项求导定理, 修改原证明即可)

— 应用时注意: “关于变量 x 可微” 是局部性质, 只需考虑变量 $x \in I$, 其中 I 是在 $\mathbb{R}_+^n$ 内平行于坐标轴的小的正方体. 于是可以找到 $x_0 \in I$, 以及 Weierstrass 控制函数 $|D_x^k K(x, (y', 0))| \leq C(|x_0 - (y', 0)|^{-n-k} + |x_0 - (y', 0)|^{-n}) \sim O(|y'|^{-n})$ (当 $|y'| \rightarrow \infty$ 时), 注意到 $y' \in \mathbb{R}^{n-1}$, 从而 $\int_{|y'| \geq 1} |y'|^{-n-k} dy' = C_n \int_1^\infty r^{-2-k} dr$ 对 $k \geq 0$ 都收敛 (用了球坐标!).

- 验证边值条件: $\lim_{x \rightarrow x^0, x \in \mathbb{R}_+^n} u(x) = g(x^0), \forall x^0 \in \partial \mathbb{R}_+^n$.

难点: 不能直接用极限和含参反常积分换序 (被积函数有奇性). 关键点: 利用被积函数具体形态, 将积分区域分解: 当 $y = (y', 0)$ 在 x^0 附近时用 g 的连续性得到小性, 以及 Poisson 核的可积性; 当 $y = (y', 0)$ 远离 x^0 时用 $x \rightarrow x^0$ 得到小性, 以及 Poisson 核的快速衰减性.

证明. 1. 取定 $x^0 \in \partial \mathbb{R}_+^n$. $\forall \epsilon > 0$, 由边值函数 g 的连续性, $\exists \delta > 0$ 使得对 $y \in \partial \mathbb{R}_+^n$, 当 $|y - x^0| \leq \delta$ 时 $|g(y) - g(x^0)| \leq \epsilon$ (♣). 利用 $\int_{\partial \mathbb{R}_+^n} K(x, y) d\sigma(y) \equiv 1$ 以及函数 $K(x, y) \geq 0$, 有 $|u(x) - g(x^0)| = \left| \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} K(x, y)(g(y) - g(x^0)) d\sigma(y) \right| \leq \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} K(x, y)|g(y) - g(x^0)| d\sigma(y) \doteq I + J$.

$$\bullet 2. I \doteq \int_{\partial \mathbb{R}_+^n \cap B_\delta(x^0)} K(x, y) |g(y) - g(x^0)| \, d\sigma(y) \xrightarrow{(\clubsuit)} \leq \int_{\partial \mathbb{R}_+^n \cap B_\delta(x^0)} K(x, y) \epsilon \, d\sigma(y) \leq \epsilon.$$

$$\bullet 3. J \doteq \int_{\partial \mathbb{R}_+^n \setminus B_\delta(x^0)} K(x, y) |g(y) - g(x^0)| \, dy \leq 2 \|g\|_{L^\infty} \int_{\partial \mathbb{R}_+^n \setminus B_\delta(x^0)} K(x, y) \, d\sigma(y) =$$

$$\frac{4\|g\|_{L^\infty}}{\omega_n} x_n \int_{\partial \mathbb{R}_+^n \setminus B_\delta(x^0)} \frac{1}{|x-y|^n} \, d\sigma(y)$$

$$\frac{x^0, y \in \partial \mathbb{R}_+^n, |y-x^0| > \delta, |x-x^0| \leq \delta/2 \Rightarrow |y-x|^{-n} \leq (|y-x^0|/2)^{-n}}{\text{若 } |x-x^0| \leq \frac{\delta}{2}, \text{ 结合 } |y-x^0| > \delta \Rightarrow |y-x^0| \leq |y-x| + |x^0-x| \leq |y-x| + \frac{\delta}{2} \leq |y-x| + \frac{1}{2}|y-x^0| \Rightarrow |y-x| \geq \frac{1}{2}|y-x^0|} \rightarrow \leq$$

$$c_n \|g\|_{L^\infty} x_n \int_{\partial \mathbb{R}_+^n \setminus B_\delta(x^0)} \frac{1}{|x^0-y|^n} \, d\sigma(y) = c_n \|g\|_{L^\infty} x_n \int_{\mathbb{R}^{n-1} \setminus B_\delta(0)} \frac{1}{|y'|^n} \, dy' =$$

$$c_n \|g\|_{L^\infty} x_n \int_\delta^\infty \frac{1}{r^n} r^{n-2} \, dr = \frac{c_n \|g\|_{L^\infty}}{\delta} x_n \rightarrow 0 \text{ (当 } x \rightarrow x^0, \text{ 从而 } x_n \rightarrow 0 \text{ 时)}.$$

• 4. 于是证明了 $\forall \epsilon > 0$, 成立

$$\limsup_{x \rightarrow x^0, x \in \mathbb{R}_+^n} |u(x) - g(x^0)| \leq \epsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x^0, x \in \mathbb{R}_+^n} |u(x) - g(x^0)| = 0. \text{ 证毕!}$$

- 从实分析角度理解定理结论: 记 $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $P(x') = \frac{2}{\omega_n} \frac{1}{(1+|x'|^2)^{n/2}}$, 作伸缩变换族 $P_{x_n}(x') \doteq \frac{1}{(x_n)^{n-1}} P(\frac{x'}{x_n})$, 则 $u(x) = P_{x_n} * g(x')$ (卷积).
- 定理的意义: 解决物理问题; 数学上, 连续函数用光滑函数 (解析函数) 逼近.

球上的 Dirichlet 问题 — 静电像法

- $$u(x) = - \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}(y)} d\sigma(y), \quad \forall x \in \Omega,$$
 其中 $\frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}(y)} = D_y G(x,y) \cdot \mathbf{n}(y)$, $\mathbf{n}(y)$ 为 $y \in \partial\Omega$ 处外单位法向, $G(x,y) \doteq \Phi(x-y) - \phi^x(y)$,

$$(\spadesuit) \text{ 在 } \Omega \text{ 内 } \Delta \phi^x(y) = 0, \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上 } \phi^x(y) = \Phi(x-y), \quad \Phi(x) = \phi(|x|) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}, & n=2, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases},$$

$$-\Delta_y G(x,y) = \delta_x, \quad G(x,y)|_{y \in \partial\Omega} = 0$$

- 问题:
$$\begin{cases} \Delta \phi^x(y) = 0 & \text{在 } B_1(0) \subset \mathbb{R}^n \text{ 内,} \\ \phi^x(y) = \Phi(x-y) & \text{在 } \partial B_1(0) \text{ 上,} \end{cases}$$
 这里 $x \in B_1(0)$ 是参量.

物理提法: 在球外某点放适当电量的点电荷, 使得其电场在球面的电势与在 x 点的单位点电荷产生的电势相同.

解: $x \neq 0$ 关于单位球面 ∂B_1 的对称点 (反演点) $\tilde{x} \doteq \frac{x}{|x|^2}$, 在 $\tilde{x}$ 放电量为 ρ 的点电荷, 置 $\phi^x(y) = \rho\Phi(y - \tilde{x})$, 由于 $\tilde{x}$ 在球外, $\phi^x(y)$ 在 B_1 内调和. 现求 ρ 使得当 $y \in \partial B_1$ 时 $\rho\Phi(y - \tilde{x}) = \Phi(y - x)$. 当 $n \geq 3$ 时, 即要求

$$\frac{\rho}{|y - \tilde{x}|^{n-2}} = \frac{1}{|y - x|^{n-2}} \Leftrightarrow \rho = \left(\frac{|y - \tilde{x}|}{|y - x|} \right)^{n-2} \Big|_{|y|=1} = \frac{1}{|x|^{n-2}} \quad ((\diamond) \text{ 这里利用内积计算出})$$

$$\left(\frac{|y - \tilde{x}|^2}{|y - x|^2} \right) \Big|_{|y|=1} = \frac{1 - 2(y, \frac{x}{|x|^2}) + \frac{1}{|x|^2}}{1 - 2(y, x) + |x|^2} = \frac{1}{|x|^2} \Rightarrow \phi^x(y) = \frac{1}{|x|^{n-2}} \Phi(y - \tilde{x}) = \Phi(|x|(y - \tilde{x})).$$

对 $n = 2$ 情形, 虽然前一表达式无意义, 但后一表达式仍有效, 依然成立

$$\phi^x(y) = \Phi(|x|(y - \tilde{x})) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x||y - \tilde{x}|}. \quad (\text{对 } x = 0 \text{ 情形, 此处方法不成立, 但不影响最终结果. 注意: 这里的目的是还是在推理猜想出合理的公式.})$$

$n = 3$ 时构造源于物理启发, $n > 3$ 和 $n = 2$ 时源于数学的推广!

- Green 函数 $G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi(|x|(y - \tilde{x}))$. 下面计算

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}(y)} \Big|_{|y|=1} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial G(x, y)}{\partial y_i} \cdot y_i \Big|_{|y|=1} \cdot (\text{在 } \partial B_1 \text{ 上 } \mathbf{n} = y.)$$

$$\Phi_{y_i}(y - x) = \frac{1}{\omega_n} \frac{x_i - y_i}{|x - y|^n}, \text{ 又 } (\diamond) \Rightarrow |y| = 1 \text{ 时}$$

$$|x|^2 |y - \tilde{x}|^2 = |y - x|^2 \Rightarrow \partial_{y_i} \Phi(|x|(y - \tilde{x})) = \frac{-1}{\omega_n} \frac{y_i |x|^2 - x_i}{(|x|(y - \tilde{x}))^n} \Rightarrow \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}(y)} \Big|_{|y|=1} =$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial G(x, y)}{\partial y_i} \cdot y_i \Big|_{|y|=1} = \frac{-1}{\omega_n} \frac{1}{|x - y|^n} \sum_{i=1}^n y_i [(y_i - x_i) - (y_i |x|^2 - x_i)] = \frac{-1}{\omega_n} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^n}.$$

- Poisson 核 $K(x, y) = - \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}(y)} \Big|_{|y|=1} = \frac{1}{\omega_n} \frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}$, 则问题 $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{在 } B_1(0) \text{ 内,} \\ u = g & \text{在 } \partial B_1(0) \text{ 上} \end{cases}$ 的解为 $u(x) = \int_{|y|=1} K(x, y) g(y) \, d\sigma(y) = \frac{1-|x|^2}{\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \frac{g(y)}{|x-y|^n} \, d\sigma(y)$.

- 结论: 问题 $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{在 } B_R(\hat{x}) \text{ 内,} \\ u = g & \text{在 } \partial B_R(\hat{x}) \text{ 上} \end{cases}$ 的解为

$$u(x) = \frac{R^2 - |x - \hat{x}|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B_R(\hat{x})} \frac{g(y)}{|x - y|^n} \, d\sigma(y). \quad (\spadesuit)$$

解: 作平移和伸缩变换 $\tilde{u}(x') = u(Rx' + \hat{x})$, $\tilde{g}(x') = g(Rx' + \hat{x})$, 则 $\tilde{u}$ 满足单位球上的 Dirichlet 问题, 用相应公式 ($x = Rx' + \hat{x} \in B_R(\hat{x}) \Leftrightarrow x' \in B_1(0)$). □

定理 (球上 Laplace 方程 Dirichlet 问题经典解的存在性)

设 $g \in C(\partial B_R(\hat{x}))$, 则 ($\spadesuit$) 定义了函数 $u(x)$, 具有如下性质: *i*) $u \in C^\infty(B_R(\hat{x}))$; *ii*) 在 $B_R(\hat{x})$ 内 $\Delta u = 0$; *iii*) $\forall x^0 \in \partial B_R(\hat{x})$, 有 $\lim_{x \rightarrow x^0, x \in B_R(\hat{x})} u(x) = g(x^0)$.

证明: 习题.

- 意义: 解决物理问题; 数学角度, 球面上连续函数到球内的光滑 (解析) 延拓; 球面上连续函数的光滑 (解析) 逼近.

习题 1. 对 $n = 2$ 情形补充讲义中的计算.

习题 2. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是具有光滑边界的有界区域, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 在 Ω 内调和: $\Delta u = 0$. 证明:

$$-\int_{\partial\Omega} \left(u(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(y)} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) - \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma(y) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \\ 4\pi u(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

[注意: 当 $x \in \partial\Omega$ 时左侧第一型曲面积分的收敛性判别较为复杂, 故不考虑.]

习题 3. 证明: 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界光滑区域, Neumann 问题
$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \end{cases}$$
 存在经典解, 则

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\partial\Omega} g(y) d\sigma(y).$$

习题 4. 证明 $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(x, (y', 0)) dy' = 1$, 这里 $K(x, y) = \frac{2x_n}{\omega_n |x-y|^n}$ 是上半空间的 Poisson 核, $y = (y', y_n)$.

提示: i). 记 $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $P(x') = \frac{2}{\omega_n} \frac{1}{(1+|x'|^2)^{n/2}}$. 证明: $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} P(x') dx' = 1$. ii) 对 $x_n > 0$, 令 $P_{x_n}(x') = \frac{1}{(x_n)^{n-1}} P(\frac{x'}{x_n})$, 证明: $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} P_{x_n}(x') dx' = 1$. iii). 证明: 设 $x = (x', x_n)$, 则 $K(x, (y', 0)) = P_{x_n}(x' - y')$.

[注意: i) 要用到如下结论: $\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积为 $\alpha_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$, 其表面积 $\omega_n = n\alpha_n$. Euler 积分

$$B(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^{2q-1} \theta \cos^{2p-1} \theta d\theta = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, p > 0, q > 0, \text{ 而 } \Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, s > 0; \Gamma(s+1) = s\Gamma(s), s \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.]$$

阅读任务和作业

- 必读 — 郇中丹, 黄海洋: 偏微分方程 (第二版), 高等教育出版社, 2013. [pp.207–212]
- 作业: p. 212: 4, 5; 球上 Laplace 方程 Dirichlet 问题经典解的存在性的完整证明.

最后更新: 2022-11-16

偏微分方程

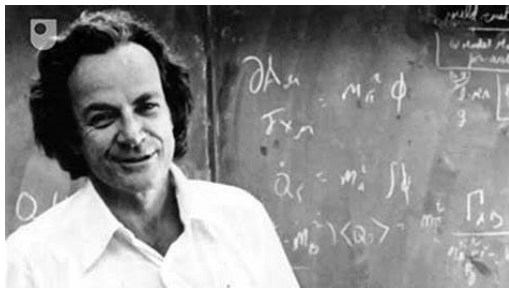
第十讲 调和函数的性质

袁海荣 (华东师范大学 数学科学学院)

2022 年 11 月 8 日

在科学界,只要是出现在我们面前而还没有解决的问题,我们却有办法向答案推进一点,这就是伟大的问题。我倒是想建议你,先找一些更简单的,或者如你说的,更卑微的问题,让你可以轻易解决掉。不管问题有多么平凡都没关系,你会尝到成功的喜悦;而且要经常协助同事,就算回答那些能力不如你的人所提的问题,都是值得做的,都会累积自己的成就感。不要因为“什么问题没意思、什么问题才有价值”这种错误想法,而一直闷闷不乐,剥夺了自己对成功的喜悦。

——《致学生真野光一》 *Richard Phillips Feynman* (1918 年 5 月 11 日—1988 年 2 月 15 日)



传记: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Feynman/n>

学习要点

- 熟练掌握调和函数的性质及其证明
- 复习复变函数知识, 准确把握调和函数与全纯函数的相似与不同之处
- 体会拓扑性质对于从局部分析性质过渡到大范围结论的重要性

平均值性质与强极值原理

定义 (平均值性质)

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, 称函数 $u \in C(\Omega)$ 具有平均值性质, 如果对任意的球 $B_R(x) \subset \Omega$, 有 $u(x) = \frac{1}{|B_R(x)|} \int_{B_R(x)} u(y) dy$.

定理 (平均值性质与强极值原理)

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界连通开集, $u \in C(\bar{\Omega})$ 具有平均值性质, 则除非 u 是常数, 它在 Ω 内不可能取到最大值和最小值.

- **从积分性质到点态性质:** 设 $f \geq 0$ 是开集 Ω 上的连续函数, 且 $\int_{\Omega} f(x) dx = 0$, 则在 Ω 上 $f \equiv 0$.

证明. 反证法. 若 $\exists x^0 \in \Omega$ 使得 $f(x^0) > 0$, 则由连续函数保号性, 存在 $r > 0$ 使得 $B_r(x^0)$ 上

$f(x) \geq f(x^0)/2 \Rightarrow 0 = \int_{\Omega} f(x) dx \geq \int_{B_r(x^0)} f(x) dx \geq f(x^0)r^n \alpha_n / 2 > 0$ (α_n 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球体的体积). 矛盾! □

关键点: 拓扑—利用连通性从局部到整体, 利用紧性保证定义合理性. 以证明最大值情形为例. (对最小值可类似证明.)

- **第一步:** 置 $M \doteq \sup_{y \in \bar{\Omega}} u(y)$, 作 $U = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$. 由于 $\bar{\Omega}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中有界闭集, 从而是紧集, 利用紧集上连续函数必取到最大值和最小值, $M < \infty$, 从而 U 的定义合理. 下面证明 U 既开又闭, 故由 Ω 的连通性, 得知 $U = \emptyset$ (最大值不在 Ω 内取到) 或 $U = \Omega$ ($u \equiv M$ 是常数).
- **复习:** 拓扑空间, 拓扑子空间; 连通集 — 非空的既开又闭的子集必是全集的拓扑空间; 道路连通集 — 任意两点可用落在其中的连续曲线连接的拓扑空间; 定理: 欧氏空间的开子集是连通的当且仅当它是道路连通的. 参考: 袁海荣编《点集拓扑学讲义》第十一讲 <http://math.ecnu.edu.cn/hryuan/preprint/tp.pdf>
- **第二步:** 现设 $U \neq \emptyset$. 由于 u 是连续函数, 则 U 作为闭集 $\{M\}$ 的原像也是 (Ω 中的) 闭集.
- **第三步:** 再证 U 是开集. 现设 $\hat{x} \in U \subset \Omega$. 由于 Ω 是开集, $\exists R > 0$ 使得 $B_R(\hat{x}) \subset \Omega$. 平均值性质

$$\Rightarrow M = u(\hat{x}) = \frac{1}{|B_R(\hat{x})|} \int_{B_R(\hat{x})} u(y) \, dy \leq \frac{1}{|B_R(\hat{x})|} \int_{B_R(\hat{x})} M \, dy = M \Rightarrow \int_{B_R(\hat{x})} \underbrace{(M - u(y))}_{\geq 0} \, dy = 0 \Rightarrow$$

$$M - u(y) \equiv 0, \forall y \in B_R(\hat{x}) \Rightarrow B_R(\hat{x}) \subset U, U \text{ 开}.$$

调和函数与平均值性质

定理 (球上 Laplace 方程 Dirichlet 问题经典解的存在性)

设 $g \in C(\partial B_R(\hat{x}))$, 则(♠) $u(x) = \frac{R^2 - |x - \hat{x}|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B_R(\hat{x})} \frac{g(y)}{|x - y|^n} d\sigma(y)$ 具有性质:

i) $u \in C^\infty(B_R(\hat{x}))$; ii) 在 $B_R(\hat{x})$ 内 $\Delta u = 0$; iii) $\forall x^0 \in \partial B_R(\hat{x})$,

$\lim_{x \rightarrow x^0, x \in B_R(\hat{x})} u(x) = g(x^0).$

定理 (调和函数与平均值性质)

u 是 Ω 内的调和函数 (即 $\Delta u = 0$) $\Leftrightarrow u$ 在 Ω 内具有平均值性质.

- $\Rightarrow$ 复习 Laplace 方程球上 Dirichlet 问题解的 Poisson 公式, 设 $B_R(\hat{x}) \subset \Omega$, 在 ($\spadesuit$) 中取 $x = \hat{x}$ 得

到 调和函数关于球面的平均值公式 $u(\hat{x}) = \frac{1}{|\partial B_R(\hat{x})|} \int_{\partial B_R(\hat{x})} u(y) \, d\sigma(y)$, 注意到对 $r \leq R$, 都有 $B_r(\hat{x}) \subset \Omega \Rightarrow u(\hat{x}) \omega_n r^{n-1} = \int_{\partial B_r(\hat{x})} u(y) \, d\sigma(y)$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^R u(\hat{x}) \omega_n r^{n-1} \, dr}_{=u(\hat{x}) \alpha_n R^n} = \underbrace{\int_0^R \int_{\partial B_r(\hat{x})} u(y) \, d\sigma(y) \, dr}_{=\int_{B_R(\hat{x})} u(y) \, dy} \Rightarrow$$

调和函数关于球体的平均值公式 $u(\hat{x}) = \frac{1}{|B_R(\hat{x})|} \int_{B_R(\hat{x})} u(y) \, dy$. (注意: 反之, 利用求导可从关于球体的平均值性质得到关于球面的平均值性质! 此外, 记 $\alpha_n = \omega_n/n$, 它是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球体的体积.)

- $\Leftarrow$ 设 $B_R(\hat{x}) \subset \Omega$, 用 Poisson 公式解 Dirichlet 问题
$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{在 } B_R(\hat{x}) \text{ 内,} \\ v = u & \text{在 } \partial B_R(\hat{x}) \text{ 上,} \end{cases} \quad \text{则}$$

 u, v 都满足平均值性质 $\Rightarrow w = u - v$ 在 $B_R(\hat{x})$ 上有平均值性质且在 $\partial B_R(\hat{x})$ 上为零 $\xrightarrow{\text{具平均值性质函数的极值原理}} w \equiv 0 \Rightarrow$ 在 $B_R(\hat{x})$ 内 $u \equiv v \Rightarrow u \in C^\infty(B_R(\hat{x}))$ 是调和函数 (即满足 $\Delta u = 0$).

强极值原理和比较原理

● 推论 — 调和函数的强极值原理:

设 Ω 是有界区域, 在 Ω 上 $\Delta u = 0$, 则 u 的最大值和最小值在边界 $\partial\Omega$ 取到;

如果在 Ω 内取到最大值或最小值, 则 u 是常数. 思考: 非常数的调和函数是否会在 Ω 内取到极小值或极大值?

● 推论 — 上调和函数的强极值原理: 设 Ω 是有界区域, 在 Ω 上 $\Delta u \leq 0$, 则 i) $\forall B_R(\hat{x}) \subset \Omega$, 有 $u(\hat{x}) \geq \frac{1}{|B_R(\hat{x})|} \int_{B_R(\hat{x})} u(y) dy$; ii) $\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$ (u 在 $\bar{\Omega}$ 上的最小值在 $\partial\Omega$ 取到; 若在 Ω 内取到, 必为常数).

● 推论 — 下调和函数的强极值原理: 设 Ω 是有界区域, 在 Ω 上 $\Delta u \geq 0$, 则 $\forall B_R(\hat{x}) \subset \Omega$, 有 $u(\hat{x}) \leq \frac{1}{|B_R(\hat{x})|} \int_{B_R(\hat{x})} u(y) dy$, 且 $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$ (即 u 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大值在 $\partial\Omega$ 取到; 若在 Ω 内取到, 必为常数).

上调和函数的强极值原理的证明: i) 在第八讲用第二 Green 公式得到

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) d\sigma(y) - \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}(y)}(x-y) d\sigma(y) - \int_{\Omega} \Delta u(y) \Phi(x-y) dy,$$

现取 $\Omega = B_R(\hat{x})$, $x = \hat{x}$, 得到 (回忆 $\phi(|x|) = \Phi(x)$, $\phi(r)$ 关于 r 单调递减) $u(\hat{x}) =$

$$\underbrace{\int_{|y-\hat{x}|=R} \Phi(\hat{x}-y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) d\sigma(y)}_{=\phi(R) \int_{\partial B_R(\hat{x})} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) d\sigma(y) = \phi(R) \int_{B_R(\hat{x})} \Delta u(y) dy} - \underbrace{\int_{|y-\hat{x}|=R} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}(y)}(\hat{x}-y) d\sigma(y)}_{=-\omega_n^{-1} R^{1-n}, \text{第八讲已计算过}}$$

$$\int_{B_R(\hat{x})} \underbrace{\Delta u(y) \Phi(\hat{x}-y)}_{\text{需与第一项合并才能放缩}} dy = \int_{B_R(\hat{x})} \underbrace{[\phi(R) - \Phi(\hat{x}-y)]}_{\leq 0} \underbrace{\Delta u(y)}_{\leq 0} dy +$$

$\frac{1}{|\partial B_R(\hat{x})|} \int_{\partial B_R(\hat{x})} u(y) d\sigma(y) \geq \frac{1}{|\partial B_R(\hat{x})|} \int_{\partial B_R(\hat{x})} u(y) d\sigma(y)$. 再用前面讲过的通过对 r 积分, 得到关于球体的均值不等式. ii) 用与前面相同的证明方法 (习题).

- **比较原理**: 在有界区域 Ω 上 $\Delta u \geq \Delta v$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u \leq v$, 则在 Ω 内 $u \leq v$.
(证: 对 $u - v$ 用下调和函数的强极值原理.)

可去奇点定理

定理

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$), $\hat{x} \in \Omega$, 函数 u 在 $\Omega \setminus \{\hat{x}\}$ 上是调和函数, 且 $\lim_{x \rightarrow \hat{x}} |x - \hat{x}|^{n-2} u(x) = 0$, 则可在 $\hat{x}$ 点定义 u 的取值, 使得 u 在 Ω 上是调和函数.

- 关键: 截断区域 + 逼近; 比较原理; 球上 Dirichlet 问题的解; 基本解与调和函数的局部奇性
- 不妨设 $\hat{x} = 0$, 取球 $B_R = B_R(O) \subset \Omega$, 求解 Dirichlet 问题: 在 B_R 内 $\Delta v = 0$, 在 ∂B_R 上 $v = u$. 下面证明在 $B_R \setminus \{0\}$ 上 $u \equiv v$, 从而可定义 $u(0) = v(0)$, 使得 u 在 Ω 上处处调和.

- 置 $w \doteq u - v$, 则在 $B_R \setminus \{0\}$ 内 $\Delta w = 0$, 在 ∂B_R 上 $w = 0$. 由于 v 有界, 还成立 $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{n-2} w(x) = 0$. 作比较函数 $w_\varepsilon(x) = \varepsilon \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}} \right)$, (参数 $\varepsilon > 0$), 则在 $B_R \setminus \{0\}$ 内 $\Delta w_\varepsilon = 0$, 在 ∂B_R 上 $w_\varepsilon = 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{n-2} w_\varepsilon(x) = \varepsilon > 0$ ($\heartsuit$).
- $\forall x_0 \in B_R \setminus \{0\}$, 取定 $r \in (0, R)$ 充分小使得 $|x_0| > r$, 且由 ($\heartsuit$), 在 $|x| = r$ 上 $w_\varepsilon > w$. 于是, 在 $B_R \setminus B_r$ 内 $\Delta(w_\varepsilon - w) = 0$, 在 ∂B_R 上 $w_\varepsilon - w = 0$, 在 ∂B_r 上 $w_\varepsilon - w > 0$. 极值原理 $\Rightarrow w \leq w_\varepsilon$. 类似可证明 (习题)
 $w \geq -w_\varepsilon \Rightarrow |w| \leq w_\varepsilon \Rightarrow |w(x_0)| \leq w_\varepsilon(x_0) \rightarrow 0 (\varepsilon \rightarrow 0) \Rightarrow w(x_0) = 0 \xrightarrow{x_0 \text{ 的任意性}}$
 $w(x) = 0, \forall x \in B_R \setminus \{0\}$. □

Harnack 不等式

定理 (非负调和函数的 Harnack 不等式)

设 u 是区域 Ω 上的 **非负** 调和函数. 结论: $\forall$ 连通开集 $\Omega' \subset\subset \Omega$, $\exists$ 常数 $C = C(n, \Omega, \Omega')$ 使得 $\max_{\overline{\Omega'}} u \leq C \min_{\overline{\Omega'}} u$.

- 记号: $\overline{\Omega'}$ — Ω' 的闭包; $\Omega' \subset\subset \Omega$ — 指 $\overline{\Omega'}$ 是紧集, 且 $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. (该条件保证可用正规空间的分离性质, 如 Urysohn 引理和 Tietze 扩张定理, 构造用于局部化的截断函数.)
- 证明: 第一步 — 局部, 用球上的 Poisson 公式

$$u(x) = \frac{R^2 - |x - \hat{x}|^2}{n\alpha_n R} \int_{\partial B_R(\hat{x})} \frac{u(y)}{|x - y|^n} d\sigma(y);$$
 第二步 — 整体, 用区域的道路连通性.

• 设 $\Omega = B_{R+\epsilon}(\hat{x})$ ($\epsilon > 0$), 由条件和结论的平移不变性, 不妨设 $\hat{x} = O$. 任取

$x \in B_R = B_R(O)$, 则 $u(x) = \frac{R^2-|x|^2}{n\alpha_n R} \int_{\partial B_R} \frac{u(y)}{|x-y|^n} d\sigma(y)$. 对任意的 $y \in \partial B_R$, 有

$$R - |x| \leq |x - y| \leq R + |x| \Rightarrow \frac{R^2-|x|^2}{n\alpha_n R} \frac{1}{(R+|x|)^n} \leq \frac{R^2-|x|^2}{n\alpha_n R} \frac{1}{|x-y|^n} \leq$$

$$\frac{R^2-|x|^2}{n\alpha_n R} \frac{1}{(R-|x|)^n} \xrightarrow[\text{注意 } u(y) \geq 0]{\text{Poisson 公式}} \frac{R^2-|x|^2}{n\alpha_n R} \frac{1}{(R+|x|)^n} \int_{\partial B_R} u(y) d\sigma(y) \leq u(x) \leq$$

$$\frac{R^2-|x|^2}{n\alpha_n R} \frac{1}{(R-|x|)^n} \int_{\partial B_R} u(y) d\sigma(y) \xrightarrow[\text{调和函数均值性质}]{} \frac{R^2-|x|^2}{(R+|x|)^n} R^{n-2} u(O) \leq u(x) \leq$$

$$\frac{R^2-|x|^2}{(R-|x|)^n} R^{n-2} u(O) \Rightarrow \frac{1 - \left(\frac{|x|}{R}\right)^2}{\left(1 + \frac{|x|}{R}\right)^n} u(O) \leq u(x) \leq$$

$$\frac{1 - \left(\frac{|x|}{R}\right)^2}{\left(1 - \frac{|x|}{R}\right)^n} u(O) \xrightarrow[\text{若 } x \in B_{R/2} \Rightarrow |x| < R/2 \Rightarrow 0 \leq |x|/R < 1/2]{} \frac{1 - \frac{1}{4}}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} u(O) \leq u(x) \leq \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} u(O)$$

$$\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in B_{R/2}, u(x_1) \leq 2^n u(O) \leq 2^n \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{4}{3} u(x_2) \Rightarrow$$

$$u(x_1) \leq 4^n u(x_2), \forall x_1, x_2 \in B_{R/2}. \quad (\text{注: 也可用平均值性质证明此结论.})$$

- 已证明: 设 $u \geq 0$ 在球 B_R 内调和, 则 $u(x_1) \leq 4^n u(x_2), \forall x_1, x_2 \in B_{R/2}$ (✖).
(注意: 重要结论, 其中常数只依赖于空间维数 n , 与 R 无关!!)
- 要点: 利用道路和覆盖来构造“球串”. 体会拓扑概念及其性质对于严格陈述和证明数学定理的重要性.

- 1. 对一般的区域 (连通开集) Ω , 取定连通的开集 $\Omega' \subset\subset \Omega$, 记紧集 $K \doteq \overline{\Omega'}$. 由于欧氏空间是正规空间, 不相交闭集 $K, \partial\Omega$ 之间的距离 $R \doteq \text{dist}(\partial\Omega, K) > 0$ (任意子集的拓扑边界必是闭集, Ω 是开集, 故 $\Omega \cap \partial\Omega = \emptyset$, 而 $K \subset \Omega$).
- 1.1 对 K 作开覆盖 $\{B_{R/4}(x) : x \in K\}$, 由 K 的紧性, 存在其中 M 个球组成的球族 $\Lambda \doteq \{B_{R/4}(y_1), \dots, B_{R/4}(y_M)\}$ 覆盖 K . 注意 M 只依赖于 n, Ω', Ω .
- 1.2 对任意两点 $x, y \in K$, 可找到 $x' \in B_{R/4}(x) \cap \Omega', y' \in B_{R/4}(y) \cap \Omega'$. 由于已假设 Ω' 道路连通 (欧氏空间中的连通开集必道路连通), 则存在连续曲线 (道路) $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega'$ 连接 x', y' (即 $\gamma(0) = x', \gamma(1) = y'$). 注意 $\gamma = \gamma([0, 1]) \subset K$, 那么存在前述球族 Λ 中的 N 个球 ($N \leq M$), 记之为 $B_{(k)} = B_{R/4}(x_k), k = 1, \dots, N$. 注意 $B_{R/2}(x_k) \subset \Omega$, 故在球 $B_{(k)} = B_{R/4}(x_k)$ 内可用结论 (✕). (不需要球心 x_k 落在 γ 上.)

- 2. 不妨设 $x' \in B_{(1)}$. 称 $B_{(1)}$ 为第 1 类球; 在剩下的球中, 那些与第 1 类球相交的球叫作第 2 类球; 除去第 1 类和第 2 类球, 余下的球中和第 2 类球相交的球叫作第 3 类球. 依次定义, 将第 j 类球的集合记作 $\mathcal{S}_j$. 这个过程必然经过有限次后停止. 假设经过 J 次后, 找不到第 $J+1$ 类球. 此时, 如果还有某个球 $B_{(k)}$ 使得 $B_{(k)} \notin \mathcal{S}_j$ ($j = 1, \dots, J$), 将这样的球组成的集合叫作孤立球集, 记作 $\mathcal{S}_s$. 这样将所有 $\{B_{(k)}\}_{k=1}^N$ 划分为不相交的 $J+1$ 类.
- 3. 下面说明孤立的球不存在. 否则, 将所有第 j 类球 ($j = 1, \dots, J$) 并起来, 得到的开集和将 $\mathcal{S}_s$ 中球并起来得到的开集不相交, 它们与 γ 作交集, 于是 γ 被分为两个不交的非空开子集, 与 γ 的连通性矛盾 (连续映射将连通集映到连通集). 所以由上述做法, 必有 $\mathcal{S}_s = \emptyset$. 换句话说, 对任意球 $B_{(k)}$, 都存在 j 使得它是第 j 类球.

- 4. 若 $x', y' \in B_{R/4}(x_1)$, 直接用结论 (✕). 一般的, 由于 $\{B_{(k)}\}_{k=1}^N$ 是 γ 的覆盖, 存在 i 使得 $y' \in B_{(i)}$. 设 $B_{(i)}$ 是第 j 类球, 则存在第 s 类球 $B^{(s)}$ ($s = 1, \dots, j$), 使得 $x' \in B^{(1)} = B_{(1)}, y' \in B^{(j)} = B_{(i)}$, 且 $B^{(s-1)}$ 与 $B^{(s)}$ 相交 ($s = 2, \dots, j$). (注意: 下面的证明并不需要这串球 $\{B^{(s)}\}$ 覆盖曲线 γ .)
- 5. 现设 $y_s \in B^{(s-1)} \cap B^{(s)}$ ($s = 2, \dots, j$). 由于 $y_s, y_{s+1} \in B^{(s)}$, 用结论 (✕) 得到 $u(y_s) \leq C_n u(y_{s+1})$, 于是 $u(y_2) \leq C_n^{j-1} u(y_j) \Rightarrow u(x') \leq C_n u(y_2) \leq C_n^j u(y_j) \leq C_n^{j+1} u(y') \leq C_n^{N+1} u(y')$.
- 6. 这就证明了对任意 $x, y \in K$, 有 $u(x) \leq C(n) u(x') \leq C(n, \Omega, \Omega') u(y') \leq C(n) C(n, \Omega, \Omega') u(y) \Rightarrow \max_K u \leq C(n, \Omega, \Omega') u(y) \Rightarrow \max_K u \leq C(n, \Omega, \Omega') \min_K u$. Harnack 不等式证毕.

Liouville 定理

定理 (Liouville 定理)

$\mathbb{R}^n$ 上的有下界的调和函数必为常数.

- 设 u 是 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数, 若下确界 $m \doteq \inf_{\mathbb{R}^n} u > -\infty$ 在某点可达: $\exists \hat{x}$ 使得 $u(\hat{x}) = m$, 将强极值原理用于球 $B_R(\hat{x})$ 并由 R 可取任意大数的性质, 可知 $u \equiv m$.
- 设 m 仅在无穷远处达到: 极小化序列 $z_k \rightarrow \infty$ 使得 $u(z_k) \rightarrow m$. 现对任意点 $x \in \mathbb{R}^n$, 在球 $B_{R_k}(x)$ 上对非负调和函数 $v = u - m$ 用 Harnack 不等式 (取 R_k 充分大使得 $z_k \in B_{R_k}(x)$), 则 $0 \leq v(x) \leq 4^n v(z_k) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \Rightarrow v(x) = 0$. 由 x 的任意性, $v \equiv 0 \Rightarrow u \equiv m$. □

- 重要性: (1) Harnack 不等式和 Liouville 定理刻画了解的局部或大范围形态 (如局部 Blow-up 方法; 等截面直管中可压无旋亚音流必是均匀流等);
(2) 对一般的二阶椭圆型方程 (甚至非线性问题) 仍成立 (需要新的证明方法).

调和函数列一致收敛的完备性以及判别法

● 完备性定理:

设 $\{u_k\}$ 是 Ω 上的调和函数序列, 一致收敛到 u , 则函数 u 也在 Ω 上调和.

证明: 由于 u_k 在 Ω 上调和, 从而连续, $u_k \Rightarrow u \Rightarrow u \in C(\Omega)$ (连续函数列一致收敛的极限是连续函数, 华东师大《数学分析》下册 (第四版) 定理 13.9). 此外, u_k 满足均值性质 $\forall B_R(x) \subset \Omega$, 成立

$$u_k(x) = \frac{1}{|B_R(x)|} \int_{B_R(x)} u_k(y) dy \xrightarrow[\text{一致收敛下极限与积分换序}]{\text{华东师大《数学分析》下册 (第四版) 定理 13.10}} u(x) = \frac{1}{|B_R(x)|} \int_{B_R(x)} u(y) dy \Rightarrow u \text{ 具有平均值性质} \Rightarrow u \text{ 调和.}$$

□

调和函数列一致收敛的完备性以及判别法

• 完备性定理:

设 $\{u_k\}$ 是 Ω 上的调和函数序列, 一致收敛到 u , 则函数 u 也在 Ω 上调和.

证明: 由于 u_k 在 Ω 上调和, 从而连续, $u_k \Rightarrow u \Rightarrow u \in C(\Omega)$ (连续函数列一致收敛的极限是连续函数, 华东师大《数学分析》下册 (第四版) 定理 13.9). 此外, u_k 满足均值性质 $\forall B_R(x) \subset \Omega$, 成立

$$u_k(x) = \frac{1}{|B_R(x)|} \int_{B_R(x)} u_k(y) dy \xrightarrow[\text{一致收敛下极限与积分换序}]{\text{华东师大《数学分析》下册 (第四版) 定理 13.10}} u(x) = \frac{1}{|B_R(x)|} \int_{B_R(x)} u(y) dy \Rightarrow u \text{ 具有平均值性质} \Rightarrow u \text{ 调和.}$$

□

- Harnack 第一收敛定理: 设 $\{u_k\} \subset C(\bar{\Omega})$ 是有界区域 Ω 上的调和函数列, 且 $\{u_k|_{\partial\Omega}\}$ 一致收敛, 则 $\{u_k\}$ 在 Ω 上一致收敛到一个调和函数.

证明: 由强极值原理, $\max_{\bar{\Omega}} |u_k - u_m| = \max_{\partial\Omega} |u_k - u_m|$. 由定理条件, $\{u_k|_{\partial\Omega}\}$ 一致收敛 + Cauchy 收敛原理 $\Rightarrow$ 右端 $\rightarrow 0$ ($k, m \rightarrow \infty$) $\Rightarrow$ 左端 $\rightarrow 0 \Rightarrow \{u_k\}$ 是一致收敛拓扑下的 Cauchy 列 + 实数完备性 $\Rightarrow$ 极限 u 存在 + 上述完备性定理 $\Rightarrow u$ 是调和函数. □

复习 — 定理 (华东师大《数学分析》下册第四版定理 13.2): 函数列 $\{f_n\}$ 在区域 D 上一致收敛到 f 的充分必要条件为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

注: 定义最大模范数 $\|u\|_{C(\Omega)} \doteq \sup_{\Omega} |u|$, 则

$$u_k \rightrightarrows u \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_{C(\Omega)} = 0.$$

- Harnack 第二收敛定理: 设 $\{u_k\}$ 是区域 Ω 上的单调不减的调和函数列, 若它在 Ω 内一点收敛, 则它在 Ω 上内闭一致收敛到一个调和函数.

证明: 设 $\{u_k\}$ 在点 $\hat{x} \in \Omega$ 收敛. $\forall k > l$, 对非负函数列 $u_k - u_l$ 用 Harnack 不等式: 对包含 $\hat{x}$ 的任一紧集 $K \subset \Omega$,

$$\max_K(u_k - u_l) \leq C \min_K(u_k - u_l) \leq C(u_k(\hat{x}) - u_l(\hat{x})) \rightarrow 0 \Rightarrow \{u_k\} \text{ 在 } K \text{ 上一致收敛} \Rightarrow \{u_k\} \text{ 在 } \Omega \text{ 上内闭一致收敛.} \quad \square$$

调和函数列的紧性

定理 (紧性定理)

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, $\{u_k\}$ 是 Ω 上一致有界的调和函数列, 则它有内闭一致收敛的子列, 且该子列的极限还是调和函数.

- 梯度估计: 设函数 u 在 B_R 内调和且有界, 则 $\sup_{B_{R/2}} |Du| \leq \frac{C_n}{R} \sup_{B_R} |u|$.

证明: 由 $\Delta u = 0$ 和 Poisson 公式知 $u \in C^\infty(B_R) \Rightarrow D_i u$ 在 B_R 内调和

$$\xrightarrow[\text{均值性质 + 积分绝对值不等式}]{\forall x \in B_{R/2}} |D_i u(x)| = \frac{1}{|B_{R/2}(x)|} \left| \int_{B_{R/2}(x)} D_i u(y) dy \right| \xrightarrow[\text{散度定理}]{} =$$

$$\frac{2^n}{\alpha_n R^n} \left| \int_{\partial B_{R/2}(x)} u(y) \mathbf{n}_i(y) d\sigma(y) \right| \leq \frac{2^n}{\alpha_n R^n} \int_{\partial B_{R/2}(x)} |u(y)| d\sigma(y) \leq$$

$$\frac{2^n}{\alpha_n R^n} \left(\frac{R}{2}\right)^{n-1} (n\alpha_n) \sup_{B_R} |u| = \frac{2n}{R} \sup_{B_R} |u| \Rightarrow |Du(x)| \leq \frac{2n\sqrt{n}}{R} \sup_{B_R} |u| \Rightarrow$$

$$\sup_{B_R} |Du| \leq \frac{2n\sqrt{n}}{R} \sup_{B_R} |u|. \text{ 证毕.}$$

- Ascoli-Arzelà 引理: 设 K 是紧集, K 上连续函数全体给定范数 $\|\cdot\|_{C(K)}$ 构成 Banach 空间 $C(K)$. $C(K)$ 的子集是 (序列) 紧集当且仅当其一致有界、等度连续.
- Lebesgue 覆盖引理: 设 $\mathcal{A}$ 是度量空间 (X, d) 的一个开覆盖. 若 X 是列紧的, 则存在 $\delta > 0$ 使得 X 的任意的直径小于 δ 的子集都包含在 $\mathcal{A}$ 的某一元素中. δ 称为 $\mathcal{A}$ 的 Lebesgue 数. (参考: 袁海荣编《点集拓扑学讲义》第十四讲. 复习概念: Banach 空间, 列紧, 一致有界、等度连续)
- 设 $K \subset \Omega$ 是紧集, 由分离性, $R \doteq \text{dist}(K, \partial\Omega) > 0$. 以 K 中的点为球心, $R/2$ 为半径作球覆盖 K . 由 K 的紧性, 存在有限个球覆盖 K . 记这有限个球的并集为 $U \subset \Omega$, 对应的覆盖的 Lebesgue 数为 $\hat{\delta}$. 此外, 由定理条件, $\{u_k\}$ 一致有界 ($\exists M$ 使得 $|u_k(x)| \leq M, \forall k = 1, \dots, x \in \Omega$), 对每个球和 u_k 用梯度估计, 得到 $\sup_U |Du_k| \leq C \sup_{\Omega} |u_k| \leq CM$, 其中 C 只依赖于 n, R, K, Ω , 故右端与 k 无关.

- $\forall \varepsilon > 0$, 设 $x, y \in K$ 且 $|x - y| < \hat{\delta}$, 由 Lebesgue 覆盖引理, 存在有限个球中的某个 $B_{R/2}$ 包含 x 和 y . 对函数 $f_k(t) = u_k(ty + (1 - t)x)$, ($t \in [0, 1]$), 用 Lagrange 中值定理, 存在 $\theta \in (0, 1)$ 使得 $|u_k(x) - u_k(y)| = |f_k'(\theta)| = |Du_k(\theta x + (1 - \theta y))||x - y| \leq (\sup_U |Du_k|)|x - y| \leq CM|x - y|$. 故只要取 $\delta = \min\{\hat{\delta}, \frac{\varepsilon}{CM}\}$, 则对任意 $k \in \mathbb{N}$ 和 $x, y \in K$, 只要 $|x - y| < \delta$, 就有 $|u_k(x) - u_k(y)| < \varepsilon$, 即等度连续性成立. 证毕.

调和函数是解析函数

定理

调和函数是解析函数.

- 实解析函数: 称函数 $u: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 是实解析的, 如果对任意 $\hat{x} \in \Omega$, 存在 $R > 0$ 使得在 $B_R(\hat{x})$ 上 u 可以表示为收敛的 (多元) 幂级数: $u(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_{\alpha}(x - \hat{x})^{\alpha}, \forall x \in B_R(\hat{x})$. 这里 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 是多重指标, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. (标准形式: Taylor 级数. $a_{\alpha} = \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} u(\hat{x})$. 注意区别 C^{∞} 函数与解析函数!)
- 单位球上的 Poisson 公式: $u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\alpha_n R} \int_{\partial B_R(O)} \frac{g(y)}{|x-y|^n} d\sigma(y)$.
- 幂级数性质 (数学分析, 复变函数): 幂级数在其收敛域上内闭绝对一致收敛, 可逐项积分、逐项微分、作加法和乘法. (对除法, 要求分母非零, 但商的收敛域可能缩小. 参考: 华东师大《数学分析》下册第四版第十四章.)

证明: 利用平移性质, 只需证明球上调和函数可在球心附近展开为收敛的幂级数.

关键: 将 $\frac{1}{|x-y|}$ (这里 $|y| = R, |x| < R$) 展开为幂级数, 利用 $\frac{1}{(1+\rho)^{\frac{n}{2}}}$ 当 $|\rho| < 1$ 时由二项式定理可展开为 Taylor 级数:

$$(1 + \rho)^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} C_{\lambda}^k \rho^k = 1 + \lambda \rho + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} \rho^2 + \cdots + \frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)}{n!} \rho^n + \cdots.$$

$|y - x|^2 = (y - x, y - x) = |y|^2 - 2(y, x) + |x|^2 = R^2 - 2(y, x) + |x|^2 = R^2 (1 + \rho)$, 其

中 $\rho = \rho(x, y) \doteq \left(\frac{|x|}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{R}, \frac{x}{R}\right) \xrightarrow[\text{三角不等式}]{\text{内积不等式}}$

$$|\rho| \leq \left(\frac{|x|}{R}\right)^2 + 2\frac{|y|}{R} \frac{|x|}{R} = \left(\frac{|x|}{R}\right)^2 + 2\frac{|x|}{R} \xrightarrow[\text{设 } |x| < R/4]{} < \frac{9}{16} < 1,$$

于是当 $|x| \leq \frac{R}{4}$ 时, 由 $|y - x| = R(1 + \rho)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\alpha_n R^{n+1}} \int_{\partial B_R(O)} \frac{u(y)}{(1 + \rho(x, y))^{n/2}} d\sigma(y) =$

$$\frac{R^2 - |x|^2}{n\alpha_n R^{n+1}} \int_{\partial B_R(O)} u(y) \sum_{k=0}^{\infty} C_{-n/2}^k \rho(x, y)^k d\sigma(y) \xrightarrow[\text{一致收敛级数与定积分换序}]{\text{华东师大数学分析下册第四版定理 13.13}} =$$

$$\frac{R^2 - |x|^2}{n\alpha_n R^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} C_{-n/2}^k \underbrace{\int_{\partial B_R(O)} u(y) \rho(x, y)^k d\sigma(y)}_{\text{关于 } x \text{ 的 } 2k \text{ 次多项式}} \xrightarrow[\text{绝对收敛级数的 Riemann 重排定理}]{\text{华东师大数学分析下册第四版定理 12.13}} u(x) \text{ 可}$$

表示为球 $|x| < R/4$ 上的幂级数. □

解析性的应用

- 唯一性定理: 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是连通开集, u 在 Ω 上解析, 且在 Ω 的非空开子集上恒为零, 则在 Ω 上 $u \equiv 0$.

证明: 置 U 为 $\{x \in \Omega : u(x) = 0\}$ 的内部, 由定理条件, $U \neq \emptyset$, 且 U 是开集. 由 Ω 的连通性, 只需再证 U 是闭集. 设 $a \in \Omega$ 是 U 的一个聚点, 由 u 及其任意阶导数的连续性, 必有 $D^k u(a) \equiv 0, \forall k = 0, 1, \dots$. 故 u 在 a 的一个开邻域内的 Taylor 级数恒为零, 即 $a \in U$, 所以 U 是闭集. □

- 局部强极值原理: 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是连通开集, u 在 Ω 上调和, 且在 Ω 内有极大值 (或极小值), 则在 Ω 上 u 恒为常数.

证明: 在极大值点的球形邻域内用平均值性质可知 u 在该邻域内都是常数 + u 在 Ω 上解析 $\Rightarrow u$ 是常数函数. □

• Cauchy 问题解的唯一性:

设在 $\mathbb{R}_+^n$ 内 $\Delta u = 0$, 在 $\partial\mathbb{R}_+^n$ 上 $u = 0, \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$, 则在 $\mathbb{R}_+^n$ 内 $u \equiv 0$.

证明: 1. 将 u 关于自变量 x_n 作奇延拓得到 $\mathbb{R}^n$ 上函数:

$$\bar{u}(x_1, \dots, x_n) \doteq \begin{cases} u(x_1, \dots, x_n), & \text{若 } x_n \geq 0, \\ -u(x_1, \dots, -x_n), & \text{若 } x_n \leq 0, \end{cases} \quad \text{则 } \bar{u} \text{ 连续, 且容易验证均值性}$$

质成立 (当 $x \notin \partial\mathbb{R}_+^n$ 时, 只需对 $R < |x_n|$ 的球 $B_R(x)$ 验证即可 (为什么?); 当 $x \in \partial\mathbb{R}_+^n$ 时, 直接用奇函数在对称区域上积分为零) $\Rightarrow$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上 $\Delta \bar{u} = 0$. 此外, 在原点容易由方程和初值条件计算 (回忆弱间断面与方程分类的有关结论!) 得到 $\bar{u}(0) = 0, D\bar{u}(0) = 0, D^2\bar{u}(0) = 0, \dots, D^k\bar{u}(0) = 0, \dots \Rightarrow \bar{u}$ 在原点的邻域内恒为零 $\Rightarrow$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上 $\bar{u} \equiv 0$. □

- 齐次调和多项式展开: 设 u 在开集 Ω 上调和, 则 $\forall a \in \Omega$, 存在调和的 m 次齐次多项式 p_m , 使得在 a 的邻域内 $u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x-a)$, 且该级数绝对一致收敛.

证明: 1. 不妨设 $a = 0$, 则有 Taylor 级数 $u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x)$, 其中 $p_m(x) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha u(0)}{\alpha!} x^\alpha$. 由解析性, $\exists R > 0$ 使得该级数在球 B_R 上绝对一致收敛.

2. 逐项求导 $\Rightarrow \Delta u = \sum_{m=0}^{\infty} \Delta p_m(x) \xrightarrow[u \text{ 调和}]{q_m \doteq \Delta p_m(x) \text{ 是 } m-2 \text{ 次齐次多项式}} \sum_{m=2}^{\infty} q_m(x) = 0$
 $\xrightarrow[\text{取 } x=ty, |y| \leq 1, 0 < t < R]{q_m \text{ 的齐次性}} \sum_{m=2}^{\infty} q_m(y) t^{m-2} = 0 \xrightarrow[\text{一元幂级数展开式的唯一性}]{\text{看作 } t \text{ 的幂级数}} q_m(y) \equiv 0 \Rightarrow \Delta p_m \equiv 0$. 证毕.

全纯函数理论复习 (请与调和函数的理论对比)

- 全纯函数: 对两个自变量的复值映射 $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, 记 $z = x + iy, w = u + iv$, 称 $w = f(z)$ 在点 $z_0 \in \mathbb{C}$ 全纯, 如果它在 z_0 的一个邻域内复可微; 或等价的, 作为 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 的映射, 在 z_0 的邻域内实连续可微, 且 u, v 满足 Cauchy-Riemann 方程组

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0} \quad \text{或} \quad \boxed{u_x - v_y = 0, u_y + v_x = 0}.$$

$\Rightarrow$ 全纯函数的实部和虚部都是调和函数. (公式 $\Delta u = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}$.) 意义: 用 PDE 从局部刻画函数.

- 圆盘上 Cauchy 积分定理: 设 f 在圆盘 B 上全纯, 则对 B 内任一闭曲线 γ , 成立 $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

类比: 散度定理. 意义: 用积分从整体刻画函数.

- 圆盘上 Cauchy 积分公式: 设 f 在包含闭圆盘 $\bar{B}$ 的一个开集上全纯, 则对给定正向的圆周 ∂B , 对 B 内任一点 z , 都成立 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$.

类比: 用第二 Green 公式和挖洞技巧得到第三 Green 公式 (Poisson 公式). 意义: 将局部—整体联系起来, 是整个全纯函数分析理论的枢纽.

- Cauchy-Riemann 算子 $\partial/\partial \bar{z}$ 的基本解: $\frac{1}{\pi} \frac{1}{z}$

证: $n = 2$ 情形 $\Delta \left(\frac{1}{2\pi} \ln |z| \right) = \delta_0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{4\pi} \ln |z|^2 \right) = \delta_0 \Rightarrow \partial/\partial \bar{z}$ 的基本解是 $4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{4\pi} \ln |z|^2 = \frac{1}{\pi} \partial_z (\ln z + \ln \bar{z}) = \frac{1}{\pi z}$.

- Cauchy 导数公式: 设开集 Ω 包含圆周 C 及其内部, f 在 Ω 上全纯, 则 f 在 Ω 内无限次复可微, 且对在 C 的内部任一点 z , 都有 $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$.

- Cauchy 导数不等式: 设 f 在 $C \doteq \overline{B_R(z_0)}$ 上全纯, 则 $|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{R^n} \|f\|_C$, 这里 $\|f\|_C \doteq \max_{z \in C} |f(z)|$.
- 全纯函数幂级数展开 (解析性): 设 f 在开集 Ω 上全纯, $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$, 则 f 可在 z_0 点展开为在 $\overline{B_R(z_0)}$ 上收敛的幂级数: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k, \forall z \in \overline{B_R(z_0)}$.
- Liouville 定理: 有界整函数必为常数.
- Riemann 可去奇点定理: a 是全纯函数 f 的可去奇点 $\Leftrightarrow f$ 在 a 的邻域中有界 $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0$.
回顾全纯函数奇点的分类: 可去奇点, ($n \in \mathbb{N}$ 阶) 极点, 本性奇点
- 零点孤立性与唯一性: 设 f 在区域 Ω 上全纯且其零点在 Ω 内有聚点, 则 $f \equiv 0$.
- 平均值公式: f 在 $\overline{B_R(z_0)}$ 上全纯, 由 Cauchy 积分公式,
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta.$$

- 最大模原理: 设 f 在有界区域 Ω 上全纯, 在 $\bar{\Omega}$ 上连续, 且不恒为常数, 则 $|f(z)| < \max_{\xi \in \partial\Omega} |f(\xi)|, \forall z \in \Omega$.
- Morea 定理: 设 f 在开圆盘 B 上连续, 且对包含在 B 内的任意三角形围线 T , 都成立 $\int_T f(z) dz = 0$, 则 f 在 B 上全纯. 类比调和函数的平均值性质.
- Weierstrass 定理: 设全纯函数列 $\{f_n\}$ 在区域 Ω 上内闭一致收敛到 f , 则 f 在 Ω 上全纯, 且任意的 k 阶复导数 $f_n^{(k)}$ 也内闭一致收敛到 $f^{(k)}$.
- Montel 定理: 设区域 Ω 上的全纯函数族 $\mathcal{F}$ 内闭一致有界, 则 $\mathcal{F}$ 中的任意函数列都包含在 Ω 上内闭一致收敛的子列.
- Hurwitz 定理: 设全纯函数列 $\{f_n\}$ 在区域 Ω 上内闭一致收敛到 f , 如果在 Ω 内 $f_n(z)$ 都不取零值, 那么 f 或者在 Ω 内恒为零, 或者在 Ω 内也不取零值.

例 1. 用均值性质证明: 如果 u 在区域 Ω 内调和, 则 $u \in C^\infty(\Omega)$.

- 关键点: 磨光 (卷积) 和平均值性质 + 含参变量积分的可微性
- 取球对称的非负磨光函数 (第八讲) $\eta \in C_c^\infty(B_1(O))$, 满足 $\int_{B_1(O)} \eta(x) dx = 1, \eta(x) = \psi(|x|)$ (从而 $\omega_n \int_0^1 r^{n-1} \psi(r) dr = 1$ (✓)). 置 $\eta_\epsilon(z) = \frac{1}{\epsilon^n} \eta(\frac{z}{\epsilon})$.
- $\forall x \in \Omega$, 设 $\epsilon < \text{dist}(x, \partial\Omega)$, 则 $\int_\Omega u(y) \eta_\epsilon(y-x) dy = \int_\Omega u(x+z) \eta_\epsilon(z) dz = \frac{1}{\epsilon^n} \int_{|z|<\epsilon} u(x+z) \eta(\frac{z}{\epsilon}) dz = \int_{|y|<1} u(x+\epsilon y) \eta(y) dy = \int_0^1 r^{n-1} dr \int_{\partial B_1(O)} u(x+\epsilon r\omega) \eta(r\omega) d\sigma(\omega) = \int_0^1 r^{n-1} \psi(r) dr \int_{|\omega|=1} u(x+\epsilon r\omega) d\sigma(\omega) = \omega_n \int_0^1 \psi(r) \frac{r^{n-1}}{\omega_n(\epsilon r)^{n-1}} \left(\int_{\partial B_{\epsilon r}(x)} u(y) d\sigma(y) \right) dr \xrightarrow[\text{均值性质}]{} \omega_n \int_0^1 \psi(r) r^{n-1} u(x) dr \xrightarrow[(\checkmark)]{} u(x)$, 即证明了 $u(x) = \int_\Omega u(y) \eta_\epsilon(y-x) dy \Leftrightarrow u(x) = u * \eta_\epsilon(x)$.
- 用含参变量积分求导定理, 由于 $\eta_\epsilon \in C_c^\infty \Rightarrow \int_\Omega u(y) \eta_\epsilon(y-x) dy$ 关于 x 是 C^∞ 的 $\Rightarrow u \in C^\infty(\Omega)$. [利用了微分是局部性质, 第八讲已复习]

习题 1. 证明: Green 函数 (在 Ω 内 $-\Delta_y G(x, y) = \delta_x$, 在 $\partial\Omega$ 上 $G(x, y) = 0$) 具有非负性: 当 $y \in \Omega$ 时 $G(x, y) > 0$. [挖掉包含奇点 x 的小球后用极值原理.]

习题 2. 试给出 $n = 2$ 情形调和函数的可去奇点定理并予以证明.

习题 3. 设 $u \in C(\Omega)$, 证明以下四个性质等价:

- i) $\forall B_R(x) \subset\subset \Omega$, 成立 $u(x) \leq \frac{1}{|\partial B_R(x)|} \int_{\partial B_R(x)} u(y) d\sigma(y)$;
 - ii) $\forall B_R(x) \subset\subset \Omega$, 成立 $u(x) \leq \frac{1}{|B_R(x)|} \int_{B_R(x)} u(y) dy$;
 - iii) $\forall x \in \Omega, \forall R_0 > 0$, 存在 $R \in (0, R_0)$ 使得 $B_R(x) \subset\subset \Omega$ 且 $u(x) \leq \frac{1}{|B_R(x)|} \int_{B_R(x)} u(y) dy$;
 - iv) 对任意连通开集 $\Omega' \subset\subset \Omega$, 以及在 Ω' 内调和的任意函数 $h \in C(\Omega)$, 如果在 $\partial\Omega'$ 上 $u \leq h$, 则在 Ω' 内成立 $u \leq h$.
- (满足上述任一性质的函数叫作下调和函数. 提示: iv) $\rightarrow$ i) — 求解一个 Laplace 方程在球上的 Dirichlet 问题.)

习题 4. 证明如下结论:

- i) 设 u 在区域 Ω 内下调和, $F(t)$ 是单调递增的一元凸函数, 则 $v(x) = F(u(x))$ 也下调和;
- ii) 有限个下调和函数的上确界也是下调和的: 设 $u_1, \dots, u_k$ 下调和, 则 $v(x) = \max\{u_1(x), \dots, u_k(x)\}$ 下调和;
- iii) 有限个下调和函数的非负线性组合仍然下调和: 设 $u_1, \dots, u_k$ 下调和, $a_1, \dots, a_k$ 都是非负实数, 则 $v(x) = \sum_{j=1}^k a_j u_j(x)$ 下调和.

阅读任务和作业

- 必读 — 郇中丹, 黄海洋: 偏微分方程 (第二版), 高等教育出版社, 2013. [pp. 198–202; pp. 212–215]
- 作业: p.214: 2–6.
- 参考文献
 - Stein, Elias M.; Shakarchi, Rami. Complex analysis. Princeton Lectures in Analysis, 2. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

最后更新: 2022-11-30

偏微分方程

第十一讲 Perron 方法、连续性方法和能量积分方法

袁海荣 (华东师范大学 数学科学学院)

2022 年 11 月 15 日

第一是切勿将我尚未清楚知道其为真的东西视为真理. 第二是把正在考察的困难分解为尽可能多的充分求解所必需的部分. 第三是依照如下的次序进行思考, 就是从最简单最容易之处开始……终能一步一步地上升到更加复杂处. 最后, ……列举各种情况应尽可能完备……以确定我没有遗漏任何东西.

——《方法论》*René Descartes* (1596 年 3 月 31 日—1650 年 2 月 11 日)



传记: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Descartes/>

学习要点

- 理解估计和紧性对于证明存在性的重要意义
- 了解 Perron 方法、连续性方法
- 掌握 Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega)$ 的定义及 Poicaré 不等式; 理解稠密性的重要性
- 掌握 Poisson 方程齐次 Dirichlet 问题弱解的定义, 以及如何用 Riesz 表示定理证明弱解的存在性
- 理解不同的估计导致不同的适定性理论: 极值原理 ($\Rightarrow$ Hölder 空间的 Schauder 理论和粘性解理论); 能量积分 ($\Rightarrow$ Sobolev 空间 H^k 的变分方法和弱解理论); 奇异积分算子 ($\Rightarrow$ Sobolev 空间 $W^{k,p}$ 的强解理论)

调和函数的松弛 (relaxation): 下调和函数、上调和函数

- 设 $u \in C(\Omega)$, 则以下四个性质等价:

i) $\forall B_R(x) \subset\subset \Omega$, 成立 $u(x) \leq \frac{1}{|\partial B_R(x)|} \int_{\partial B_R(x)} u(y) \, d\sigma(y)$;

ii) $\forall B_R(x) \subset\subset \Omega$, 成立 $u(x) \leq \frac{1}{|B_R(x)|} \int_{B_R(x)} u(y) \, dy$;

iii) $\forall x \in \Omega, \forall R_0 > 0$, 存在 $R \in (0, R_0)$ 使得 $B_R(x) \subset\subset \Omega$ 且 $u(x) \leq \frac{1}{|B_R(x)|} \int_{B_R(x)} u(y) \, dy$;

iv) 对任意开集 $\Omega' \subset\subset \Omega$, 以及在 Ω' 内调和的任意函数 $h \in C(\Omega)$, 如果在 $\partial\Omega'$ 上 $u \leq h$, 则在 Ω' 内成立 $u \leq h$.

- 满足上述任一性质的函数叫作下调和函数. 称 u 是上调和函数, 如果 $-u$ 是下调和函数.

重要思想: 要构造调和函数, 先退一步, 构造更容易的下(上)调和函数.

- 下调和函数关于如下运算封闭:

i) 设 u 在区域 Ω 内下调和, $F(t)$ 是单调递增的一元凸函数, 则 $v(x) = F(u(x))$ 也下调和;

ii) 有限个下调和函数的最大值函数是下调和的: 设 $u_1, \dots, u_k$ 下调和, 则 $v(x) \doteq \max\{u_1(x), \dots, u_k(x)\}$ 下调和;

iii) 有限个下调和函数的非负线性组合仍然下调和: 设 $u_1, \dots, u_k$ 下调和, $a_1, \dots, a_k$ 都是非负实数, 则

$$v(x) \doteq \sum_{j=1}^k a_j u_j(x) \text{ 下调和.}$$

证明: 习题.

Perron 方法

- 典型问题 — 一般区域上 Laplace 方程的 Dirichlet 问题:

对有界光滑区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 在 Ω 内 $\Delta u = 0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u = g$, 其中 g 是个连续函数.

- Perron 方法 — 第一部分: 利用调和函数的性质, 构造在 Ω 内调和的下解 (构造下调和函数作近似解、紧性、完备性); 第二部分: 在区域边界和边值 g 适当光滑时, 证明所构造的下解满足边界条件 (闸函数, 极值原理).

- 近似解的构造 — 松弛 (下解: 若 u 下调和且在 $\partial\Omega$ 上 $u \leq g$, 称 u 是一个下解.)

- 下解集 — $S_- \doteq \{v \in C(\bar{\Omega}) : v \text{ 下调和且在 } \partial\Omega \text{ 上 } v \leq g\}$

- 上解集 — $S_+ \doteq \{w \in C(\bar{\Omega}) : w \text{ 上调和且在 } \partial\Omega \text{ 上 } w \geq g\}$

- 置 $u^*(x) \doteq \inf_{w \in S_+} w(x)$, $u_*(x) \doteq \sup_{v \in S_-} v(x)$. 结论: u^*, u_* 都在 Ω 内调和.

i) 设 $-M \leq g \leq M$, 则 $-M \in S_-$, $M \in S_+$, 故 S_-, S_+ 不是空集. ii) $\forall v \in S_-, \forall w \in S_+$, 由比较原理, 在 Ω 内 $v \leq w \Rightarrow v \leq M, -M \leq w \Rightarrow$ 函数 u_*, u^* 确实存在. (复习《数学分析》实数集的确界原理: 非空有上(下)界的实数集必有有限的上(下)确界.)

- 下面以 u_* 为例给出结论的证明. 复习: 上确界必是聚点 (存在极大化点列, 极限概念). 注意调和是局部概念, 任取球 $B \subset \subset \Omega$, 只需证明 u_* 在 B 内调和.

内部: 近似解序列的构造及其紧性

- 任取球 $B \subset\subset \Omega$, 任取 $\hat{x} \in \Omega$. 由于 $u_*(\hat{x}) = \sup_{v \in S_-} v(\hat{x})$, $\exists v_j \in S_-$ ($j = 1, 2, \dots$) 使得 $v_j(\hat{x}) \nearrow u_*(\hat{x}) \Rightarrow$ 局部的近似解序列 $\{v_j(x)\}_{j=1}^\infty$.

- 改善近似解序列所用的两种手术

- **单调提升** — 置 $v'_j \doteq \max\{v_1, \dots, v_j\}$. i) 显然 $\{v'_j\}$ 是单调上升序列: $v'_1 \leq v'_2 \leq \dots \leq v'_j \leq v'_{j+1} \leq \dots$; ii) 由下调和函数的性质, 仍有

$$v'_j \in S_-; \text{ iii) 由于 } v_j \leq v'_j \xrightarrow{\text{极限的夹挤收敛定理}} \lim_{j \rightarrow \infty} v'_j(\hat{x}) = u_*(\hat{x})$$

- **调和提升** — 令 $P_B v'_j$ 是球上 Dirichlet 问题 $\begin{cases} \Delta(P_B v'_j) = 0 & \text{in } B, \\ P_B v'_j = v'_j & \text{on } \partial B \end{cases}$ 的解, 定义 v'_j 的 **调和提升** $v''_j(x) \doteq \begin{cases} (P_B v'_j)(x), & \text{if } x \in B, \\ v'_j(x), & \text{if } x \in \Omega \setminus B. \end{cases}$

- 用下调和函数的极值原理, 对 $x \in B$, 成立 $v'_j(x) \leq P_B v'_j(x) \Rightarrow v'_j \leq v''_j$.

- 证明 $v''_j \in S_-$. 事实上, i) 显然在 $\partial\Omega$ 上 $v''_j = v'_j \leq g$; ii) 要证明 $\forall x_0 \in \Omega, \forall R_0 > 0, \exists R \in (0, R_0)$ 使得 $v''_j(x_0) \leq \frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{B_R(x_0)} v''_j(y) dy$. 若 $x_0 \in B$, 由于球 B 是开集, 取 $B_R(x_0) \subset B$, 用调和函数的均值性质; 若 $x_0 \in \Omega \setminus \bar{B}$, 后者是开集, 取 $B_R(x_0) \subset \Omega \setminus \bar{B}$, 用 $v'_j \in S_-$ 的条件; 若 $x_0 \in \partial B$, 任取 $R \ll 1$, 在 B 上 $P_B v'_j \geq v'_j \Rightarrow v''_j(x_0) = v'_j(x_0) \leq \frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{B_R(x_0)} v'_j(y) dy \leq \frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{B_R(x_0)} v''_j(y) dy$, 得证!

- 比较原理 $\Rightarrow$ 调和提升保持单调性: $v''_1 \leq v''_2 \leq \dots \leq v''_j \leq v''_{j+1} \leq \dots \xrightarrow{\text{极限的夹挤收敛定理}} \lim_{j \rightarrow \infty} v''_j(\hat{x}) = u_*(\hat{x})$

- **紧性 + 完备性** — $\{v''_j\} \subset S_-$ 是单调上升的、在球 B 内调和的函数列, 且在点 $\hat{x} \in B$ 收敛 $\xrightarrow{\text{Harnack 第二收敛定理}} \{v''_j\}$

在 B 内一致收敛到调和函数 h . 注意: $v''_j \leq u_* \Rightarrow h \leq u_*$.

- **相容性** — 要证明在 B 内 $u_* = h$, 从而 u_* 在 B 内调和.

内部: 相容性

- 相容性 — 要证明在 B 内 $u_* = h$, 从而 u_* 在 B 内调和. 由于 $h \leq u_*$, 用反证法: 假设存在 $\hat{z} \in B$ 使得 $h(\hat{z}) < u_*(\hat{z})$, 要导出矛盾. (注意现在在 B 内有两个特殊的取定的点: $\hat{x}$ 和 $\hat{z}$.)
- 由 $u_*(\hat{z}) = \sup_{v \in S_-} v(\hat{z})$, 存在 $\chi \in S_-$ 使得 $h(\hat{z}) < \chi(\hat{z}) \leq u_*(\hat{z})$. 对 $\{v_j''\}$ 继续作手术, 构造新近似解 $w_j \doteq \max\{v_j'', \chi\}$, 显然 $\{w_j\} \subset S_-$ 且 $v_j'' \leq w_j \Rightarrow w_j(\hat{x}) \nearrow u_*(\hat{x})$. 此外, 显然 $h(\hat{z}) < \chi(\hat{z}) \leq w_j(\hat{z})$, $\forall j$.
 - 对新近似解序列 $\{w_j\}$ 作手术 — 单调提升: 修改为近似解 $w_j' \doteq \max\{w_1, \dots, w_j\}$. 显然仍有 $w_j'(\hat{x}) \nearrow u_*(\hat{x})$ 且 $h(\hat{z}) < \chi(\hat{z}) \leq w_j(\hat{z}) \leq w_j'(\hat{z})$, $\forall j$. (另外注意在 Ω 上 $v_j'' \leq w_j \leq w_j'$.)
 - 调和提升 — 修改为近似解 $w_j''(x) \doteq \begin{cases} (P_B w_j')(x), & \text{if } x \in B, \\ w_j'(x), & \text{if } x \in \Omega \setminus B. \end{cases}$ 由此前证明, 成立 $w_j'' \in S_-$, 仍有 $w_j''(\hat{x}) \nearrow u_*(\hat{x})$ 且 $h(\hat{z}) < \chi(\hat{z}) \leq w_j'(\hat{z}) \leq w_j''(\hat{z})$, $\forall j$. (另外注意在 Ω 上 $v_j'' \leq w_j \leq w_j' \leq w_j''$.)
- Harnack 第二收敛定理 $\Rightarrow \{w_j''\}$ 在 B 上收敛到一个调和函数 $\tilde{h}$, 且 $\tilde{h}(\hat{x}) = u_* = h(\hat{x})$. 此外, 在 Ω 上 $v_j'' \leq w_j'' \Rightarrow$ 在 B 上 $h \leq \tilde{h} \xrightarrow[\text{强极值原理}]{B \text{ 上非负调和函数 } \tilde{h} - h \text{ 在内点 } \hat{x} \text{ 取到最小值 } 0} \text{在 } B \text{ 内 } h \equiv \tilde{h}$. 但是 $h(\hat{z}) < \chi(\hat{z}) \leq w_j'(\hat{z}) \leq w_j''(\hat{z}) \nearrow \tilde{h}(\hat{z}) \Rightarrow h(\hat{z}) < \chi(\hat{z}) \leq \tilde{h}(\hat{z})$, 矛盾!

边界: 正则边界点

- 称 $x_0 \in \partial\Omega$ 是**正则边界点**, 如果 $\forall g \in C(\partial\Omega), \forall \varepsilon > 0, \exists v \in S_-, w \in S_+$, 使得

$$g(x_0) \geq v(x_0) \geq g(x_0) - \varepsilon, \quad g(x_0) \leq w(x_0) \leq g(x_0) + \varepsilon.$$

(注意: 由 $v, w \in C(\bar{\Omega}), \exists \delta > 0$ 使得 $x \in \Omega$ 且 $|x - x_0| < \delta$ 时 $v(x) - g(x_0) > -2\varepsilon, w(x) - g(x_0) < 2\varepsilon$.)

定理

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域, 若 $\partial\Omega$ 中每个点都是正则边界点 (*regular boundary point*), 则对任意一个函数 $g \in C(\partial\Omega)$, Dirichlet 问题 (在 Ω 内 $\Delta u = 0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u = g$) 存在唯一的解 $u \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. (实际上在 Ω 内解析.)

- 唯一性: 用极值原理或能量积分. 存在性: Ω 有界 $\Rightarrow \partial\Omega$ 是紧集, $g \in C(\partial\Omega) \Rightarrow g$ 有界 $\Rightarrow u_*$ 在 Ω 内调和, 现在只剩下要证明它满足边界条件: $\forall x_0 \in \partial\Omega, \lim_{x \rightarrow x_0, x \in \Omega} u_*(x) = g(x_0)$.
- $v \in S_-, w \in S_+, u_* = \sup_{v \in S_-} v \xrightarrow[\text{极值原理}]{} \forall x \in \Omega, v(x) \leq u_*(x) \leq w(x) \xrightarrow[|x-x_0|<\delta]{x \in \Omega} -2\varepsilon < v(x) - g(x_0) \leq u_*(x) - g(x_0) \leq w(x) - g(x_0) < 2\varepsilon \Rightarrow |u_*(x) - g(x_0)| < 2\varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0, x \in \Omega} u_*(x) = g(x_0)$.
- 闸函数**: 固定 $x_0 \in \partial\Omega$, 称 $b(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 是**上闸函数**(upper barrier), 如果 i) b 上调和; ii) $b(x_0) = 0$ 且在 $\bar{\Omega} \setminus \{x_0\}$ 上 $b > 0$. 如果 $-b$ 是上闸函数, 就称 b 是下闸函数.
- 定理: 设在 $x_0 \in \partial\Omega$ 可构造上闸函数, 则 x_0 是正则边界点.

闸函数与外球条件

● **定理:** 设在 $x_0 \in \partial\Omega$ 可构造上闸函数, 则 x_0 是正则边界点.

● 固定 $x_0 \in \partial\Omega$, 称 $b(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 是上闸函数, 如果 i) b 上调和; ii) $b(x_0) = 0$ 且在 $\bar{\Omega} \setminus \{x_0\}$ 上 $b > 0$. 如果 $-b$ 是上闸函数, 就称 b 是下闸函数.

● 称 $x_0 \in \partial\Omega$ 是正则边界点, 如果 $\forall g \in C(\partial\Omega), \forall \varepsilon > 0, \exists v \in S_-, w \in S_+$, 使得 $v(x_0) \geq g(x_0) - \varepsilon, w(x_0) \leq g(x_0) + \varepsilon$.

● 定理的证明

第一步: 由于 $g \in C(\partial\Omega), \partial\Omega$ 紧 $\Rightarrow g$ 有界: $\exists M > 0$ 使得 $|g| \leq M$. 由连续性, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得若 $x \in \partial\Omega$ 且 $|x - x_0| < \delta$, 则

$|g(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon$ (♣). 设 b 是一个上闸函数, 取 $K > 0$ 充分大使得 $|x - x_0| \geq \delta$ 时 $Kb(x) \geq 2M$ (注意这里要求 $b(x)$ 在 $\Omega \setminus B_\delta(x_0)$ 上有正的下界, 这可由 Ω 有界以及 $x \neq x_0$ 时 $b(x) > 0$ 保证).

第二步: 置 $w(x) = g(x_0) + \varepsilon + Kb(x), v(x) = g(x_0) - \varepsilon - Kb(x)$, 则 $w \in S_+, v \in S_-$, 且显然 $w(x_0) = g(x_0) + \varepsilon, v(x_0) = g(x_0) - \varepsilon$.

以证明 $w \in S_+$ 为例, 由于 $K > 0, b$ 上调和 $\Rightarrow w$ 上调和; 又当 $x \in \partial\Omega \setminus B_\delta(x_0)$ 时 $w(x) \geq 2M + g(x_0) + \varepsilon \geq M + \varepsilon > g(x)$; 当 $x \in \partial\Omega \cap B_\delta(x_0)$ 时由 (♣) $\Rightarrow w(x) \geq g(x_0) + \varepsilon \geq g(x)$.

● **外球条件:** 称 $x_0 \in \partial\Omega$ 满足外球条件, 如果存在球 $B_R(y_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ 使得 $\overline{B_R(y_0)} \cap \bar{\Omega} = \{x_0\}$.

● **定理:** 设 $x_0 \in \partial\Omega$ 满足外球条件, 则 x_0 是正则边界点.

证明: 只需构造一个上闸函数. 设 $B_R(y_0)$ 是 $x_0 \in \partial\Omega$ 的外球, 作 $b(x) = \Phi(x_0 - y_0) - \Phi(x - y_0)$, 其中 $\Phi(x)$ 是 Laplace 算子的基本解, 容易验证 $b(x)$ 就是一个上闸函数.

● 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是凸集, 则 $\partial\Omega$ 每点都满足外球条件. [凸集在边界每点都具有支撑切平面, 凸集位于该平面一侧, (泛函分析) Banach 泛函延拓定理]

推论: 设 Ω 是有界凸区域, 则具连续边值的 Ω 内 Laplace 方程的 Dirichlet 问题存在经典解.

C^2 区域满足外球条件

- C^k 区域: 称区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是 C^k 的, 如果对任意 $x_0 \in \partial\Omega$, 存在它的邻域 $B_R(x_0)$, 使得 $\partial\Omega \cap B_R(x_0)$ 可表示为一个 C^k 函数的图像.

- 定理: 设 Ω 是 C^2 区域, 则它的每个边界点都满足外球条件.

证明. 1. 不妨设 $0 \in \partial\Omega$, 超曲面 $\partial\Omega \cap B_R$ 由函数 $y_n = \phi(y')$ 的图像表示, 其中 $y' = (y_1, \dots, y_{n-1})$, 而 Ω 位于下侧 (即 Ω 中的点满足 $y_n < \phi(y')$). 通过平移和旋转坐标系 (局部标架), 可以设 $\phi(0) = 0$, $D\phi(0) = 0$, 且 $A \doteq \frac{1}{2}D^2\phi(0) = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}\}$ 是对角阵. 于是由到二阶的 Taylor 展开 (注意 $D^2\phi$ 是连续的), 有 $\phi(y') = y'Ay'^T + o(|y'|^2)$ ($|y'| \rightarrow 0$).

2. 设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0 \geq \lambda_{k+1} \geq \dots \geq \lambda_{n-1}$, 作旋转抛物面 $y_n = \phi^*(y') = (\lambda_1 + \varepsilon)|y'|^2$, 其中 $\varepsilon > 0$, 则当 $|y'| \ll 1$ 时 $\phi^*(y') \geq \phi(y')$. 只需对旋转抛物面做一个内接球, 使得只在原点它们相交.

3. 由于旋转抛物面和球都是旋成体, 只需考虑平面情形. 作抛物线 $y = ax^2$ 在 $x = 0$ 点的曲率圆即可. [复习数学分析或微分几何: 函数 $y = f(x)$ 确定的曲线的曲率为 $K(x) = \frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$, 曲率圆半径为 $R = 1/K(0) = 1/(2a)$, 圆心在法线上. 利用偶对称性, 此处所求曲率圆为 $(y - \frac{1}{2a})^2 + x^2 = \frac{1}{4a^2}$. 故外球条件成立.]

- 推论:

设 Ω 是有界的 C^2 区域, 则具连续边值的 Ω 内 Laplace 方程的 Dirichlet 问题存在经典解 $u \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

- 解的边界正则性定理: 设 Ω 是有界的 $C^{2,\alpha}$ 区域 ($0 < \alpha < 1$), 则具 $C^{2,\alpha}$ 边值的 Ω 内 Laplace 方程的 Dirichlet 问题存在经典解 $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

证明依赖于将区域局部展平, 相应方程系数延拓后化为内部情形. 具体参见 [Gilbarg-Trudinger: 二阶椭圆型偏微分方程, 第二版修订版第 6.4 节]. 由于 Laplace 算子在坐标变换下变为一般形式的二阶线性椭圆型方程, 故为了建立完备的几何理论 (微分同胚下不变的理论), 需对一般二阶线性椭圆型方程建立极值原理等工具, 推广对调和函数得到的结论.

Feynman-Kac 公式: Laplace 方程 Dirichlet 问题解的概率意义

- 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域, $W(t, \omega)$ 是 n 维 Brown 运动 ($t \geq 0$ 表示时间, ω 是样本点, 代表从原点出发作 Brown 运动的微粒 ω 的运动轨迹, 是连续曲线). 对任意的 $x \in \Omega$, 置 $X(t, \omega) \doteq W(t, \omega) + x$ (从 x 点出发的 Brown 微粒 ω 运动的轨迹), 以及 **停时 (stopping time)** $\tau_x(\omega) \doteq \inf\{t \geq 0 : X(t, \omega) \in \partial\Omega\}$, 它是轨迹 $X(t, \omega)$ (即微粒 ω) 首次触碰边界 $\partial\Omega$ 的时间. 则期望 $\mathbb{E}_\omega(\tau_x(\omega))$ (对所有样本点 ω 用概率测度积分) 是边值问题
$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\Delta u = 1, & \text{在 } \Omega \text{ 中,} \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \end{cases}$$
 的解. 换句话说, **解 $u(x)$ 是从 x 出发的 Brown 颗粒首次碰触边界 $\partial\Omega$ 所需的平均时间.**
- $\forall x \in \Omega$, $\mathbb{E}_\omega[g(X(\tau_x(\omega)), \omega)]$ 是 Dirichlet 问题
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 中,} \\ u = g, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \end{cases}$$
 的解. 和上面一样, 这里的随机过程 $X(t, \omega) = W(t, \omega) + x$ 表示从 x 点出发的 Brown 微粒 ω 运动的轨迹, τ_x 是该轨迹 (即微粒 ω) 首次遇到边界 $\partial\Omega$ 的时间.
- 特别地, 设 $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_0$, 则 Dirichlet 问题 “在 Ω 内 $\Delta u = 0$, 在 Γ_1 上 $u = 1$, 在 Γ_0 上 $u = 0$ ” 的解 $u(x)$ 是从 x 出发的 Brown 运动微粒在碰到 Γ_0 之前碰到 Γ_1 的概率.

(随机微分方程) 涉及概念: Brown 运动, Itô 随机积分, Itô 等距, Itô 链式法则, 停时

二阶椭圆型方程 Dirichlet 问题的经典解 — 拓扑方法

- 目标问题: 在 Ω 内 $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)D_{ij}u + \sum_{i=1}^n b_i(x)D_iu + c(x)u = f(x)$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u = g(x)$
- 连续性方法: 设 $\mathcal{B}$ 是 Banach 空间, $\mathcal{V}$ 是赋范线性空间, 并设 $\mathcal{L}_0$ 和 $\mathcal{L}_1$ 是 $\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{V}$ 的有界线性算子. 对任一 $t \in [0, 1]$, 令 $\mathcal{L}_t \doteq (1-t)\mathcal{L}_0 + t\mathcal{L}_1$. 假设: 存在常数 C 使得 $\forall t \in [0, 1]$, 成立 $\|x\|_{\mathcal{B}} \leq C \|\mathcal{L}_t x\|_{\mathcal{V}} \quad (\dagger)$, 结论: $\mathcal{L}_1$ 是满射当且仅当 $\mathcal{L}_0$ 是满射.

证明: 1. 设对某个 $s \in [0, 1]$, $\mathcal{L}_s$ 是满射, 由 (先验) 估计 $(\dagger)$, $\mathcal{L}_s$ 还是单射, 故它的逆映射 $\mathcal{L}_s^{-1} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{B}$ 存在.

2. 对 $t \in [0, 1]$ 和 $y \in \mathcal{V}$, $\mathcal{L}_t x = y \Leftrightarrow \mathcal{L}_s x = y + (\mathcal{L}_s - \mathcal{L}_t)x = y + (t-s)\mathcal{L}_0 x - (t-s)\mathcal{L}_1 x \Leftrightarrow x = \mathcal{L}_s^{-1}y + (t-s)\mathcal{L}_s^{-1}(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_1)x \quad (\clubsuit)$. 定义 $\mathcal{T} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ 为 $\mathcal{T}x \doteq \mathcal{L}_s^{-1}y + (t-s)\mathcal{L}_s^{-1}(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_1)x$, 我们证明当 $|t-s| \ll 1$ 时 $\mathcal{T}$ 是压缩映射, 从而用 Banach 不动点定理, 它有唯一的不动点 x , 就解决了方程 $(\clubsuit)$.

3. 设 $x_1, x_2 \in \mathcal{B}$, 那么 $\|\mathcal{T}(x_1) - \mathcal{T}(x_2)\|_{\mathcal{B}} = |t-s| \left\| \mathcal{L}_s^{-1}(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_1)(x_1 - x_2) \right\|_{\mathcal{B}} \xrightarrow[\substack{\text{注意: 实际上相当于 } \mathcal{L}_s^{-1} \text{ 有界} \\ (\dagger), x \doteq \mathcal{L}_s^{-1}(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_1)(x_1 - x_2)}}{\leq} C|t-s| \|(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_1)(x_1 - x_2)\|_{\mathcal{V}} \xrightarrow[\substack{\mathcal{L}_0 \text{ 和 } \mathcal{L}_1 \text{ 有界性}}]{\leq} C|t-s| (\|\mathcal{L}_1\| + \|\mathcal{L}_0\|) \|x_1 - x_2\|_{\mathcal{B}} \xrightarrow[\substack{|t-s| \leq \delta \doteq (2C(\|\mathcal{L}_1\| + \|\mathcal{L}_0\|))^{-1}}]{\leq} \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|_{\mathcal{B}}.$ 所以

对满足 $|t-s| \leq \delta$ 的所有 t , $\mathcal{L}_t$ 是满射.

4. 将区间 $[0, 1]$ 均分为长度小于 δ 的子区间, 则若 $\mathcal{L}_0$ 满, 由上一步结论, $\mathcal{L}_{k\delta} (k = 1, 2, \dots)$ 都是满射 $\Rightarrow \mathcal{L}_1$ 是满射.

参考: [GT], p.71.

- Banach 不动点定理: 完备度量空间上的压缩映射必有唯一的不动点.

压缩: $\exists \theta \in (0, 1)$ 使得 $\forall x_1, x_2, \text{dist}(\mathcal{T}x_1, \mathcal{T}x_2) \leq \theta \text{dist}(x_1, x_2)$.

二阶椭圆型方程 Dirichlet 问题的经典解 — 拓扑方法

- 问题 (⊠): 在 Ω 内 $\mathcal{L}u \doteq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)D_{ij}u + \sum_{i=1}^n b_i(x)D_iu + c(x)u = f(x)$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u = g(x)$. 目标: 找解 $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. 设方程是椭圆型的, 且系数 $\in C^\alpha(\bar{\Omega})$, 故 $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $g \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. 不妨取 $g \equiv 0$ (否则考虑 $u - g$ 满足的方程). (注意: 需设 $\alpha \in (0, 1)$)
- 连续性方法: 设 $\mathcal{B}$ 是 Banach 空间, $\mathcal{V}$ 是赋范线性空间, 并设 $\mathcal{L}_0$ 和 $\mathcal{L}_1$ 是 $\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{V}$ 的有界线性算子. 对任一 $t \in [0, 1]$, 令 $\mathcal{L}_t \doteq (1-t)\mathcal{L}_0 + t\mathcal{L}_1$. 假设: 存在常数 C 使得 $\forall t \in [0, 1]$, 成立 $\|x\|_{\mathcal{B}} \leq C \|\mathcal{L}_t x\|_{\mathcal{V}} \quad (\dagger)$, 结论: $\mathcal{L}_1$ 是满射当且仅当 $\mathcal{L}_0$ 是满射.
 - 函数空间: $\mathcal{B} = \{u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$, $\mathcal{V} = C^\alpha(\bar{\Omega})$.
 - 算子: $\mathcal{L}_0 = \Delta$, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}$
 - Schauder 估计 [GT, p.94]: 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是 $C^{2,\alpha}$ 的有界区域, $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 是问题 (⊠) 的解, 则存在常数 C (只依赖于 n, Ω , 矩阵 $[a_{ij}(x)]$ 的最小特征值在 $\bar{\Omega}$ 上的正的下界, 以及系数 a_{ij}, b_i, c 的 $C^\alpha(\bar{\Omega})$ 范数), 使得

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C(\|u\|_{C(\bar{\Omega})} + \|f\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} + \|g\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})}).$$
 典型的先验估计 (a priori estimates)
 - 最大模估计: (极值原理, 下一讲介绍) 设 $c(x) \leq 0$, 则 u 还满足估计式 $\|u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C(\|f\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} + \|g\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})})$.
- 其它拓扑方法: Leray-Schauder 不动点定理、非线性连续性方法 (Leray-Schauder 拓扑度) 等 (非线性泛函分析)

能量积分方法 — Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega)$

- 内积空间 — 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域, 在实线性空间 $C_0^\infty(\Omega)$ 上给定内积 $(u, v) \doteq \int_\Omega Du(x) \cdot Dv(x) dx$, 它诱导出范数 $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \doteq (\int_\Omega |Du(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$
 - 内积: 双线性; 对称性; 正定性
 - 正定性 — **Poincaré 不等式** ($\Rightarrow$ 等价范数 $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = (\int_\Omega |u|^2 dx + \int_\Omega |Du|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$):
存在常数 $C = C(n)$ 使得对任意 $u \in C_0^1(\Omega)$, 成立 $\int_\Omega |u|^2 dx \leq C(\text{diam } \Omega)^2 \int_\Omega |Du|^2 dx$
 - 证明: 设 $\Omega \subset \Omega_1 = [0, a]^n$, 在 $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ 上定义 $u \equiv 0$. $\forall x \in \Omega_1$, Newton-Leibniz 公式 $\Rightarrow |u(x)|^2 = \left| \int_0^{x_1} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x_2, \dots, x_n) dt \right|^2 \xrightarrow{\text{Cauchy-Schwarz 不等式}} \leq \int_0^{x_1} dt \int_0^{x_1} |\partial_1 u(t, x_2, \dots, x_n)|^2 dt \leq a \int_0^a |\partial_1 u|^2 dx_1 \leq a \int_0^a |Du(x_1, x_2, \dots, x_n)|^2 dx_1 \xrightarrow[\Omega_1 \setminus \Omega \text{ 上 } u \equiv 0]{\text{两端关于 } x \text{ 在 } \Omega_1 \text{ 上积分}} \int_\Omega |u(x)|^2 dx \leq a^2 \int_\Omega |Du|^2 dx$
- Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega)$ — Hilbert 空间 (完备的内积空间): $C_0^1(\Omega)$ 在度量 $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ 下的完备化空间, 它是 $L^2(\Omega)$ 的闭子空间, 且 $C_0^\infty(\Omega)$ 在其中稠密。 复习: 泛函分析 — 每一个度量空间都有一个完备化空间 (将 Cauchy 列视为元素的度量空间)
- Poincaré 不等式: $\forall u \in H_0^1(\Omega)$, 它的广义函数导数 $Du \in L^2(\Omega)^n$, 且成立 $\int_\Omega |u|^2 dx \leq C(\text{diam } \Omega)^2 \int_\Omega |Du|^2 dx$.
- 注意: i) 重要思想: 先对光滑函数利用数学分析技巧得到结果, 再利用稠密性, 通过极限对一般函数予以证明; ii) Sobolev 空间是为了研究与 Laplace 算子有关的 PDE 引入的工作空间, 以便应用泛函分析结论. 对于有些问题, 需要设计和构造新的函数空间. 例: 一维的双曲守恒律方程组 — 有界变差函数空间 (广义函数导数是 Radon 测度), 以描述激波等强间断现象; 加权函数空间 (描述无界函数等)

Riesz 表示定理、Poisson 方程 Dirichlet 问题弱解的存在性

- Riesz 表示定理 (用内积表示有界线性泛函): 设 $\mathbf{f}$ 是 Hilbert 空间 H 上的一个连续线性泛函, 则必存在唯一的 $y_{\mathbf{f}} \in H$, 使得对任意的 $x \in H$, 有 $\mathbf{f}(x) = (x, y_{\mathbf{f}})$. 证明本质: 变分原理, 或正交投影 (最小二乘法)
- Hilbert 空间 $H_0^1(\Omega)$: 内积 $(u, v) = \int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx$
- 目标问题 — Poisson 方程带齐次 Dirichlet 边界条件 (非齐次边界条件: 构造特殊函数 (例如调和函数) 消去)
 - 形式写法: 在 Ω 内 $-\Delta u = f$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u = 0$
 - 严格定义 (弱解): 设 $f \in L^2(\Omega)$. 称 $u \in H_0^1(\Omega)$ 是上述问题的弱解, 如果对任意 $v \in H_0^1(\Omega)$, 成立 $\int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$.
 - 弱解定义的合理性 — 经典解必须是弱解: 设 $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $u \in C^2(\Omega)$ 是经典解, 将 v 乘到方程两端后分部积分. 对 $v \in H_0^1(\Omega)$, 用逼近证明.
- 弱解的存在性: 定义 $H_0^1(\Omega)$ 上连续线性泛函 $\mathbf{f}$: $\mathbf{f}(v) \doteq \int_{\Omega} f v \, dx$. 验证: i) 线性: 显然; ii) 连续性: $|\mathbf{f}(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \xrightarrow[\text{Riesz 表示定理}]{\exists! u \in H_0^1(\Omega)} (v, u)_{H_0^1} = \mathbf{f}(v), \forall v \in H_0^1(\Omega) \Leftrightarrow \int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$.
- 弱解的唯一性: 线性 $\Rightarrow$ 弱解定义中取 $f \equiv 0, v = u \Rightarrow Du \equiv 0 \xrightarrow[\text{Poincaré 不等式}]{} u = 0, \text{ a.e.}$

推广: 散度形方程的可积分弱解; 非散度形方程的粘性解

- 二阶拟线性散度形椭圆型方程的可积分弱解: 在 Ω 内 $\operatorname{div} \mathbf{A}(x, u, Du) + B(x, u, Du) = 0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u = 0$. (设 $\mathbf{A}, B$

是给定的 C^∞ 函数. 应用: 极小曲面, 平均曲率, 流体力学……)

- 弱解: $u \in H_0^1(\Omega)$, 满足 $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, 成立 $\int_\Omega [\mathbf{A}(x, u(x), Du(x)) \cdot Dv(x) - B(x, u(x), Du(x))v(x)] dx = 0$

- 存在性: 变分法直接方法 (可用于直接求解非线性问题)

- 唯一性: 弱解的极值原理

- **正则性**(难点): 通过差分刻画弱导数 $\Rightarrow$ 弱解 $\in H^2$ $\xrightarrow[\text{Nash-Moser-De Giorgi 迭代}]{\text{研究弱解梯度满足的 PDE}}$ 梯度的有界性 $\xrightarrow[\text{Nash-Moser-De Giorgi 技术}]{\text{研究梯度满足的 PDE}}$
 $\text{梯度} \in C^\alpha \xrightarrow[\text{Campanato 空间}]{\text{Morrey 定理}} \text{梯度的梯度Hölder 连续} \xrightarrow[\text{Hölder 空间}]{\text{经典解的 Schauder 估计, 自助法 (boot-strapping method)}} u \in C^\infty$

- 二阶完全非线性椭圆型方程的粘性解: 在 Ω 内 $F(x, u, Du, D^2u) = 0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u = 0$. (应用: Monge-Ampère 方程, 最优输运)

- 弱解 (粘性解 viscosity solution) — 基于极值原理: 既是粘性下解, 又是粘性上解的连续函数.

- 例: 称 $u \in C(\bar{\Omega})$ 是 $\Delta u = 0$ 的粘性下解, 如果对任意 $\phi \in C^2(\Omega)$, 若 $u - \phi$ 在 $x_0 \in \Omega$ 取到局部极大值, 则

$\Delta \phi(x_0) \geq 0$; 类似定义粘性上解.

- 参考书: Caffarelli, Luis A.; Cabré, Xavier. Fully nonlinear elliptic equations. American Mathematical Society Colloquium Publications, 43. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.

习题 1. 如何将 Perron 方法推广到 Ω 是无界区域 (包括 $\partial\Omega$ 有界和无界) 的情形? 在本讲证明的基础上需要添加或修改哪些条件? 证明中哪些是局部的 (只需要每一点的邻域内的信息), 哪些是整体的 (需要全局的信息)?

习题 2. 证明: Laplace 方程的经典解必是粘性解; C^2 的粘性解必是经典解.

阅读任务和作业

- 必读 — 郇中丹, 黄海洋: 偏微分方程 (第二版), 高等教育出版社, 2013. [pp. 219-223]
- 参考文献

[GT] Gilbarg, David; Trudinger, Neil S. Elliptic partial differential equations of second order. Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. [中译本: 叶其孝等译, 二阶椭圆型偏微分方程, 高等教育出版社, 2016 年] (第 2 章, 第 8 章)

最后更新: 2022-11-6

偏微分方程

第十二讲 二阶椭圆型方程的极值原理

袁海荣 (华东师范大学 数学科学学院)

2022 年 11 月 17 日

由于微分方程自己的方法可以解决很多物理上的问题, 所以很多物理学家或研究工程方面的人会找数学家来讨论微分方程. 但是, 有时我们无法单靠自己的想象和抽象的方法来解决那个微分方程的定律所支配的物理 (或几何) 的现象, 因为微分方程的方法大半和其来源有关, 所以了解物理 (或几何) 现象有助于解决该微分方程. 微分方程的方法无法完全由数学用抽象的方法导出.

—— 丘成桐

学习要点

- 熟练掌握二阶椭圆型方程的弱极值原理、最大模估计、Hopf 引理、强极值原理及其证明, 以及典型应用
- 掌握常见的辅助函数及其中参数的选取技巧

弱极值原理

- 基本假设: $Lu \doteq \underbrace{a_{ij}(x)D_{ij}u}_{\text{扩散项}} + \underbrace{b_i(x)D_iu}_{\text{对流项或输运项}} + \underbrace{c(x)u}_{\text{源项}}$ (求和约定: 每个加项中重复指标从 1 到 n 求和).

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域. $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ (经典解). $A(x) \doteq (a_{ij}(x))_{n \times n}$ 实对称阵. 系数连续: $a_{ij}(x), b_i(x), c(x) \in C(\bar{\Omega})$

- 椭圆型: $\exists \lambda > 0$ 使得 $\forall x \in \Omega, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, 成立 $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$. (关键: 从代数性质得到分析性质)

- 结论 (一): 如果在 Ω 上 $Lu > 0$ 且 $c(x) \leq 0$, 而 u 在 $\bar{\Omega}$ 上具有非负极大值, 则该极大值不可能在 Ω 内取到, 从而 $\sup_{\bar{\Omega}} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+$. 这里记

$$u^+(x) \doteq \max\{u(x), 0\}. \quad (\text{难点: 对调和函数的证明现在不适用, 需要新方法!})$$

结论 (一) 的证明 假设 $u(x)$ 在 $x_0 \in \Omega$ 达到了非负极大值 $u(x_0) \geq 0$, 则 i) **源项**: $c(x_0)u(x_0) \leq 0$; ii) **输运项**: $b_i(x_0)D_i u(x_0) = 0$ (数学分析 — 可导极值点的 Fermat 引理: 梯度为零); iii) **扩散项**: 数学分析 — 二阶连续可导的极大值点处 Hessian 矩阵 $D^2 u(x_0) = (D_{ij} u(x_0))_{1 \leq i, j \leq n}$ **半负定** ($\Rightarrow$ 每个对角元 $\leq 0 \Rightarrow$ 迹 ≤ 0). 特殊情形: $A = (a_{ij}(x_0)) = I_n$ (n 阶单位阵) $\Rightarrow a_{ij}(x_0)D_{ij} u(x_0) = \sum_{j=1}^n D_{jj} u(x_0) = \Delta u(x_0) = \text{Tr}(D^2 u(x_0)) \leq 0$. 一般情形: 椭圆型条件 $\Rightarrow A = (a_{ij}(x_0))$ 是实对称正定阵, 现 $B \doteq D^2 u(x_0)$ 半负定, 要证明 $\text{Tr}(AB) \leq 0$. [典型的高等代数标准形方法]: 存在正交阵 Q 使得 $Q A Q^{-1} = \Lambda$ 为对角阵, 且每个对角元 (即特征值) > 0 , 利用迹在相似变换下不变, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(Q^{-1} \Lambda Q B Q^{-1} Q) = \text{Tr}(\Lambda \underbrace{Q B Q^T}_{\text{半负定, 于是每个对角元} \leq 0}) \leq 0$. 于是总成立 $Lu(x_0) \leq 0$, 与条件 (在 Ω 上 $Lu > 0$) 矛盾. □

注: (i) 如果 $c(x) \equiv 0$, 则 u 不在 Ω 内取到极大值. (ii) 思考: 如果 $Lu < 0$, 有什么结论? (iii) 仔细对比结论 (一)(二)(三) 的异同.

- 结论 (一): 如果在 Ω 上 $Lu > 0$ 且 $c(x) \leq 0$, 而 u 在 $\bar{\Omega}$ 上具有非负极大值, 则该极大值不可能在 Ω 内取到, 从而 $\boxed{\sup_{\bar{\Omega}} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+}$. 这里记 $u^+(x) \doteq \max\{u(x), 0\}$.
- 结论 (二): 如果在 Ω 上 $Lu \geq 0$ 且 $c(x) \leq 0$, u 在 $\bar{\Omega}$ 上有非负最大值, 则它必定在边界 $\partial\Omega$ 上取到.
- 结论 (三): 弱极值原理: 如果在 Ω 上 $Lu \leq 0$ 且 $c(x) \leq 0$, 则 $\boxed{\inf_{\bar{\Omega}} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-}$. 这里 $u^-(x) \doteq \min\{u(x), 0\}$.

弱极值原理

- 结论 (二) [弱极值原理]: 如果在 Ω 上 $Lu \geq 0$ 且 $c(x) \leq 0$, u 在 $\bar{\Omega}$ 上有非负最大值, 则它一定在边界 $\partial\Omega$ 上取到, 即 $\sup_{\bar{\Omega}} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+$

证明 (辅助函数.) $\forall \varepsilon > 0$, 置 $w(x) \doteq u(x) + \varepsilon e^{\alpha x_1}$, 其中 α 是个待定的参数, 使得可以用结论 (一). $Lw = Lu + \varepsilon e^{\alpha x_1} (a_{11}(x)\alpha^2 + b_1(x)\alpha + c(x))$. 椭圆型
 $\Rightarrow a_{11}(x) \geq \lambda > 0$, 紧集上连续函数有界 $\Rightarrow \exists M$ 使得 $|b_1|, |c| \leq M \Rightarrow \exists \alpha > 0$ 使得 $a_{11}(x)\alpha^2 + b_1(x)\alpha + c(x) \geq \lambda\alpha^2 - M(1 + \alpha) > 0 \Rightarrow Lw > 0 \xrightarrow{w^+ \doteq \max\{w, 0\}}$
 结论 (一)

$$\sup_{\bar{\Omega}} w \leq \sup_{\partial\Omega} w^+ \Rightarrow \sup_{\bar{\Omega}} u \leq \sup_{\bar{\Omega}} w \leq \sup_{\partial\Omega} w^+ \leq$$

$\sup_{\partial\Omega} u^+ + \varepsilon \sup_{\partial\Omega} e^{\alpha x_1} \xrightarrow[\partial\Omega \text{ 紧}]{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\partial\Omega} u^+$, 即得结论 (二). 结论 (三) 类似证明. $\square$

最大模估计

- 基本假设: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域. Ω 的直径 $d \doteq \sup_{x,y \in \Omega} |x - y| < \infty$.
 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ (经典解)
 - $Lu \doteq a_{ij}(x)D_{ij}u + b_i(x)D_i u + c(x)u$. $A(x) = (a_{ij}(x))_{n \times n}$ 实对称阵. 系数连续: $a_{ij}(x), b_i(x), c(x) \in C(\Omega)$,
 $\exists M > 0$ 使得 $\forall x \in \bar{\Omega}$, $\sum_{i=1}^n |b_i(x)| + |c(x)| \leq M$.
 - 椭圆型: $\exists \lambda > 0$ 使得 $\forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$, 成立 $a_{ij}(x)\xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2$.
- 最大模估计: 设 $f \in C(\bar{\Omega}), g \in C(\partial\Omega), c(x) \leq 0$, 则 Dirichlet 问题
在 Ω 内 $Lu = f$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u = g$ 的任意经典解 u 都满足估计
式 $\max_{\Omega} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |g| + C \max_{\Omega} |f|$, 其中常数 C 只依赖于 n, λ, M , 以及 Ω 的
直径 d .
- 推论: $c(x) \leq 0$ 时 Dirichlet 问题经典解的唯一性和在 $C(\bar{\Omega})$ 中的稳定性.

最大模估计的证明 (辅助函数.) 1. 构造 Ω 上的函数 w 使得 (♠)

在 Ω 内 $L(w \pm u) = Lw \pm f \leq 0 \Leftrightarrow Lw \leq \mp f$, 在 $\partial\Omega$ 上 $w \pm u = w \pm g \geq 0 \Leftrightarrow w \geq \mp g$.

如果这样的 w 存在, 弱极值原理 $\Rightarrow \forall x \in \Omega, w \pm u \geq 0 \Rightarrow |u(x)| \leq w(x)$, 估计 $|w|$ 即可.

2. 置 $F = \max_{\Omega} |f|, G = \max_{\partial\Omega} |g|$, 为保证 (♠), 只

需 在 Ω 上 $Lw \leq -F$, 在 $\partial\Omega$ 上 $w \geq G$. 为此, 假设 $\Omega \subset \{0 < x_1 < d\}$ (可通过坐标系平移和旋转实现, 不影响方程的条件和结论 — 研究变换下具有不变性质的一族对象的好处.) 作 $w(x) \doteq G + (e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1})F$, 显然在 $\partial\Omega$ 上 $w \geq G$. 直接计算:

$-Lw = (a_{11}(x)\alpha^2 + b_1\alpha)Fe^{\alpha x_1} - cG - c(e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1})F \geq (a_{11}\alpha^2 + b_1\alpha)F \geq (\lambda\alpha^2 - M\alpha)F \geq F$ (取参数 α 充分大即可). 证毕!

Hopf–Oleinik 边界点引理

- 基本假设: $Lu \doteq a_{ij}(x)D_{ij}u + b_i(x)D_iu + c(x)u$.
 - 系数连续有界: $a_{ij}(x), b_i(x), c(x) \in C(\Omega)$, $\exists M > 0$ 使得
$$\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(x)| + \sum_{i=1}^n |b_i(x)| + |c(x)| \leq M.$$
 - 椭圆型: $\exists \lambda > 0$ 使得 $\forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$, 成立 $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$.
- Hopf 引理: 条件 i) 球 $B \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, 且
$$c(x) \leq 0, \forall x \in B;$$
 ii) $u \in C^2(B) \cap C(B \cup \{x_0\})$ 在 B 内满足条件 $Lu \geq 0$; iii) u 在点 $x_0 \in \partial B$ 取到严格的非负最大值: $u(x_0) \geq 0, \forall x \in B, u(x) < u(x_0)$ (♣). 结论: 对在 x_0 处指向 B 外的任意向量 ν (即 $\nu \cdot \mathbf{n}(x_0) > 0$, $\mathbf{n}(x_0)$ 是外单位法向), 成立
$$\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} [u(x_0) - u(x_0 - t\nu)] > 0. \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0, \text{ 若 } u \in C^1(\bar{\Omega}) \right)$$

证明 1. 不妨设 $u \in C(\bar{B})$ (否则换成一个在 B 内且与 B 在 x_0 相切的小球继续如下论证), 以及 $B = B_R(O)$ (通过平移). 这些都不改变条件和结论.

2. 置函数 $v \doteq u + \varepsilon h$, 使得利用条件 (♣), 当 $\varepsilon > 0$ 很小时, v 在 x_0 取到非负最大值, 从而

$\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} [v(x_0) - v(x_0 - t\nu)] \geq 0 \Rightarrow \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} [u(x_0) - u(x_0 - t\nu)] \geq -\varepsilon \frac{\partial h}{\partial \nu}(x_0)$,
只需构造 h 使得 $\frac{\partial h}{\partial \nu}(x_0) < 0$ 即可. 注意: 只需要在 x_0 的一个邻域 N 内构造出 h .

3. 为使 v 在 x_0 取到非负最大值, 要求在 x_0 的邻域 N 内 $Lh > 0$

($\Rightarrow Lv = Lu + \varepsilon Lh > 0$) $\Rightarrow v$ 的非负最大值点在 ∂N 上,

且在 $\partial N \setminus \{x_0\}$ 上 $v(x) < u(x_0)$, 且 $h(x_0) = 0 \Rightarrow v(x_0) = u(x_0) \Rightarrow x_0$ 处 v 取到非负最大值.

3. 为使 v 在 x_0 取到非负最大值, 要求在 x_0 的邻域 N 内 $Lh > 0$ ($\Rightarrow Lv = Lu + \varepsilon Lh > 0$) $\Rightarrow v$ 的非负最大值点在 ∂N 上, 且在 $\partial N \setminus \{x_0\}$ 上 $v(x) < u(x_0)$, 且 $h(x_0) = 0 \Rightarrow v(x_0) = u(x_0) \Rightarrow x_0$ 处 v 取到非负最大值.

4. 作 $h(x) = \bar{h}(|x|)$, $\bar{h}(r) \doteq e^{-\alpha|r|^2} - e^{-\alpha R^2}$, 则 $|x_0| = R \Rightarrow h(x_0) = 0$. 又 $\frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}} = \bar{h}'(r) \mathbf{D}|x| \cdot \frac{x}{|x|} = \bar{h}'(r)$, $r = |x|$, 则 $\frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}}(x_0) = e^{-\alpha|x|^2}(-2\alpha|x|) \Big|_{|x|=R} < 0 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial \nu} = \mathbf{D}h \cdot \nu = \mathbf{D}h \cdot ((\nu \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\nu \cdot \tau)\tau) = (\nu \cdot \mathbf{n})\frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}} + (\nu \cdot \tau)\frac{\partial h}{\partial \tau} = (\nu \cdot \mathbf{n})\frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}} < 0$. 这里 τ 是球面 ∂B 在 x_0 处的一个切向量, 而 h 在 ∂B 上是常值 0, 故切向导数 $\frac{\partial h}{\partial \tau}$ 恒为零.

5. 计算 $Lh = e^{-\alpha|x|^2} \left\{ \underbrace{4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)x_i x_j}_{\text{椭圆型条件}} - 2\alpha \sum_{i=1}^n a_{ii}(x) - 2\alpha \sum_{i=1}^n b_i(x)x_i + c(x) \right\} -$

$\underbrace{c(x)}_{\leq 0} e^{-\alpha R^2} \geq e^{-\alpha|x|^2} \left\{ 4\alpha^2 \lambda |x|^2 - 2\alpha \sum_{i=1}^n |a_{ii}(x) + b_i(x)x_i| + c(x) \right\} \geq$

$e^{-\alpha|x|^2} \{4\alpha^2 \lambda |x|^2 - 2\alpha M(1+R) - M\}$. 为保证最后一式 ≥ 0 , 需要挖去原点. 故取邻域 $N \doteq B_R \setminus B_{R/2}$, 在 N 上, 取 α 充分大 (只依赖于 λ, R, M),

$|x| \geq \frac{R}{2} \Rightarrow Lh \geq e^{-\alpha|R|^2} \{ \alpha^2 \lambda R^2 - (2\alpha(1+R) + 1)M \} > 0$.

6. 现已取定 α 充分大, 从而 h 也已确定. 再定参数 $\varepsilon > 0$ 使得在

$\partial N \setminus \{x_0\} = \partial B_{R/2} \cup (\partial B \setminus \{x_0\})$ 上 $v(x) < u(x_0)$.

i) 在 $\partial B \setminus \{x_0\}$ 上 $h(x) \equiv 0 \Rightarrow v(x) = u(x) < u(x_0)$ 由定理条件

“ $u(x_0) \geq 0, \forall x \in B, u(x) < u(x_0)$ ($\clubsuit$)” 保证.

ii) 在紧集 $\partial B_{R/2} \subset B_R$ 上, 由 ($\clubsuit$), $u(x_0) - u(x)$ 有正的下界 δ_0 , 而 $h(x)$ 有上界 h_0 , 于是取 $\varepsilon \ll 1$ 使得 $\varepsilon h_0 < \delta_0$, 就有

$v(x) = u(x) + \varepsilon h(x) \leq u(x) + \varepsilon h_0 < u(x) + \delta_0 < u(x_0)$. 证毕.

注: Hopf 引理的结论是局部性的, 所以证明中不涉及拓扑. 在其定理陈述中将球 B 换作满足 **内球条件** 的区域 Ω , 结论仍然成立. (Ω 可以是无界区域!)

强极值原理

- 基本假设: $Lu \doteq a_{ij}(x)D_{ij}u + b_i(x)D_iu + c(x)u$.
 - 区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界, 系数连续: $a_{ij}(x), b_i(x), c(x) \in C(\bar{\Omega})$, 从而 $\exists \tilde{M} > 0$ 使得 $\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(x)| + \sum_{i=1}^n |b_i(x)| + |c(x)| \leq \tilde{M}$.
 - 椭圆型: $\exists \lambda > 0$ 使得 $\forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$, 成立 $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$.
- 强极值原理: 设 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 在 Ω 内满足 $Lu \geq 0$, 且 $c(x) \leq 0$, 则除非 u 是常数, 它在 $\bar{\Omega}$ 上的非负最大值只能在边界 $\partial\Omega$ 取到.

证明: 1. 设 u 在 $x_1 \in \Omega$ 取到非负最大值 M , 记 $\Sigma \doteq \{x \in \Omega : u(x) = M\}$, 则它是非空闭集. 如果 u 不是常值函数, 那么 $\Sigma \neq \Omega$, 则 $U = \Omega \setminus \Sigma$ 是非空开集. 下面导出矛盾.

2. 证明 $\partial\Sigma \cap \Omega \neq \emptyset$, 即存在 Σ 的边界点, 它也是 Ω 的内点. 任取一点 $x_2 \in U$, 由 Ω 的道路连通性, 存在连接 x_1, x_2 的在 Ω 内的道路 γ , 它是紧集且不与 $\partial\Omega$ 相交. 另一方面, 存在 $x_3 \in \gamma$ 使得 $x_3 \in \partial U$ (存在性由确界原理保证). 注意 $x_3 \notin \partial\Omega$, 故 $x_3 \in \Omega$. 又 $\partial U = \partial\Sigma$, 故 $x_3 \in \partial\Sigma \cap \Omega$.

[另一种证法: 由于 $\Sigma \subset \Omega \Rightarrow \partial\Sigma \subset \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, 若 $\partial\Sigma \cap \Omega = \emptyset$, 则 $\partial\Sigma \subset \partial\Omega$, 于是相对于 Ω 的子空间拓扑, Σ 是个无边界的闭集 $\xrightarrow{\text{任意非空闭集是其边界和内部的不交并}} \Sigma$ 是开集, 由于 Ω 是连通的 $\Rightarrow \Sigma = \Omega$.]

注意: Ω 是区域, 即连通开集. 此外, Ω 有界, 所以 Σ 和 $\partial\Omega$ 都是紧集.

3. 由于存在 $x_3 \in \partial\Sigma \setminus \partial\Omega$, 即成立 $\text{dist}(x_3, \Sigma) = 0 < \frac{1}{2}\text{dist}(x_3, \partial\Omega)$, 利用点到紧集的距离的连续性, 可以找到 $\hat{x} \in U$, 接近 x_3 , 使得 $0 < \text{dist}(\hat{x}, \Sigma) < \frac{1}{2}\text{dist}(\hat{x}, \partial\Omega)$.

考虑数集 $I \doteq \{r > 0 : B_r(\hat{x}) \subset U\}$. 由于 U 是开集, 对充分小的 r , 球 $B_r(\hat{x}) \subset U$. 所以 $I \neq \emptyset$. 此外, 对任意的 $R' > \text{dist}(\hat{x}, \Sigma)$, 就有 $B_{R'}(\hat{x}) \cap \Sigma \neq \emptyset$. (这是因为对固定的 $\hat{x}$, 紧集 Σ 上连续函数 $y \mapsto \text{dist}(\hat{x}, y)$ 取到最小值 $\text{dist}(\hat{x}, \Sigma) = \text{dist}(\hat{x}, y_*)$, 故 $y_* \in B_{R'}(\hat{x}) \cap \Sigma$.) 所以 I 有上界 $\text{dist}(\hat{x}, \Sigma)$. 由确界原理, $R_* = \sup I > 0$ 是存在的, 且 $R_* \leq \text{dist}(\hat{x}, \Sigma)$. (实际上可以证明 $R_* = \text{dist}(\hat{x}, \Sigma)$, 不过此处论证不需要此结论).

我们证明开球 $B_{R_*}(\hat{x}) \subset U$. 事实上, 由上确界的定义, 存在数列 $r_k \in I, k \rightarrow \infty$ 时 $r_k \nearrow R_*$. 设 $x \in B_{R_*}(\hat{x})$, 则存在 r_k 使得 $\text{dist}(\hat{x}, x) < r_k$, 从而由 $B_{r_k}(\hat{x}) \subset U \Rightarrow x \in U$. 由于 $U \subset \Omega$, 我们也得到 $B_{R_*}(\hat{x}) \subset \Omega$.

还可以证明 $B_{2R_*}(\hat{x}) \subset \Omega$. 事实上,

$B_{2R_*}(\hat{x}) = (B_{2R_*}(\hat{x}) \cap \Omega) \cup (B_{2R_*}(\hat{x}) \cap \partial\Omega) \cup (B_{2R_*}(\hat{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}))$, 由于 $2R_* < \text{dist}(\hat{x}, \partial\Omega)$, 必有 $B_{2R_*}(\hat{x}) \cap \partial\Omega = \emptyset$. 故连通集 $B_{2R_*}(\hat{x})$ 分解为开集 $B_{2R_*}(\hat{x}) \cap \Omega$ 和 $B_{2R_*}(\hat{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ 的不交并, 其中必有一个是空集, 另一个是 $B_{2R_*}(\hat{x})$. 由于 $\hat{x} \in B_{2R_*}(\hat{x}) \cap \Omega$, 故必有 $B_{2R_*}(\hat{x}) \cap \Omega = B_{2R_*}(\hat{x})$, 即证明了 $B_{2R_*}(\hat{x}) \subset \Omega$.

4. 由 R_* 的选法, 必有 $\overline{B_{R_*}(\hat{x})} \cap \Sigma \neq \emptyset$. 事实上, 如果这是空集, 则由分离公理 (或直接用度量), 存在 $R' > R_*$ 且 $B_{R'}(\hat{x})$ 与 Σ 不交. 那么对任意的 $R \in [R_*, R']$, 成立 $B_R(\hat{x}) \cap \Sigma = \emptyset$. 再取 $R < 2R_*$, 那么 $B_R(\hat{x}) \subset B_{2R_*}(\hat{x}) \subset \Omega = \Sigma \cup U$. 于是 $B_R(\hat{x}) \subset U$. 这样的 R 的存在性就与 R_* 的定义矛盾了. 所以 $\overline{B_R(\hat{x})} \cap \Sigma$ 包含 (至少) 一个点, 而且这些点都必须在球面 $\partial B_R(\hat{x})$ 上. 任意取定其中一个点 x_0 , 作过 x_0 , 在 $B_R(\hat{x})$ 内, 且与 $\partial B_R(\hat{x})$ 相切的小球 B .

5. 在 B 上可以用 Hopf 引理, 因为在 B 上 $u < M$, 在 $x_0 \in \Sigma$ 点 $u(x_0) = M$, 于是可知沿着 ∂B 在 x_0 点的外法向 $\mathbf{n}$, $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x_0) > 0$.

6. 另一方面, 在 Σ 的内点处 $Du \equiv 0$, 定理又假设 $Du \in C(\Omega)$, 于是按连续性, Du 在 Σ 上处处为零 $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x_0) = Du(x_0) \cdot \mathbf{n} = 0$, 导致矛盾. 证毕!

等值面边值问题与静电场的唯一性

- **实际问题** — 带电导体外的静电场: 设互不相交的有界区域 $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ 代表 N 个带电荷的导体 (例如铁球), $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus (\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_N)$ 是导体外的区域. 电磁学的一个基本问题: 此时 Ω 中静电场是否被唯一确定?
- **数学模型** — 等值面边值问题: 区域 Ω , 方程 $\Delta u = 0$ (注意 Ω 中没有电荷), 边界条件:
 - i) 处于静电平衡后导体内电场强度为零 (否则电荷收到电场力作用会持续加速运动), 即 $Du = 0 \Rightarrow u = \text{常数}$, 所以导体表面 $\partial\Omega_j$ 都是等势面, 边界条件: $u|_{\partial\Omega_j} = c_j$, 常数 c_j 待定, $j = 1, \dots, N$.
 - ii) Gauss 定律 $\Leftrightarrow$ 积分型非局部条件: $\int_{\partial\Omega_j} Du \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 4\pi Q_j$, 其中 Q_j 是导体 Ω_j 所带电荷数, $\mathbf{n}$ 是指向导体外的单位法向.
 - iii) 无穷远条件: $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0$ (即设无穷远电势为零)
- **唯一性**: 假设 Ω_j 满足外球条件, 那么上述问题的经典解如果存在, 一定是唯一的.
 - 1. 由线性, 这相当于在 $Q_j = 0$ ($j = 1, \dots, N$) 时证明所有 $c_j = 0$, 且 $u \equiv 0$.
 - 2. 无界区域用有界区域逼近: $\forall \varepsilon > 0, \forall \hat{x} \in \Omega$, 由 $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0$, 可取 R 充分大使得对所有 $j, \Omega_j \subset B_R(O), \hat{x} \in B_R(O)$, 且 $|x| = R$ 时 $|u(x)| \leq \varepsilon$. 由极值原理, u 的最大值和最小值只能在截断边界 $\{|x| = R\}$ 或导体表面 $\partial\Omega_j$ 上取到. 例如在 $\partial\Omega_j$ 上取到最大值 c_j , 由 Hopf 引理, 在表面各点都有 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} < 0 \Rightarrow \int_{\partial\Omega_j} Du \cdot \mathbf{n} \, d\sigma < 0$, 与该积分 = 0 的条件矛盾. 对取到最小值的情形可类似推出矛盾. 所以 u 的最大值和最小值只能在 $\{|x| = R\}$ 达到, 于是 $|u(\hat{x})| \leq \varepsilon$.
 - 3. 由 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 得到 $u(\hat{x}) = 0$. 由 $\hat{x}$ 的任意性, 可知 $u \equiv 0 \Rightarrow c_j = 0, j = 1, \dots, N$. 证毕!

混合等值面边值问题的分解与存在性

- 典型问题及其分解: 区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \neq \emptyset$, $\Gamma_0 \neq \emptyset$, F, f, g 是已知函数, A 是已知常数, c 是待求解的数, u 是待求解的函数:

$$(A) \begin{cases} \Delta u = F, & \text{in } \Omega, \\ u = f, & \text{on } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g, & \text{on } \Gamma_2, \\ u = c, & \text{on } \Gamma_0, \\ \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\sigma = A. \end{cases} \quad (B) \begin{cases} \Delta u_1 = F, & \text{in } \Omega, \\ u_1 = f, & \text{on } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}} = g, & \text{on } \Gamma_2, \\ u_1 = 0, & \text{on } \Gamma_0; \end{cases} \quad (C) \begin{cases} \Delta u_2 = 0, & \text{in } \Omega, \\ u_2 = 0, & \text{on } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}} = 0, & \text{on } \Gamma_2, \\ u_2 = 1, & \text{on } \Gamma_0 \end{cases}$$

- 间接方法 (便于理论分析): 置 $u = u_1 + cu_2$, 通过 $\int_{\Gamma_0} \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}} d\sigma + c \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}} d\sigma = A$ 确定 c . (由 Γ_0 和 Γ_1 非空知 u_2 不是常数函数, 从而由强极值原理和 Hopf 引理, 在 Γ_0 上 $\frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}} > 0$, 从而 $\int_{\Gamma_0} \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}} d\sigma > 0$.)
- 直接方法 (便于数值计算): 变分法. 参考: 谷超豪, 李大潜, 沈玮熙: 应用偏微分方程, 高等教育出版社, 2014.
- 导体表面的电荷分布问题: f, g, Ω 光滑时 Ω 内 $\Delta u = f$, $\partial\Omega$ 上 $u = g$ 确定了 $h \doteq \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega}$. 映射 $g \mapsto h$ 叫做 Dirichlet-Neumann 映射. h 代表物体表面的电荷分布密度. [拟微分算子, 反问题]

例: 设 $B = B_R(O)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的半径为 R , 中心为原点 O 的球. 对 Poisson 方程的 Dirichlet 问题: 在 B 内 $\Delta u = f$, 在 ∂B 上 $u = g$, 请用极值原理证明: 如果自由项 f 和 g 都是多项式, 则该问题存在唯一的解.

证明: 1. 唯一性用极值原理是显然的.

2. 记 P_N 是 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 的 N 次 (n 元) 多项式构成的实线性空间, 它是有限维的. 若 $f, g \in P_N$, 则 $f - \Delta g \in P_N$, 于是不妨通过考虑 $u - g$ 而将边界条件齐次化. 所以下面总假设 $g \equiv 0$.

3. 作映射 $T: P_N \rightarrow P_N, w \mapsto \Delta((R^2 - |x|^2)w(x))$. 它显然是线性的. 由于 $(R^2 - |x|^2)w(x)$ 还是多项式, 次数至多是 $N + 2$, 所以 $Tw \in P_N$, 定义合理.

4. 线性代数基本定理 (Fredholm 择一性: 从有限维线性空间到其自身的线性变换如果是单射, 则必然是满射; 等价说法: $\dim \operatorname{R}(T) + \dim \ker T = \dim P_N$, 或非齐次线性代数方程组可解当且仅当对应齐次方程组只有零解).

5. 由此, 只需证明 T 是单射, 那么对任意 $f \in P_N$, 就存在 $w \in P_N$ 使得 $u(x) \doteq (R^2 - |x|^2)w(x)$ 满足方程 $\Delta u = f$, 而 u 满足齐次边界条件则是显然的.

6. 设 $Tw = 0$, 要证明 $w = 0$. $Tw = 0$ 意味着对应的 $u(x) = (R^2 - |x|^2)w(x)$ 是调和函数, 而且它在 ∂B 上是零. 由极值原理, $u \equiv 0 \Rightarrow w \equiv 0$. 证毕.

习题 1. 举例说明在无界区域上极值原理可以不成立.

习题 2. 设 $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}$, 请通过构造形如 $u(x, y) = f(x)g(y)$ 的函数 (称为分离变量的函数), 说明存在非零的函数 u , 使得在 Ω 内 $\Delta u + 2u = 0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u = 0$. 此时极值原理为何不成立?

习题 3. 设有界区域 Ω 满足内球条件, 证明 Robin 问题 “在 Ω 内 $\Delta u = 0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma u = 0$ ” 只有常数解. 这里 $\mathbf{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的外单位法向, 系数 $\sigma(x) \geq 0$. 如果 $\sigma(x)$ 不恒为零, 则 $u \equiv 0$.

思考: 为什么构造的辅助函数大都与指数函数有关?

指数函数是连接代数性质和分析性质的一座桥梁, 究其原因, 指数函数是二阶微分算子 d^2/dt^2 的特征函数: $u''(t) = \lambda u(t)$ 的通解都可以用指数函数 (辅以幂函数) 表示.

阅读任务和作业

- 必读 — 郇中丹, 黄海洋: 偏微分方程 (第二版), 高等教育出版社, 2013. [pp.198-202]
- 选读 — Qin Han, Fanghua Lin: Elliptic Partial Differential Equations, second edition, AMS, 2011. [Chapter 2, §2.1-2.3]
- 作业 — p.202: 1, 2.

最后更新: 2022-11-24

偏微分方程

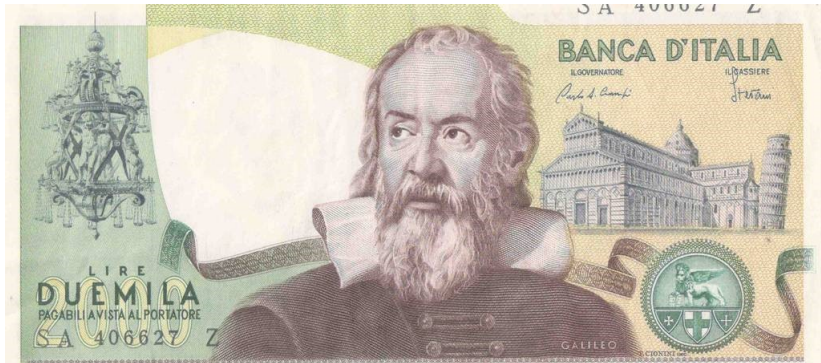
第十三讲 Laplace 算子的谱和分离变量法

袁海荣 (华东师范大学 数学科学学院)

2022 年 11 月 24 日

哲学写在大自然这本大书里, 这本书对于我们 是打开着的. 但是, 除非首先学懂它的语言, 会读这本书使用的文字, 我们就不可能理解它. 它是用数学语言写的, 它的文字就是三角形、圆和其它几何图形. 没有它, 这本书凡人连一个字也看不懂, 没有这些就会在黑暗的深渊里迷路.

——伽利略 (1564 年 2 月 15 日 — 1642 年 1 月 8 日)



传记: <https://www.britannica.com/biography/Galileo-Galilei>

学习要点

- 熟练掌握用分离变量法求解 PDE 定解问题形式解的步骤
- 了解线性算子的谱理论
- 理解通过分离变量法确定氢原子能级的方法
- 复习常微分方程的幂级数解法和常见常微分方程的通解
- 复习 Fourier 级数理论

圆柱体的稳态温度分布问题

- 物理问题: 设圆柱体 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < a^2, -\infty < z < \infty\}$ 内无热源, 侧面温度保持恒定, 为 $F(x, y)$. 求柱内温度的分布.
- 数学问题: 在圆盘 $B_a = \{x^2 + y^2 < a^2\}$ 内 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; $u|_{x^2+y^2=a^2} = F(x, y)$. 求解 $u = u(x, y)$.
- 方法一: 这是圆盘上的 Laplace 方程的 Dirichlet 问题, 已有 Poisson 公式 $u(x, y) = \frac{a^2 - (x^2 + y^2)}{2\pi a} \int_{\partial B_a} \frac{F(\xi, \eta)}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} d\sigma(\xi, \eta)$, 或者在极坐标 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 下, $u(r, \theta) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\phi)}{a^2 - 2ar \cos(\phi - \theta) + r^2} d\phi$, 其中 $f(\phi) = F(a \cos \phi, a \sin \phi)$. 优点: 容易研究解的全局的定性性质; 缺点: 不方便具体计算函数 (近似) 值, 难于辨别物理现象.

- 方法二: 分离变量法 — 用函数项级数 (幂级数, Fourier 级数) 表示解. 优点: 容易计算解的近似值和局部性质, 看出主导的物理现象; 缺点: 难以把握整体性质.
类比: 分数 — 便于乘除法; 小数 — 便于加减法和比较大小; 全纯函数及其局部的幂级数表示 (解析开拓)
- 分离变量法源于弦振动方程的研究, 是给出线性偏微分方程解的重要方法 (数学: 调和分析, 泛函分析 — 线性算子谱理论, 特殊函数; 物理和工程问题需要求出便于计算的解析解或近似解, 大都采用分离变量法及其推广 — 积分变换法求解).

圆盘上的 Dirichlet 问题: 分离变量法

- 数学问题: 在圆盘 $B_a = \{x^2 + y^2 < a^2\}$ 内 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; $u|_{x^2+y^2=a^2} = F(x, y)$. 求解 $u = u(x, y)$.
- 分离变量法思路:
 - 第一步 — 找到恰当坐标系, 使得方程具有变量分离的形式 (对不同变量求导的项相加的形式, 不出现混合偏导数), 部分边界条件是齐次的 (数学: 通过变量替换、问题的线性叠加/分解实现);
 - 第二步 — 假设解存在并充分光滑, 计算所有的分离变量的非平凡特解, 使之满足方程和一部分齐次边界条件 (数学: 常微分方程边值问题或 Laplace 算子的特征值问题);
 - 第三步 — 利用线性, 通过特解的组合和极限得到满足余下边界条件的形式解 (数学: 函数项级数, 特征函数系的完备性);
 - 第四步 — 在自由项适当条件下, 验证所得表达式确实是解 (数学: 函数项级数的收敛和逐项求导等性质).

- 第一步: 直角坐标下方程虽已分离变量, 但边界条件仍显性地依赖于 x, y . 故尝试选取极坐标 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 问题化为:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & 0 \leq r < a, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ u(a, \theta) = f(\theta) = F(a \cos \theta, a \sin \theta), & 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

- 第二步: 分离变量的特解: 设 $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$, 代入方程 $\Rightarrow$
 $r^2 \frac{\frac{1}{r}(rR'(r))'}{R(r)} = -r^2 \frac{\Theta''(\theta)}{r^2 \Theta(\theta)} = \lambda \in \mathbb{R}$

- 问题: $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, 0 \leq r < a; \quad u(a, \theta) = f(\theta) = F(a \cos \theta, a \sin \theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

- 分离变量的特解: 设 $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$, 代入方程 $\Rightarrow$

$$\underbrace{r^2 \frac{\frac{1}{r}(rR'(r))'}{R(r)}}_{\text{只依赖于 } r, \text{ 与 } \theta \text{ 无关}} = \underbrace{-r^2 \frac{\Theta''(\theta)}{r^2 \Theta(\theta)}}_{\text{只依赖于 } \theta, \text{ 与 } r \text{ 无关}} = \underbrace{\lambda}_{\text{一个 } r, \theta \text{ 的函数, 又和 } r, \theta \text{ 无关, 只能是常数}} \in \mathbb{R}$$

- ODE(1): $\Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0$ 隐藏的边界条件 — 周期条件 $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta), \forall \theta$, 或者 $\Theta(0) = \Theta(2\pi), \Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$.
- ODE(2): $\frac{1}{r}(rR'(r))' - \frac{\lambda}{r^2}R(r) = 0$ 隐藏的物理要求: $R(r)$ 有界.

- **复习** — 二阶线性常系数常微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 的通解: 特征方程 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. i) 有两个不同的实根 λ_1, λ_2 : 解 $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ (c_1, c_2 是任意常数); ii) 有一对共轭的虚根 $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 则 $y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$; iii) 只有一个重的实根 λ : $y = c_1 x e^{\lambda x} + c_2 e^{\lambda x}$.
- **复习** — Euler 常微分方程的通解: 设 $a_0, \dots, a_{n-1}$ 是给定的实数, 形如 $x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = b(x)$ 的线性微分方程叫 Euler 方程. 它可以通过自变量变换 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$ 化为常系数线性微分方程; 或猜测形如 x^λ 的特解, 由特征方程求解.

• ODE(1) 的解 — 结论: $\lambda = \lambda_n = \omega_n^2$, $\omega_n = n$, $n = 0, 1, \dots$ 时有非零的 2π -周期解

• $\lambda = 0 \Rightarrow \Theta(\theta) = A + B\theta \Rightarrow$ 非零周期解 $\Theta_0(\theta) \equiv 1$ (特征子空间是一维的)

• $\lambda = \omega^2 > 0 \Rightarrow$ 通解

$\Theta(\theta) = A \cos(\omega\theta) + B \sin(\omega\theta) \xrightarrow[2\pi\text{周期解}]{\text{要求 } \omega \in \mathbb{N}} \Theta_n(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)$ (特征子空间是二维的 — 简并现象)

• $\lambda = -\omega^2 < 0 \Rightarrow$ 通解 $\Theta(\theta) = Ae^{\omega\theta} + Be^{-\omega\theta}$ 无非零周期解. (练习)

• ODE(2) — $\lambda = n^2 \Rightarrow r^2 R''(r) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0 \xrightarrow[r=e^t]{\frac{d^2 R}{dt^2} - n^2 R = 0} R_0 = C_0 + D_0 t = C_0 + D_0 \ln r; R_n = C_n e^{nt} + D_n e^{-nt} = C_n r^n + D_n r^{-n}, n = 1, 2, \dots \xrightarrow[\text{物理要求}]{R(0) < \infty} R_0(r) = 1, R_n(r) = r^n.$

- 问题: $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad 0 \leq r < a; \quad u(a, \theta) = f(\theta) = F(a \cos \theta, a \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

- 第二步 — 分离变量的特解: $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$

结论: 特征值 $\lambda_0 = 0$ 对应 $u_0(r, \theta) = 1$; $\lambda_n = n^2$ 对应

$$u_n(r, \theta) = \{r^n \cos n\theta, r^n \sin n\theta\}, n = 1, 2, \dots$$

- 第三步 — 作特解的组合与极限, 使得满足剩余边界条件

$u(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \quad 0 \leq r < a,$ 其中 A_n, B_n 是待定系数. 边界条件

$u(a, \theta) = f(\theta) \Rightarrow f(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \theta \in [0, 2\pi]$ 由 Fourier 系数公式 (周期函数在一个周期长度上的积分总相等) $\Rightarrow A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, n = 0, 1, 2, \dots; B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx, n = 1, 2, \dots$

- 复习 — Fourier 级数理论: 三角函数系的正交性:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \pi \delta_{mn}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) dx = 2\pi \delta_{m0}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx = 0$$

- 2π 周期函数的 Fourier 展开: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, Fourier

$$\text{系数公式 } a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, n = 0, 1, 2, \dots; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, n = 1, 2, \dots$$

- $2T$ 周期函数的 Fourier 展开: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{T}x + b_n \sin \frac{n\pi}{T}x)$,

$$\text{Fourier 系数公式 } a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos(\frac{n\pi}{T}x) dx, n = 0, 1, 2, \dots; \quad b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \sin(\frac{n\pi}{T}x) dx, n = 1, 2, \dots$$

- 形式解: $u(r, \theta) =$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \int_0^{2\pi} f(\phi) \underbrace{[\sin(n\theta) \sin(n\phi) + \cos(n\theta) \cos(n\phi)]}_{=\cos n(\phi-\theta)} d\phi =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) [1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n(\phi - \theta))] d\phi$$

- 形式求和: 置 $z \doteq \frac{r}{a} e^{i(\phi-\theta)}$, Euler 公式 $\Rightarrow \operatorname{Re} z^n = \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\phi - \theta)$; 由 $|z| < 1$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, 得到 $1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n(\phi - \theta)) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z^n =$
 $-1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} z^n = -1 + 2 \operatorname{Re} \frac{1}{1-z} = -1 + 2 \frac{1 - \frac{r}{a} \cos(\phi-\theta)}{1 - \frac{2r}{a} \cos(\phi-\theta) + \left(\frac{r}{a}\right)^2} = \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\phi-\theta) + r^2}$

故得到形式解 (Poisson 公式)

$$u(r, \theta) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\phi)}{a^2 - 2ar \cos(\phi - \theta) + r^2} d\phi$$

- 第四步 — 解的验证: 只要 f 连续, Poisson 公式就给出经典解 (第九讲已证)

意义: Fourier 级数的 Abel 求和法:

$$u(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \quad 0 \leq r < a, \quad \boxed{\lim_{r \rightarrow a-} u(r, \theta) = f(\theta)}$$

(请对比 Fourier 级数点态收敛性质, f 仅仅连续是不够的!)

- 类似的问题的形式解

- 圆盘外问题解 — $r > a$: $u(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)).$

- 圆环内问题解 — $0 < a_1 < r < a_2$:

$$u(r, \theta) = \frac{C_0}{2} + \frac{D_0}{2} \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n r^n + D_n r^{-n}) (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)).$$

上述系数由边界条件确定. 注意: 并非所有级数形式的解都可以求和用积分表示. 一般来说给出级数形式的解即可.

例: 圆环上 Poisson 方程的混合边值问题

- 求解问题:
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 12(x^2 - y^2), & 0 < a^2 < x^2 + y^2 < b^2 < +\infty, \\ u|_{x^2+y^2=a^2} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{x^2+y^2=b^2} = 0. \end{cases}$$
 $\mathbf{n}$ 是外单位法向
- 解法一: 将方程齐次化 — 由于 $v(x, y) \doteq x^4 - y^4 = r^4 \cos 2\theta$ 满足 $\Delta v = 12(x^2 - y^2)$, 令 $u = v + w$, 则 $\Delta w = 0$, 且 $w|_{r=a} = 1 - a^4 \cos 2\theta$, $\partial_r w|_{r=b} = -4b^3 \cos 2\theta$. 由圆环内解的一般形式 $w(r, \theta) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)(C_n r^n + D_n r^{-n})$, 根据这里具体的边界条件, 可进一步设 $w(r, \theta) = A_0 + B_0 \ln r + (C_2 r^2 + D_2 r^{-2}) \cos 2\theta$. 代入边界条件, 有 $A_0 + B_0 \ln a = 1, a^2 C_2 + a^{-2} D_2 = -a^4, B_0/b = 0, 2bC_2 - 2b^{-3}D_2 = -4b^3 \Rightarrow A_0 = 1, B_0 = 0, C_2 = -\frac{a^6+2b^6}{a^4+b^4}, D_2 = \frac{a^4b^4(2b^2-a^2)}{a^4+b^4}$.

- 解法二：谱方法 — 原问题在极坐标下为 $\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 12r^2 \cos 2\theta, 0 < a < r < b < \infty; u(a, \theta) = 1; \frac{\partial u}{\partial r}(b, \theta) = 0$. 固定 r 后将 $u(r, \theta)$ 关于 θ 作 Fourier 级数, 就有 $u(r, \theta) = A_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n(r) \cos n\theta + B_n(r) \sin n\theta]$, 其中 $A_n(r)$ 和 $B_n(r)$ 是 Fourier 系数. 代入方程及边界条件, 对比系数, 可得如下关于 Fourier 系数的 ODE 定解问题:
 - $n = 0$: $\frac{1}{r} [rA_0'(r)]' = 0, A_0(a) = 1, A_0'(b) = 0 \Rightarrow A_0(r) = 1$;
 - $n = 2$: $\frac{1}{r} [rA_2'(r)]' - \frac{4}{r^2} A_2(r) = 12r^2, A_2(a) = 0, A_2'(b) = 0 \Rightarrow$ 非齐次 Euler 方程通解 $A_2(r) = Cr^2 + Dr^{-2} + r^4$. 利用边界条件确定 C, D .
 - 其余 $A_n = 0, B_n = 0 (n \neq 0, 2)$.

例: 矩形柱体温度的稳恒分布

- 问题: 截面为矩形的无限长棱柱体, 内部无热源, 两个相对侧面与外界绝热, 另外两个相对侧面温度分别保持为 0°C 以及与高度无关的稳恒分布, 求柱体内的温度. 目的: 体会分离变量法对边界条件的要求: 齐次条件用于分离变量解的构造, 非齐次边界条件用 Fourier 级数. $\Rightarrow$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, 0 < x < a, 0 < y < b; u|_{x=0} = 0, u|_{x=a} = f(y); u_y|_{y=0} = u_y|_{y=b} = 0.$$

- 第一步: 分离变量的特解 — 本征值和本征函数:

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \Rightarrow Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, Y'(0) = Y'(b) = 0; X''(x) - \lambda X(x) = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, Y_n(y) = \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), n = 0, 1, \dots, \text{对应的}$$
$$X_0(x) = C_0 + D_0x, X_n(x) = C_n \cosh \frac{n\pi}{b}x + D_n \sinh \frac{n\pi}{b}x \quad (\text{注: 双曲余弦函数 } \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \text{ 双曲正弦函数 } \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})).$$

● 第二步: 级数

解 — $u(x, y) = C_0 + D_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cosh \frac{n\pi}{b} x + D_n \sinh \frac{n\pi}{b} x) \cos(\frac{n\pi}{b} y)$. 左侧边界条件 $\Rightarrow C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \frac{n\pi}{b} y = 0 \xrightarrow[\text{Fourier 级数的唯一性}]{\forall n=0,1,\dots} C_n = 0$. 右侧边界条件

$\Rightarrow D_0 a + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh \frac{na\pi}{b} \cos \frac{n\pi}{b} y = f(y) \Rightarrow aD_0 = \frac{1}{b} \int_0^b f(y) dy, \quad D_n \sinh \frac{na\pi}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \cos \frac{n\pi}{b} y dy \Rightarrow$ 形式解

$u(x, y) = \frac{x}{ab} \int_0^b f(y) dy + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{b \sinh \frac{na\pi}{b}} \left(\int_0^b f(\eta) \cos \frac{n\pi\eta}{b} d\eta \right) \sinh \frac{n\pi}{b} x \cos \frac{n\pi}{b} y.$

● 第三步: 解的验证 — 请给出一个关于 f 的充分条件, 证明在该条件下上述形式解确实是经典解 (即满足方程, 还满足边界条件). 提示: 先考虑 $f \in C^4([0, b])$, 注意 $\sinh \frac{nx\pi}{b} \leq \sinh \frac{na\pi}{b}$;

再考虑 f 仅连续时. 复习函数项级数一致收敛, 逐项求导和取极限定理

例: 长方体内的稳恒温度分布

- 问题: $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$, $0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c$; $u|_{x=0} = u_x|_{x=a} = u_y|_{y=0} = u|_{y=b} = 0$; $u|_{z=0} = 0, u|_{z=c} = \phi(x, y)$.
- 第一步: 分离变量的特解. 设 $u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$, 代入方程
 $\Rightarrow X'' + \lambda X = 0, X(0) = X'(a) = 0$; $Y'' + \mu Y = 0, Y'(0) = Y(b) = 0$;
 $Z'' - (\lambda + \mu)Z = 0$. 前两个 ODE 边值问题 $\Rightarrow$ 本征值
 $\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2a}\right)^2$, $\mu_m = \left(\frac{(2m+1)\pi}{2b}\right)^2$, 本征函数
 $X_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n}x$, $Y_m(y) = \cos \sqrt{\mu_m}y$, $n, m = 0, 1, \dots$. 记 $\omega_{mn} = \sqrt{\lambda_n + \mu_m}$, 则第
三个 ODE $\Rightarrow Z_{mn} = C_{mn} \cosh \omega_{mn}z + D_{mn} \sinh \omega_{mn}z$.

- 第二步: 形式解.

$u(x, y, z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} [C_{mn} \cosh(\omega_{mn}z) + D_{mn} \sinh(\omega_{mn}z)] \sin \sqrt{\lambda_n}x \cos \sqrt{\mu_m}y$. 边界条件 $u|_{z=0} = 0 \Rightarrow \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{mn} \sin \sqrt{\lambda_n}x \cos \sqrt{\mu_m}y = 0 \Rightarrow C_{mn} = 0$ (多元函数的 Fourier 级数系数公式, 仍利用本征函数的正交性). 边界条件

$$u|_{z=c} = \phi(x, y) \Rightarrow \sum_{m,n=0}^{\infty} D_{mn} \sinh(\omega_{mn}c) \sin \sqrt{\lambda_n}x \cos \sqrt{\mu_m}y = \phi(x, y) \Rightarrow D_{mn} \sinh(\omega_{mn}c) = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \phi(x, y) \sin \sqrt{\lambda_n}x \cos \sqrt{\mu_m}y \, dy dx.$$

- 第三步: 对 $\phi(x, y)$ 加适当条件, 验证形式解是经典解.

(函数项级数一致收敛判别, 极限和求导法则; 本征函数系的正交性最好利用 ODE 问题间接证明, 而非直接计算. 一般情形推广: 特殊函数论.)

- Riemann 引理 — 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) \, dx = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(nx) \, dx = 0.$$
- 点态收敛定理 — $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积, 在 x 处左导数 $f'_-(x)$ 和右导数 $f'_+(x)$ 存在, 或者存在 $\alpha > 0$ 使得 $f(x+h) - f(x) = O(|h|^\alpha)$, 则 f 的 Fourier 级数在点 x 收敛到 $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$.
- 一致收敛定理 — 若 $f(x)$ 在一个开区间内一致地成立着
$$|f(x+h) - f(x)| = o\left(\ln \frac{1}{|h|}\right)^{-1},$$
 则 f 的 Fourier 级数在这个区间的任一内闭区间上一致收敛到 $f(x)$.

(特别地, Hölder 连续函数的 Fourier 级数一致收敛. 若 $f \in C^k([-\pi, \pi])$, $f(\pi) = f(-\pi)$, 其 Fourier 级数为

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 则 $|a_n| + |b_n| = O(n^{-k})$ ($n \rightarrow \infty$), 从而 Fourier 级数一致收敛.

可对 Fourier 系数公式, 用分部积分证明. 意义: 函数的光滑性 $\Leftrightarrow$ 高频部分振幅的衰减)

- 逐项积分定理 — 设 $f(x)$ 可积, 其 Fourier 级数为

$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ (注意: 不需要收敛), 则

$$\int_c^x f(t) dt = \frac{a_0}{2} \int_c^x dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt) dt.$$

- 逐项微分定理 — 设 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续, 且 $f(\pi) = f(-\pi)$, 除有限个点外可导; 又设 $f'(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积, 则 $f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx)$.

- L^2 收敛 — 设 $f(x) \in L^2([-\pi, \pi])$ (即 $\|f\|_{L^2([-\pi, \pi])} \doteq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$), 记部分和 $S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 则 $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N\|_{L^2([-\pi, \pi])} = 0$.

- Parseval 等式 — 设 $f(x) \in L^2([-\pi, \pi])$, 那么

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

参考: 陈纪修, 於崇华, 金路: 数学分析 (第二版) 下册, 高等教育出版社, 2004, 第十六章. 哈代, 罗戈辛斯基 [著]; 徐瑞云, 王斯雷 [译]: 三角级数论, 哈尔滨工业大学出版社, 2013, 定理 55, 59.

函数项级数的一致收敛及其性质

- 函数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 在点集 I 上一致收敛的概念: $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > m \geq N, \forall x \in I$, 成立 $|u_m(x) + \cdots + u_n(x)| \leq \epsilon$.
- 优级数判别法: $\forall x \in I, |u_n(x)| \leq M_n$, 级数 $\sum M_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum u_n(x)$ 一致收敛.
- Abel 判别法: 设 $\sum u_n(x)$ 在 I 上一致收敛; 对于固定的 $x \in I$, 数列 $\{v_n(x)\}$ (关于 n) 单调; 函数列 $\{v_n(x)\}$ 在 I 上一致有界, 则函数项级数 $\sum u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致收敛.
- Dirichlet 判别法: 如果 $\sum u_n(x)$ 的部分和序列在 I 上一致有界, 对于每个固定的 $x \in I$, 数列 $\{v_n(x)\}$ 单调, 在 I 上 $v_n(x)$ 一致收敛到零, 那么函数项级数 $\sum u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致收敛.
- 连续性: 若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 I 上一致收敛, 且每一项都连续, 则其和连续. (极限与求和换序).
- 可积性: 若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 I 上一致收敛, 且每一项都连续, 则 $\int_a^b \sum u_n(x) dx = \sum \int_a^b u_n(x) dx$.
- 可微性: 若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 I 上一点收敛, 且每一项都可导, 函数项级数 $\sum u'_n(x)$ 在 I 上一致收敛, 则 $\frac{d}{dx} \sum u_n(x) = \sum \frac{d}{dx} u_n(x)$.

华东师大《数学分析》第四版下册第 13 章

高等代数: 正规算子及其对角化

- 设 φ 是有限维内积空间的线性变换, 其伴随算子记为 φ^* . 如果 $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$, 则称 φ 是**正规算子**. 例: 自伴算子 ($\varphi^* = \varphi$); 正交变换 (酉变换) ($\varphi^* = \varphi^{-1}$)
- 正规矩阵: $AA^* = A^*A$ ($A^* \doteq \bar{A}^T$ 共轭转置). 特例: 实的对称阵, 复的 Hermite 阵; 正交阵; 酉阵
- 定理 (复数域的情形): 设 V 是 n 维酉空间, φ 是 V 上的正规算子, 则 V 有一组标准正交基, 使得在这组基下, φ 对应的矩阵是对角阵, 而基向量恰是 φ 的 n 个线性无关的特征向量. (量子力学)
推论: i) 任一酉阵都酉相似于对角阵, 且每个对角元都是模长为 1 的复数 (谱集在单位圆周上). ii) 每个 Hermite 阵都酉相似于实对角阵, 且不同特征值对应特征向量正交 (谱集在实轴上).

- 定理 (实数域的情形): 设 V 是 n 维欧氏空间, φ 是 V 上的正规算子, 则存在一组标准正交基, 使得 φ 在这组基下对应的矩阵具有如下分块形式:

$\text{diag}\{A_1, \dots, A_r, c_{2r+1}, \dots, c_n\}$, 这里 c_j ($j = 2r+1, \dots, n$) 都是实数, A_i 形如 $\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$ 是二阶实矩阵.

推论: i) 实对称阵正交相似于实对角阵, 且不同特征值对应特征向量正交.

ii) 设 A 是 n 阶正交阵, 则 A 正交相似于上述分块矩阵, 其中

$$c_{2r+1} = \dots = c_s = 1, c_{s+1} = \dots = c_n = -1, \text{ 而 } A_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}.$$

iii) 任一实斜对称阵正交相似于分块矩阵 $\text{diag}\{B_1, \dots, B_r, 0, \dots, 0\}$, 其中

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 & b_i \\ -b_i & 0 \end{pmatrix}. \text{ 姚慕生: 高等代数学, 复旦大学出版社, 1999. 第 9.5, 9.6 节.}$$

泛函分析: 线性自共轭紧算子的谱理论

- 定理: 设 H 是 (复可分) Hilbert 空间, A 是 H 上的 **自共轭的紧算子**. 设 $\{\lambda_n : n = 1, 2, \dots\}$ 是 A 的非零特征值全体, P_n 是 H 到相应于特征值 λ_n 的特征子空间 (只有有限维) 的投影算子, $P_0 \doteq I - \sum_n P_n$, 那么 $P_0 H$ 必是相应于特征值为 0 的特征子空间. 这时 A 的一切非零谱点都是实的特征值, 只以 0 为极限点, 而且 $A = \sum_n \lambda_n P_n$. 令 $\{e_k^{(n)} : k = 1, 2, \dots, m_n\}$ 是 $P_n H$ ($n \geq 1$) 的完备标准正交基, 那么 $Ax = \sum_{n,k} \lambda_n \cdot (x, e_k^{(n)}) e_k^{(n)}$.

例: 设 $K(x, y) \in L^2([a, b] \times [a, b])$, 且 $K(s, t) = \overline{K(t, s)}$, 那么 $L^2([a, b])$ 上的有界线性算子 $K: (Kf)(s) = \int_a^b K(s, t)f(t) dt$ 是自共轭的紧算子. 设 $\{\lambda_k\}$ 是 K 的全体特征值, $\lambda_0 = 0$, 又记 $\{e_n^{(k)} : n = 0, 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots, m_n\}$ (m_0 可能是无限的) 是 λ_n 对应特征子空间的完备标准正交基, 则 $Kf = \sum_n \lambda_n \sum_{k=1}^{m_n} (f, e_k^{(n)}) e_k^{(n)}$.

- 概念: 伴随算子 $A^* \text{ — } (Ax, y) = (x, A^*y)$; **自共轭**: $A = A^*$ (一般来讲, 如果 A 不是在 H 上都有定义 (例如无界算子), 则 $D(A^*) \supset D(A)$, 如果 $A \subset A^*$, 称 A 对称). **紧算子** — 有界集映为预紧集 (闭包是紧集的集合).

- 线性算子的正则点: 设 X 是 (复) 赋范线性空间, $B: D(B) \subset X \rightarrow X$ 是线性算子. 设 $\lambda \in \mathbb{C}$, 若 $\lambda I - B: D(B) \rightarrow X$ 是单的满射 (1-1 对应), 且逆映射 $(\lambda I - B)^{-1}: X \rightarrow D(B) \subset X$ 是连续的, 则称 λ 是 B 的**正则点**. 正则点集记作 $\rho(B)$; $\sigma(B) = \mathbb{C} \setminus \rho(B)$ 叫作 B 的**谱集**. **点谱** $\sigma_p(B)$ 由特征值构成: $\lambda I - B$ 不是单射; **连续谱** $\sigma_c(B)$: $\lambda I - B$ 单, 但是不满 ($(\lambda I - B)x = f$ 不总是有解); 或者 $\lambda I - B$ 单而且满, 但逆映射 $(\lambda I - B)^{-1}$ 不连续, 即 $(\lambda I - B)x = f$ 的解 x 不连续依赖于 f . (由逆算子定理, 如果 $D(B) = X$, 则最后一种情形不出现.)

参考: 夏道行, 吴卓人, 严绍宗, 舒五昌: 实变函数论与泛函分析, 下册 (第二版修订本), 高等教育出版社, 2010. 6.9 节, p. 342; p. 180, p. 205 (紧算子谱的 Riesz-Schauder 理论)

PDE: 紧集上 Dirichlet-Laplace 算子的谱

- 定理: 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集, 对特征值问题: 在 Ω 内 $-\Delta w = \lambda w$, 在 $\partial\Omega$ 上 $w = 0$, 成立如下结论:
 - 特征值 λ 都是实数.
 - 将特征值按重数记作 $\Sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, 则 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty$.
 - 记 λ_k 对应的特征函数为 w_k , 则 $\{w_k\}$ 构成 $L^2(\Omega)$ 的一组完备的标准正交基, 且 $\{w_k/\sqrt{\lambda_k}\}$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 中完备的标准正交基.
 - 如果 $\partial\Omega \in C^\infty$, 则 $w_k \in C^\infty(\bar{\Omega})$.
 - 第一特征值 λ_1 是单重的, 而且在 Ω 内对应特征函数不变号 ($w_1 > 0$).

证明概要:

- 1. 由 Rellich-Kondrachov 紧嵌入定理 [1, p.288], 恒同映射 $i : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ 是紧线性算子; 又通过求弱解 $u \in H_0^1(\Omega)$ 使得 $-\Delta u = f$ 确定了有界线性算子 $L = (-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega), f \mapsto u$ (第十一讲), 于是 $S = i \circ L : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ 是有界的紧的线性算子.
- 2. 证明 S 是自共轭算子. 由于 $D(S) = L^2$, 只需证明 $S = S^*$, 即 $\forall f, g \in L^2$, 成立 $(Sf, g) = (f, Sg)$. 回顾齐次 Dirichlet 问题 $-\Delta u = f$ 的弱解 $u \in H_0^1(\Omega)$ 的定义: $(\nabla u, \nabla w) = (f, w), \forall w \in H_0^1(\Omega)$, 这里 $u = Sf$. 记 $v = Sg$, 那么 $(\nabla v, \nabla w') = (g, w'), \forall w' \in H_0^1(\Omega)$. 于是
$$(Sf, g) = (u, g) = (g, u) \xrightarrow{w'=u} (\nabla v, \nabla u) = (\nabla u, \nabla v) \xrightarrow{w=v} (f, v) = (f, Sg).$$
 所以由泛函分析结论, S 的谱除了 0 都是特征值, 且特征值以 0 为极限点. 设 $Sw_k = \mu_k w_k$, 则对应 $\lambda_k = 1/\mu_k$, 故 $\lambda_k \rightarrow \infty$.
- 3. 正定性. 由上面计算, 只要 $f \neq 0$, 则 $u = Sf \neq 0$, 从而 $(Sf, f) = (\nabla u, \nabla u) > 0$. 故所有特征值 $\mu_k > 0$, 0 不是 S 的特征值 (0 是谱点!).
- 4. 其他性质: λ_1 单以及 $w_1 > 0$, 以及 w_k 的光滑性, 参见 [1].

参考: [1] L. C. Evans. Partial Differential Equations, 2ed. AMS, 2010. 第 6.5 节, p.356. 对更一般情形的推广, 见其参考文献.

Galerkin 方法

- 求弱解 $u \in H_0^1(\Omega)$ 使得 $-\Delta u = f$, 其中 $f \in L^2(\Omega)$. 弱解定义: 记 $B[u, v] = (Du, Dv)_{L^2} = \int_{\Omega} Du(x) \cdot Dv(x) dx$, 则 $B[u, v] = F(v) \doteq (f, v), \forall v \in H_0^1(\Omega)$.
- 取定 $H_0^1(\Omega)$ 的一组基 $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$, 记子空间 $S_k \doteq \text{span}\{w_1, \dots, w_k\}$. (推广: 任一可分 Hilbert 空间, 例如 $H^1(\mathbb{R}^n)$, 都有可列基底. 未必需要正交.) 注意 $\cup_{k=1}^{\infty} S_k = H_0^1(\Omega)$.
- 构造近似解 — 在 S_k 上求解线性代数方程组: $B[u_k, w_j] = F(w_j), j = 1, \dots, k$. 其中 $u_k = \sum_{i=1}^k c_i w_i \Rightarrow \sum_{i=1}^k B[w_i, w_j] c_i = F(w_j)$. 如果取 $\{w_k\}$ 为标准正交基, 可解得 $c_j = F(w_j)$. 一般情形, 可以说明矩阵 (b_{ij}) 对称正定, 其中 $b_{ij} = B[w_i, w_j]$ (注意到 $\sum_{i,j} b_{ij} \xi_i \xi_j = B[\sum_i \xi_i w_i, \sum_j \xi_j w_j] \geq 0$, 且 $= 0 \Rightarrow \sum_i \xi_i w_i = 0 \Rightarrow \xi_i = 0, \forall i$, 用到 Poincaré 不等式). 所以近似解 u_k 存在.

- 一致估计 (能量积分): $B[u_k, w_j] = F(w_j) (j = 1, \dots, k) \Rightarrow B[u_k, u_k] = F(u_k) \Rightarrow \|u_k\|_{H_0^1} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$ $\xrightarrow[\text{泛函分析中序列弱收敛的概念}]{\text{Hilbert 空间中有界点列必有子列弱收敛}}$ $\{u_k\}$ 存在子列 $u_{k_l} \rightharpoonup \bar{u} \in H_0^1$. 由弱收敛定义, $\underbrace{B[u_{k_l}, w_j]}_{\rightarrow B[\bar{u}, w_j] (k_l \rightarrow \infty)} = F(w_j) (\text{固定 } j = 1, 2, \dots) \Rightarrow B[\bar{u}, w_j] = F(w_j), \forall j \Rightarrow B[\bar{u}, v] = F(v), \forall v \in H_0^1$. 这就证明了弱解存在性.

ODE 两点边值问题: Sturm-Liouville 定理

- 定理: 设 $q(t), r(t) \in C([a, b]), p(t) \in C^1([a, b])$, 且
 $\forall t \in [a, b], p(t) > 0, q(t) \geq 0, r(t) > 0$. 又假定 $\alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0$ 满足
 $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0, i = 1, 2$. 考虑边值问题

$$\begin{cases} -(p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = \lambda r(t)x(t), & t \in [a, b], \\ \alpha_1 x(a) - \beta_1 x'(a) = 0, \\ \alpha_2 x(b) + \beta_2 x'(b) = 0, \end{cases}$$

有如下结论:

- 所有特征值 λ 都是非负实数, $\lambda_0 = 0$ 当且仅当 $q \equiv 0$, 而且边界条件中 $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$;
- 特征值 λ_k 有可列个 ($k = 0, 1, \dots$), 关于 k 严格递增, 且 $\lambda_k \rightarrow +\infty$ ($k \rightarrow \infty$);

- 每个特征值 λ_k 对应一个特征函数 $x_k(t)$, 且不同特征值对应的特征函数关于加权 r 的 L^2 空间 $L_r^2([a, b])$ 正交: $\int_a^b x_k(t)x_m(t)r(t) dt = A_k^2\delta_{km}$. 通常取 $A_k = 1, k = 0, 1, \dots$;
- 关于特征函数列 $\{x_k(t)\}_{k=0}^\infty$ 展开的一致收敛: 设 $f \in C^1([a, b])$ 且分段二阶可导, 满足边界条件, 那么 $f(t) = \sum_{k=0}^\infty f_k x_k(t)$ (♣) 对 $t \in [a, b]$, 一致绝对收敛到 $f(t)$, 其中系数 $f_k = \frac{1}{A_k^2} \int_a^b f(t)x_k(t)r(t) dt$;
- 平均收敛: 若 $f(t) \in L_r^2([a, b])$, 则级数 (♣) 在 $L_r^2([a, b])$ 中收敛, 且 $\int_a^b |f(t)|^2 r(t) dt = \sum_{k=0}^\infty A_k^2 |f_k|^2$.

注意: 对周期边界条件, 区别在于一个非零特征值对应两个互相正交的特征函数.
陈志浩: 应用偏微分方程讲义, 高等教育出版社, 2008. 第三章, 第二节.

证明请参考 — 姜礼尚, 孔德兴,

氢原子的能级和稳态 Schrödinger 算子的特征值

- 记号: c - 光速; λ - 波长; ν - 频率; $R = 1.09677581 \times 10^7 \text{m}^{-1}$ - Rydberg 常数; h - Plank 常数; $\hbar = h/2\pi$; e - 电荷; m - 电子质量; $i = \sqrt{-1}$
- 1885 年: Balmer 氢原子光谱波数的实验数据所得公式: $n = 3, 4, 5 \dots$,

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

● 1913 年: Bohr 量子论假设

- 定态: 原子能够, 而且只能够稳定地存在于一系列分立的能量 $E_1, E_2, \dots$ 相对应的状态;
- 跃迁: 原子可通过吸收或发出频率为 ν 的光子从定态 E_n 跃迁到定态 E_m . 设 $E_n > E_m$, 则发出的光子的频率满足 $h\nu = E_n - E_m$
- $\Rightarrow$ Bohr 公式: 能级 $E_n = -\frac{2\pi^2 me^4}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2}$ (由此解释 Balmer 公式: $R = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3 c}$ 与实验值相符)

● 1926 年: Schrödinger 方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{x}) \right] \psi(\mathbf{x}, t)$$

- 能量 = 动能 + 势能: $E = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} + V(r)$. ($\mathbf{p}$: 粒子的动量)
- 量子化: $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, $\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$.

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{x}) \right] \psi(\mathbf{x}, t)$$

- $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ - 波函数 (概率密度函数: $\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} = 1$)
 - 在 $U \subset \mathbb{R}^3$ 中发现电子的概率: $\int_U |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x}$; 电子的平均 (期望) 位置
 $\bar{\mathbf{x}} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{x} |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x}$
- $V(\mathbf{x}) = -\frac{e^2}{|\mathbf{x}|}$: 位于原点的氢原子核的势阱 (Columb 定律: $\mathbf{F} = -e^2 \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$, $-\nabla V = \mathbf{F}$.)
- 球坐标: 记 $r = |\mathbf{x}|$, 作尺度变换 (重新选取量纲或单位制) 使得

$$e = m = \hbar = 1 \Rightarrow \mathrm{i}\psi_t = -\frac{1}{2}\Delta\psi - \frac{1}{r}\psi$$

- 分离变量:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = T(t)v(\mathbf{x}) \Rightarrow 2i\frac{T'}{T} = \frac{-\Delta v - \frac{2}{r}v}{v} (= \lambda) \Rightarrow \begin{cases} T(t) = e^{-\frac{i}{2}\lambda t}, (\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}) \\ -\Delta v - \frac{2}{r}v = \lambda v. \end{cases}$$

- 注意: 要成立 $\int_{\mathbb{R}^3} |v(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < \infty$.

- 特征值问题

$$-\Delta v - \frac{2}{r}v = \lambda v \quad \xrightarrow[\text{球对称解}]{v(\mathbf{x})=R(r)}$$

$$\boxed{-R_{rr} - \frac{2}{r}R_r - \frac{2}{r}R = \lambda R, r > 0}, \int_0^\infty |R(r)|^2 r^2 dr < \infty, R(0) \text{有限}.$$

- 特点: 不是紧集上特征值问题, 但可利用势阱得到某种有界性: $\lambda \geq 0$: 连续谱;

$\lambda < 0$: 束缚态 (寻找点谱)

- $\lambda < 0$: 束缚态情形

- 关键点: 基态的确定 ($r \rightarrow +\infty$ 时得到近似方程 $R_{rr} = -\lambda R \Rightarrow R(r) = e^{-\beta r}, \beta \doteq \sqrt{-\lambda}$)

- 令 $w(r) \doteq e^{\beta r} R(r) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}rw'' + (1 - \beta r)w' + (1 - \beta)w = 0}$

- 幂级数求解: 设 $w(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$, 代入上述方程, 对比系数 $\Rightarrow$ 系数迭代关系

$$\boxed{\frac{k(k+1)}{2}a_k = (\beta k - 1)a_{k-1}, k = 1, 2, \dots}$$

$$\frac{k(k+1)}{2}a_k = (\beta k - 1)a_{k-1}, k = 1, 2, \dots \quad \lambda = -\beta^2, \quad R(r) = e^{-\beta r}w(r)$$

- $\exists k \in \mathbb{N}$ 使得 $\beta = \frac{1}{k} \Rightarrow a_k = a_{k+1} = a_{k+2} = \dots = 0$, $w = w_k(r)$ 是多项式: 即定态对应特征值 (能级) 为 $\lambda = -\frac{1}{k^2}$, $v(\mathbf{x}) = w(|\mathbf{x}|)e^{-\frac{|\mathbf{x}|}{k}}$

k	λ	$w(r)$	$v(\mathbf{x})$
1	-1	1	e^{-r}
2	$-\frac{1}{4}$	$1 - \frac{1}{2}r$	$e^{-\frac{r}{2}}(1 - \frac{1}{2}r)$
3	$-\frac{1}{9}$	$1 - \frac{2}{3}r + \frac{2}{27}r^2$	$e^{-\frac{r}{3}}(1 - \frac{2}{3}r + \frac{2}{27}r^2)$

- $\beta \neq \frac{1}{k}, \forall k \in \mathbb{N}$: $\frac{k(k+1)}{2}a_k = (\beta k - 1)a_{k-1} \xrightarrow{k \text{ 充分大时}} \frac{k^2}{2}a_k \sim \beta k a_{k-1} \Rightarrow a_k \sim \frac{2\beta}{k}a_{k-1} \Rightarrow w(r) \sim e^{2\beta r} \Rightarrow R(r) \sim e^{2\beta r}e^{-\beta r} = e^{\beta r}$, 不符合积分有限性

注:

- 对氢原子完整求解关于时间周期的空间分离变量的解, 有主量子数 $n = 1, 2, \dots$ (能级), 角动量量子数 $l = 0, 1, \dots, n - 1$, 磁量子数 $m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$; 故能级 λ_n 的简并度是 $\sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2$, 即它有 n^2 个独立的特征函数.
- 数学: 合流超几何函数 (confluent hypergeometric function) $F(\alpha, \gamma, z)$, 它是复平面上 ODE: $zu'' + (\gamma - z)u' - \alpha u = 0$ 的解; 特解: Laguerre 多项式 $L_n(z) = e^z \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z} z^n)$.

近似能级图



3. 同一原子，不同电子亚层
有能级交错现象

$$E_{5s} < E_{4d} < E_{5p}$$

常微分方程的幂级数解法

例：解方程 $y'' - xy = 0$.

解：1. 设未知函数 y 具有形式 $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$, 形式上求导, 得到 $y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)a_{k+2} x^k$, 而 $xy = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k$, 从而若 y 满足微分方程, 就有 $2a_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)(k+2)a_{k+2} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k = 0$. 由幂级数的加法, 应当成立 $2a_2 + \sum_{k=1}^{\infty} ((k+1)(k+2)a_{k+2} - a_{k-1})x^k \equiv 0$. 由幂级数的唯一性, 系数全部是零: $a_2 = 0, \quad a_{k+2} = \frac{a_{k-1}}{(k+1)(k+2)}, \quad k = 1, 2, \cdots$, 由此, 知道 a_{k-1} , 就可以确定 a_{k+2} . 所以知道了 a_0, a_1, a_2 , 就可以算出所有的系数了:

$$a_{3k} = \frac{a_{3k}}{3k(3k-1)} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}{(3k)!} a_0,$$

$$a_{3k+1} = \frac{a_{3k-2}}{3k(3k+1)} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3k-1)}{(3k+1)!} a_1, \quad a_{3k+2} = 0.$$

任意给定 a_0, a_1 (也就是 $y(0)$ 和 $y'(0)$, 即初值条件), 可以把解写为: $y = a_0 y_1 + a_1 y_2$, 其中

$$y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}{(3k)!} x^{3k}, \quad y_2 = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3k-1)}{(3k+1)!} x^{3k+1}$$

是两个特解.

2. 上述计算只是给出了形式上的幂级数解, 至于它们是否收敛, 即是否是真正的函数, 还需要判别. 用比值判别法, 看 y_1 中两个相邻项系数的比:

$$\frac{\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)(3k+1)}{(3k+3)!}}{\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}{(3k)!}} = \frac{(3k+1)}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} = \frac{1}{(3k+2)(3k+3)},$$

它随着 $k \rightarrow \infty$ 的极限是零. 故该幂级数的收敛区间是整个实数轴. 类似的, 可以判定 y_2 对于任意 $x \in \mathbb{R}$ 也都收敛.

3. 最后, 由于收敛的幂级数可以逐项求导, 还可以相加, 收敛范围不改变, 所以前面的计算过程是合法的. 这就验证了上述 y 确实是解. □

习题 1. (1) 求超几何函数

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) \doteq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1)} z^n$$

的收敛半径. 这里参数 γ 不取零和负的整数.

(2) 证明: 超几何函数 $y = F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ 是如下微分方程的解:

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0,$$

这里 α, β, γ 是参数, x 是自变量.

习题 2. 考虑角形区域 $G = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) : r > 0, 0 < \theta < \omega\}$, 其中 $\omega \in (0, 2\pi)$ 代表角的大小. 当 $k\pi/\omega$ 不是整数时, 定义 $u_k = r^{k\pi/\omega} \sin(k\pi\theta/\omega)$, 当 $k\pi/\omega$ 是整数时, 定义 $u_k = r^{k\pi/\omega} ((\ln r) \sin(k\pi\theta/\omega) + \theta \cos(k\pi\theta/\omega))$.

i) 证明: u_k 都是 G 上调和函数, 写出它们满足的齐次边界条件. 这些特解在 $\bar{G}$ 上光滑吗? 这说明了什么问题? 这些特解是如何得到的?

ii) 设 $\Omega = G \cap B_R(O)$, 在弧 $\{r = R\}$ 上给定非齐次 Dirichlet 条件, 在 ∂G 上给定齐次 Dirichlet 条件, 求 Ω 上该 Laplace 方程的 Dirichlet 问题的解.

iii) 求解如下问题: $\Delta u = 0$, 在 G 内; $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$, 在 $r = 0, r = \omega$ 上; $u(R, \theta) = g(\theta), 0 \leq \theta \leq \omega$.

iv) 求解如下问题: $\Delta u = 0$, 在 G 内; $u = 0$, 在 $r = 0$ 上; $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$, 在 $r = \omega$ 上; $u(R, \theta) = g(\theta), 0 \leq \theta \leq \omega$.

注: 有关非光滑区域上椭圆型方程边值问题, 参考: Grisvard, P. Elliptic problems in nonsmooth domains. Monographs and Studies in Mathematics, 24. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.

思考总结: 分离变量法的关键是找到贴合区域边界曲线 (面) 的正交曲线网坐标系, 给出该坐标系下的定解问题, 对各个变量按恰当的顺序依次分离 (需某些边界条件齐次), 确定低维的定解问题, 求解特征值和特征函数 (出现多种多样的特殊函数). 最后通过分离变量特解的组合和极限使得解满足其余的非齐次边界条件 (用到特征函数系的正交性和完备性).

几何问题: 各类正交曲线坐标系的构造 (复变函数理论等).

习题 3. 设 $q(t), r(t) \in C([a, b]), p(t) \in C^1([a, b])$, 且
 $\forall t \in [a, b], p(t) > 0, q(t) \geq 0, r(t) > 0$. 又假定 $\alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0$ 满足
 $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0, i = 1, 2$. 考虑作用在满足边界条件 $\alpha_1 x(a) - \beta_1 x'(a) = 0$ 和
 $\alpha_2 x(b) + \beta_2 x'(b) = 0$ 的 $C^2([a, b]) \cap L_r^2([a, b])$ 类函数 $D(L)$ 上的微分算子
 $Lx \doteq -\frac{1}{r(t)}(p(t)x'(t))' + \frac{q(t)}{r(t)}x(t)$. 证明 L 是对称算子: $(Lf, g) = (f, Lg), \forall f, g \in D(L)$.
这里 $(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)r(t) dt$, 而 $L_r^2([a, b])$ 是由满足 $\int_a^b |f(t)|^2 r(t) dt < +\infty$ 的函数
组成的 Banach 空间.

阅读任务和作业

- 必读 — 郇中丹, 黄海洋: 偏微分方程 (第二版), 高等教育出版社, 2013. [pp. 80-93]
- 作业 — p. 93: 1, 3, 5.
- 参考文献 (选读)
 - Strauss, Walter A. Partial differential equations. An introduction. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992. (Second edition, 2008.) 第 9.5 节.
 - 季孝达, 薛兴恒, 陆英, 宋立功: 数学物理方程 (第二版), 科学出版社, 2009. (分离变量法: 第 2 章)

最后更新: 2022-12-7

偏微分方程

第十四讲 热传导方程的初边值问题: 分离变量法与能量积分

袁海荣 (华东师范大学 数学科学学院)

2022 年 12 月 1 日

科学是实事求是的学问, 越是有学问的人, 就越是敢暴露自己, 说自己这点不清楚, 不清楚经过讨论就清楚了.

— 华罗庚 (1910 年 11 月 12 日—1985 年 6 月 12 日)



传记: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hua/>

学习要点

- 熟练掌握用分离变量法求解初边值问题形式解的方法
- 熟练掌握齐次化原理以及边界条件的齐次化
- 熟练掌握能量积分方法和基本的不等式放缩技巧
- 对函数项级数形式的解, 会证明它是经典解 (函数项级数一致收敛的判别和逐项求导)

热传导方程初边值问题求解的基本思路 — 叠加原理

- 典型问题: 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有光滑边界的有界区域, $\nu(x)$ 是 $x \in \partial\Omega$ 处的外单位法向, $b, c \in \mathbb{R}$ 不同时为零, (♣)
$$\begin{cases} u_t(x, t) - a^2 \Delta u(x, t) = f(x, t), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \bar{\Omega}, \\ b \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) + cu(x, t) = \mu(x, t), & x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases}$$
- 经典解的初边值相容性条件: 在 $\partial\Omega \times \{t = 0\}$ 上,
 - 一阶相容性条件: $b \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x) + c\phi(x) = \mu(x, 0)$ 才能保证解连续;
 - 二阶相容性条件: 将边界条件关于 t 求导, 再利用方程 $\Rightarrow$
 $\mu_t(x, 0) = ca^2 \Delta \phi(x) + cf(x, 0) + ba^2 \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta \phi(x) + b \frac{\partial}{\partial \nu} f(x, 0), x \in \partial\Omega$ 才能保证
 $u(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$.

- 边界条件齐次化: 设存在 $C_{x,t}^{2,1}(\overline{\Omega \times [0, \infty)})$ 中函数 $B(x, t)$ 使得 $b \frac{\partial B}{\partial \nu}(x, t) + cB(x, t) = \mu(x, t), \forall x \in \partial\Omega, t > 0 \xrightarrow[u \rightarrow u-B]{} \text{转化为 } (\clubsuit) \text{ 中 } \mu \equiv 0 \text{ 情形.}$
- 分离变量法求解带齐次边界条件的齐次方程的初边值问题:
$$\begin{cases} v_t(x, t) - a^2 \Delta v(x, t) = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ v(x, 0) = \phi(x), & x \in \bar{\Omega}, \\ b \frac{\partial v}{\partial \nu}(x, t) + cv(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases}$$

齐次化原理

- 带齐次边界条件和齐次初值条件的非齐次方程的初边值问题:

$$(\sharp) \begin{cases} w_t(x, t) - a^2 \Delta w(x, t) = f(x, t), & x \in \Omega, t > 0, \\ w(x, 0) = 0, & x \in \bar{\Omega}, \\ b \frac{\partial w}{\partial \nu}(x, t) + cw(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases}$$

- 齐次化原理: 求解带参数 $\tau \geq 0$ 的初边值问题

$$\begin{cases} w_t(x, t; \tau) - a^2 \Delta w(x, t; \tau) = 0, & x \in \Omega, t > \tau, \\ w(x, \tau; \tau) = f(x, \tau), & x \in \bar{\Omega}, \\ b \frac{\partial w}{\partial \nu}(x, t; \tau) + cw(x, t; \tau) = 0, & x \in \partial\Omega, t > \tau \end{cases}$$

得到解 $w(x, t; \tau)$, 则 $w(x, t) \doteq \int_0^t w(x, t; \tau) d\tau$ 是 $(\sharp)$ 的解. (假设 $w(x, t; \tau)$ 光滑, 用含参积分求导验证.)

- 解初边值问题的关键 — 分离变量法求解

$$\begin{cases} v_t(x, t) - a^2 \Delta v(x, t) = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ v(x, 0) = \phi(x), & x \in \bar{\Omega}, \\ b \frac{\partial v}{\partial \nu}(x, t) + cv(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases}$$

- 类比: 解 ODE 的线性算子半群方法, 此处对应稠定无界闭算子. 联系 — 矩阵的指数函数, 有界线性算子的指数函数, Hill-Yosida 定理 (Evans, PDE, §7.4)

分离变量法求解初边值问题的基本思路

- 分离变量法求解 (✂)
$$\begin{cases} v_t(x, t) - a^2 \Delta v(x, t) = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ v(x, 0) = \phi(x), & x \in \bar{\Omega}, \\ b \frac{\partial v}{\partial \nu}(x, t) + cv(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases}$$
- 设分离变量的特解 $u(x, t) = X(x)T(t)$ 满足方程和边界条件, 代入 (✂) $\Rightarrow \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{\Delta X(x)}{X(x)} = -\lambda \in \mathbb{R}, \quad [b \frac{\partial X}{\partial \nu}(x) + cX(x)]T(t) = 0 \Rightarrow$
 - 椭圆型方程的特征值问题 (♡): 在 Ω 内 $\Delta X(x) + \lambda X(x) = 0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $b \frac{\partial X}{\partial \nu}(x) + cX(x) = 0$.
 - ODE 初值问题: $T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, t > 0 \Rightarrow T(t) = e^{-\lambda a^2 t} T(0)$.

- 特征值理论 $\Rightarrow \exists \{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是递增的特征值, 对应特征函数为 $\{X_k(x)\}$, 构成 $L^2(\Omega)$ 的标准正交基 $\Rightarrow (\boxtimes)$ 的形式解为 $u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{-a^2 \lambda_k t} X_k(x)$.
- 利用初始条件 $\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k X_k(x) \Rightarrow A_k = (\phi, X_k) = \int_{\Omega} \phi(y) X_k(y) dy$.
- $(\boxtimes)$ 的形式解为 $u(x, t) = \int_{\Omega} G(x, y, t) \phi(y) dy$, 其中 $G(x, y, t) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} e^{-a^2 \lambda_k t} X_k(x) X_k(y)$.

注: 如果上述级数确实收敛, 且 $\lambda_0 > 0$, 则解关于时间指数衰减.

习题. 用能量积分方法或极值原理证明: 对问题 $(\heartsuit)$, 当 $bc > 0$ 或 $b = 0$ 时, 特征值 λ_k 全部大于零; $c = 0$ 时 $\lambda_0 = 0$, 而其它特征值都大于零.

• 例:
$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in (0, l), t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in [0, l], \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

$$-X'' = \lambda_k X, X(0) = X(l) = 0 \Rightarrow \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, X_k(x) = \sin \sqrt{\lambda_k} x, k = 1, 2, \dots$$

• 形式解 (†):
$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \exp \left\{ - \left(\frac{ka\pi}{l} \right)^2 t \right\} \sin \frac{k\pi}{l} x,$$

$$A_k \doteq \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x \, dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

• 解的验证

- 一致收敛性: 设 $\phi \in L^1([0, l])$, 则 $\forall \tau > 0$, 对任意非负整数 m, n , 对级数 (†) 逐项求导 $\partial_x^m \partial_t^n$, 得到级数 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{k\pi}{l}\right)^m (-1)^n \left(\frac{ka\pi}{l}\right)^{2n} \exp\left\{-\left(\frac{ka\pi}{l}\right)^2 t\right\} \sin\left(\frac{k\pi}{l}x + \frac{m\pi}{2}\right)$, 它在 $[0, l] \times [\tau, \infty]$ 上一致收敛.
- 优级数判别法:

$$\left| A_k \left(\frac{k\pi}{l}\right)^m \left(-\frac{ka\pi}{l}\right)^{2n} \right| \leq C_{a,l} \|\phi\|_{L^1} k^{m+2n},$$

$$|\sin\left(\frac{k\pi}{l}x + \frac{m\pi}{2}\right)| \leq 1,$$

$$\left| \exp\left\{-\left(\frac{ka\pi}{l}\right)^2 t\right\} \right| \leq \exp\left\{-\left(\frac{ka\pi}{l}\right)^2 \tau\right\} \leq \frac{C_{a,l,\tau}}{k^{2+m+2n}}$$

$$\Rightarrow \text{优级数 } C_{a,l,\tau} \|\phi\|_{L^1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

● 推论

- 级数 (†) 一致收敛 $\Rightarrow u(x, t)$ 有定义, 且 $u(x, t) \in C([0, l] \times (0, \infty))$
- $u(x, t)$ 满足边界条件 (极限 $x \rightarrow 0, l$ 可以与级数换序)
- 函数项级数的逐项求导定理 $\Rightarrow u(x, t) \in C^\infty([0, l] \times (0, \infty))$, 且点点满足方程
- 注意: 解的光滑性体现了热传导/扩散的正则化效应 $\Rightarrow$ 扩散过程对时间的不可逆性

- 初边值问题
$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in (0, l), t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in [0, l], \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$
- 形式解 (†): $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \exp \left\{ - \left(\frac{ka\pi}{l} \right)^2 t \right\} \sin \frac{k\pi}{l} x,$
 $A_k \doteq \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) (\sin \frac{k\pi}{l} x) dx, \quad k = 1, 2, \dots$
 - 设 $\phi(x) \in C^\alpha([0, l])$ ($0 < \alpha < 1$) 且满足相容性条件: $\phi(0) = \phi(l) = 0$.
 - 目标: 要证明级数 (†) 在 $[0, l] \times [0, \infty)$ 上一致收敛 (从而满足初值条件).

- **Abel 判别法:** 设函数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(y)$ 在集 Y 上一致收敛, 对每个固定的 $y \in Y$, 数列 $\{b_k(y)\}$ 单调, 而且函数列 $\{b_k(y)\}$ 一致有界, 则函数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(y)b_k(y)$ 在 Y 上一致收敛.
- 应用 Abel 判别法: 取 $y = (x, t)$, $Y = [0, l] \times [0, \infty)$, 则 C^α 函数 ϕ 的 Fourier 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{l} x$ 在 Y 上一致收敛, 而 $\exp \left\{ - \left(\frac{ka\pi}{l} \right)^2 t \right\}$ 对固定的 $t \geq 0$, 关于 k 单调不增, 且在 Y 上有一致的上界 1 和下界 0 $\Rightarrow$ (†) 在 Y 上一致收敛
 $\Rightarrow u(x, t) \in C(\bar{Y})$, 且 $\lim_{t \rightarrow 0+} u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{l} x = \phi(x)$
- 思考题: (1) 如果初值仅满足 $\phi(x) \in C([0, l])$ 及 $\phi(0) = \phi(l) = 0$, 如何证明 $\lim_{t \rightarrow 0+} u(x, t) = \phi(x)$?
(2) 如果初值 $\phi(x) \in L^1([0, l])$, 如何理解初值条件?

注: 更精细的 Fourier 分析方法, 求和法, Good Kernel 等.

解的唯一性与稳定性: 能量积分方法

- 典型问题: 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有光滑边界的有界区域, $\nu(x)$ 是 $x \in \partial\Omega$ 的外单位法向, $b, c \in \mathbb{R}_+$ 且不同时为零,

$$(\clubsuit) \quad \begin{cases} u_t(x, t) - a^2 \Delta u(x, t) = f(x, t), & x \in \Omega, \ t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \bar{\Omega}, \\ b \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) + cu(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, \ t > 0. \end{cases}$$

- 定理: 设 $u(x, t)$ 是 (♣) 的经典解, 那么对任意的 $T > 0$, 成立如下不等式

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx + 2a^2 \int_0^T \int_{\Omega} |Du(x, t)|^2 dx dt + 2a^2 e(T) \\ & \leq 2(1 + e^T) \left[\int_{\Omega} |\phi(x)|^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega} |f(x, t)|^2 dx dt \right], \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{其中 } e(t) \doteq \begin{cases} \frac{\varepsilon}{b} \int_0^T \int_{\partial\Omega} |u(x, t)|^2 d\sigma(x) dt, & \text{若 } b > 0, \\ 0, & \text{若 } b = 0. \end{cases}$$

- 引入函数空间 $C([0, T]; L^2(\Omega)), L^2(0, T; H^1(\Omega)), L^2(0, T; L^2(\partial\Omega))$ 等, 在这些空间交集的解具有唯一性和稳定性.

- 估计 + 分离变量法 $\Rightarrow$ 解的存在性 (Galerkin 方法, 可用于一般的二阶抛物型方程.) 参考: Evans, Lawrence C. Partial differential equations. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. [第七章第 1 节]

解的唯一性与稳定性: 能量积分方法

● 证明能量估计式的思路

- 在方程两边乘以适当函数, 写为散度形式 (称为附加守恒律方程, 或熵-熵流对方程);
- 在区域上积分, 用散度定理; 边界项用边界条件控制或化为正定的项; 区域内部找到正定项 (能量); 方程右端与解有关的项用基本不等式分离, 被左边吃掉, 或者被其导数控制 (Gronwall 不等式);
- 得到关于能量积分泛函的 ODE; 求解 ODE (或用 Gronwall 不等式), 得到估计式

● 常用的不等式

- Cauchy 不等式: $ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon}$, ($a, b > 0, \epsilon > 0$)

证明: 用基本不等式.

- Gronwall 不等式: 微分形式, 积分形式

Gronwall 不等式

- 微分形式: 设 $\eta(\cdot)$ 是 $[0, T]$ 上非负的绝对连续函数, 几乎处处成立微分不等式 $\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$, 其中 $\phi(t), \psi(t)$ 是 $[0, T]$ 上的非负的可积函数. 那么

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s) ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right].$$

特别地, 如果在 $[0, T]$ 上 $\eta' \leq \phi\eta$ 且 $\eta(0) = 0$, 则 $\eta(t) \equiv 0, \forall t \in [0, T]$.

证明. 由条件知

$$\frac{d}{ds} \left(\eta(s) e^{-\int_0^s \phi(r) dr} \right) = e^{-\int_0^s \phi(r) dr} (\eta'(s) - \phi(s)\eta(s)) \leq e^{-\int_0^s \phi(r) dr} \psi(s), \text{ 积分就得到}$$
$$\eta(t) e^{-\int_0^t \phi(r) dr} \leq \eta(0) + \int_0^t e^{-\int_0^s \phi(r) dr} \psi(s) ds \leq \eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds. \quad \square$$

- 积分形式: 设 $\xi(t)$ 是 $[0, T]$ 上非负的可积函数, 且存在常数 $C_1, C_2 > 0$ 使得对几乎所有 $t \in [0, T]$, 成立

$$(\checkmark) \quad \xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s) \, ds + C_2,$$

那么对 a.e. $t \in [0, T]$, 成立

$$\boxed{\xi(t) \leq C_2(1 + C_1 t e^{C_1 t})}.$$

特别地, 如果 $\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s) \, ds$, 则 $\xi(t) \equiv 0$.

证明. 置 $\eta(t) = \int_0^t \xi(s) \, ds$, 则 $\eta' \leq C_1 \eta + C_2$, 用微分形式的 Gronwall 不等式 $\Rightarrow$
 $\eta(t) \leq e^{C_1 t}(\eta(0) + C_2 t) = C_2 t e^{C_1 t} \xrightarrow{\text{用条件 } (\checkmark)} \xi(t) \leq C_1 \eta(t) + C_2 \leq C_2(1 + C_1 t e^{C_1 t}).$

- 要点: 结合初值, 用导数就可以控制函数本身.

参考: Evans, Lawrence C. Partial differential equations. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. [p.711]

能量估计的推导

- 典型问题: 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有光滑边界的有界区域, $\nu(x)$ 是 $x \in \partial\Omega$ 的外单位法向, $b, c \in \mathbb{R}_+$ 且不同时为零, (注意: $c/b \geq 0$ 的要求符合物理情景, 见第五、六讲对 Robin 条件物理背景的介绍)

$$(\clubsuit) \quad \begin{cases} u_t(x, t) - a^2 \Delta u(x, t) = f(x, t), & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \bar{\Omega}, \\ b \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) + cu(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0. \end{cases}$$

$$e(T) \doteq \begin{cases} \frac{c}{b} \int_0^T \int_{\partial\Omega} |u(x, t)|^2 d\sigma(x) dt, & b > 0, \\ 0, & b = 0. \end{cases}$$

- 定理: 设 $u(x, t)$ 是 (♣) 的经典解, 那么对任意 $T > 0$, 成立如下不等式

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx + 2a^2 \int_0^T \int_{\Omega} |Du(x, t)|^2 dx dt + 2a^2 e(T) \\ & \leq 2(1 + e^T) \left[\int_{\Omega} |\phi(x)|^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega} |f(x, t)|^2 dx dt \right]. \end{aligned}$$

- 第一步 (乘子 u , 写为散度形): 利用 $u\Delta u = u\operatorname{div}(Du) = \operatorname{div}(uDu) - |Du|^2 \Rightarrow$
 $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} u(x, t)^2 - a^2 \operatorname{div}(u(x, t)Du(x, t)) + a^2 |Du(x, t)|^2 = f(x, t)u(x, t)$

• 第二步 (在 $\Omega \times [0, t]$ 积分): $\Rightarrow \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\phi(x)|^2 dx +$
 $a^2 \int_0^t \int_{\Omega} |Du(x, s)|^2 dx ds - a^2 \underbrace{\int_0^t \int_{\partial\Omega} u(x, \tau) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, \tau) d\sigma(x) d\tau}_{=-e(t) = -\frac{c}{b} \int_0^t \int_{\partial\Omega} |u(x, \tau)|^2 d\sigma(x) d\tau} =$
 $\int_0^t \int_{\Omega} u(x, \tau) f(x, \tau) dx d\tau \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^t \int_{\Omega} |u(x, \tau)|^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} |f(x, \tau)|^2 dx d\tau \right) \Rightarrow$
 $\underbrace{\int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx}_{=E'(t)} + \underbrace{2a^2 \int_0^t \int_{\Omega} |Du(x, s)|^2 dx ds}_{\geq 0} + 2a^2 e(t)$
 $\leq \underbrace{\int_0^t \int_{\Omega} |u(x, \tau)|^2 dx d\tau}_{\doteq E(t)} + \underbrace{\int_{\Omega} |\phi(x)|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |f(x, \tau)|^2 dx d\tau}_{\doteq F(t)} \quad (\dagger)$

- 第三步 (对下划线项的估计): $E'(t) \leq E(t) + F(t), E(0) = 0$
 $\Rightarrow E(t) \leq \int_0^t F(s) e^{t-s} ds \xrightarrow{F(s) \text{ 关于 } s \text{ 单调不减}} \leq F(t) e^t \Rightarrow (\dagger) \text{ 左边}$
 $\leq (1 + e^t) F(t) \leq (1 + e^T) F(T), \forall t \in [0, T]$
- 第四步 (一致估计): $\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx \leq (1 + e^T) F(T);$
 $2a^2 \int_0^T \int_{\Omega} |Du(x, s)|^2 dx ds + 2a^2 e(T) \leq (1 + e^T) F(T).$ 相加后得到结论. □

倒向热方程 Dirichlet 初边值问题解的唯一性

- 定理: 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界光滑区域, $T > 0$, u 是如下问题的经典解: 在 $\Omega \times [0, T]$ 内 $u_t - \Delta u = 0$; 在 $\partial\Omega \times [0, T]$ 上 $u = 0$; $u(x, T) = 0, \forall x \in \Omega$. 证明: 在 $\Omega \times [0, T]$ 内 $u \equiv 0$.
- 证明: 1. 置 $e(t) = \int_{\Omega} u(x, t)^2 dx$, 其中 $0 \leq t \leq T$. 那么 $\dot{e}(t) = -2 \int_{\Omega} |Du(x, t)|^2 dx$,
 $\ddot{e}(t) = -4 \int_{\Omega} Du \cdot Du_t dx = 4 \int_{\Omega} (\Delta u) u_t dx = 4 \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx$. 再用 u 满足的齐次 Dirichlet 条件和 Green 公式, 成立 $\int_{\Omega} |Du|^2 dx = - \int_{\Omega} u \Delta u dx \leq (\int_{\Omega} u^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$. 于是得到
 $\dot{e}(t)^2 = 4 (\int_{\Omega} |Du|^2 dx)^2 \leq (\int_{\Omega} u^2 dx) (4 \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx) = e(t) \ddot{e}(t)$. 这就证明了 $\forall t \in [0, T]$, 成立 $\dot{e}(t)^2 \leq e(t) \ddot{e}(t)$.
2. 如果 $\forall t \in [0, T]$, 成立 $e(t) = 0$, 则结论成立. 反之, 如果存在区间 $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ 使得 $e(t) > 0, \forall t_1 \leq t < t_2$, 且 $e(t_2) = 0$, 下面来推出矛盾. 注意 $e(T) = 0$, 所以假设 $e(t_2) = 0$ 合理. 3. 置 $f(t) = \ln e(t), (t_1 \leq t < t_2)$, 则 $\ddot{f}(t) = \frac{\ddot{e}(t)}{e(t)} - \frac{\dot{e}(t)^2}{e(t)^2} \geq 0$. 于是 f 在区间 $[t_1, t_2)$ 中是凸函数. 从而, 对任意的 $0 < \tau < 1, t_1 < t < t_2$, 有 $f((1-\tau)t_1 + \tau t) \leq (1-\tau)f(t_1) + \tau f(t)$. 两边取指数, 就有 $e((1-\tau)t_1 + \tau t) \leq e(t_1)^{1-\tau} e(t)^{\tau}$. 令 $t \rightarrow t_2$, 就得到对 $0 < \tau < 1$, 成立 $0 \leq e((1-\tau)t_1 + \tau t_2) \leq e(t_1)^{1-\tau} e(t_2)^{\tau} = 0$. 注意这里 $\tau \in (0, 1)$ 是任意的, 就得到 $e(t) = 0, \forall t \in [t_1, t_2]$, 与前面假设矛盾! □

习题 1. 对 $\mathbb{R}^3$ 中的 Schrödinger 方程 $i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \Delta\psi - V(x)\psi = 0$, 假设解 (波函数) $\psi(x, t) \in \mathbb{C}$ 充分光滑且在无穷远处快速衰减到零, 而 V 是有界的实值函数. 记 $\bar{\psi}$ 为 ψ 的共轭.

(1) 证明如下概率流守恒定律: 记 $w(x, t) = |\psi(x, t)|^2$, $J = -i(\bar{\psi}D\psi - \psi D\bar{\psi})$, 则成立 $\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} J = 0$;

(2) 证明 $\int_{\mathbb{R}^3} w(x, t) dx$ 是个与时间 t 无关的常数.

习题 2. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有光滑边界的有界区域, $\nu(x)$ 是 $x \in \partial\Omega$ 的外单位法向. 请试对如下一般二阶抛物型方程的余法向 (co-normal) 初边值问题建立其经典解 $u = u(x, t)$ 的能量积分估计:

$$(\clubsuit) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} u + c(x, t) u = f(x, t), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \bar{\Omega}, \\ \sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_i(x, t) \right) + \beta(x, t) u = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases}$$

这里 $\beta(x, t) \geq 0$, 存在 $\lambda > 0$ 使得 $\forall x \in \Omega, t > 0, \xi \in \mathbb{R}^n, \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2$, 而所有系数函数 $a_{ij}(x, t), b_i(x, t), c(x, t)$ 和 $\beta(x, t)$ 都是有界函数. 对自由项 f 和 ϕ , 请根据你得到的估计式, 说明它们应该在什么函数空间中?

(提示: 仍用乘子 u . 要用到 Young 不等式和 Gronwall 不等式.)

阅读任务和作业

- 必读 — 郇中丹, 黄海洋: 偏微分方程 (第二版), 高等教育出版社, 2013. [pp. 166–170; pp. 189–192]
- 作业 — p. 169: 2, 4; p. 191, 习题 5.4.5 的第 1 题.

最后更新: 2022-12-8

偏微分方程

第十五讲 热传导方程的极值原理与最大模估计

袁海荣 (华东师范大学 数学科学学院)

2022 年 12 月 6 日

只要研究某个问题时, 能在研究过程中产生出使人感兴趣的数学, 那么研究它就是值得的——即使你最终也没有解决它. 判断一个数学问题是否是好的, 其标准就是看它能否产生新的数学, 而不是问题本身.

— Andrew John Wiles (1953 年 4 月 11 日—)



传记: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Wiles/>

学习要点

- 熟练掌握热传导方程极值原理、边界点引理的结论和证明方法
- 熟练掌握热传导方程初边值问题解的最大模估计方法
- 熟练掌握热传导方程初值问题有界解的唯一性证明及最大模估计方法
- 注意对二阶椭圆型方程极值原理的类比和复习

弱极值原理

- 典型问题: 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有光滑边界的有界 (开) 区域, $\nu(x)$ 是 $x \in \partial\Omega$ 点的外单位法向, $b, c \in \mathbb{R}$ 不同时为零, $T > 0$ 是给定常

数 (♣)
$$\begin{cases} u_t(x, t) - a^2 \Delta u(x, t) = f(x, t), & x \in \Omega, T \geq t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \bar{\Omega}, \\ b \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) + cu(x, t) = \mu(x, t), & x \in \partial\Omega, T \geq t > 0. \end{cases}$$

- 抛物边界: $\Gamma_T \doteq Q_0 \cup S_T$ (底面 + 侧面) (画图! 为阅读后续论证, 这几个记号务必要熟悉.)

- 带盖内部: $Q_T \doteq \{(x, t) : x \in \Omega, 0 < t \leq T\}$

- 底: $Q_0 \doteq \{(x, 0) : x \in \bar{\Omega}\}$

- 侧边: $S_T \doteq \{(x, t) : x \in \partial\Omega, 0 < t \leq T\}$ (注意: $\bar{Q}_T = Q_T \cup \Gamma_T$)

● 极值点的局部刻画 (数学分析)

- 设 $u(x) \in C^2(\Omega)$ (注意 Ω 是开集), 如果 $\hat{x}$ 是 $u(x)$ 的极小值点 (极大值点), 则 $Du(\hat{x}) = 0$, $D^2u(\hat{x}) \geq (\leq)0$.
- 设 $u(x, t) \in C^2(Q_T)$, 如果 $(\hat{x}, T)$ 是 $u(x, t)$ 在 Q_T 上的极小值点 (极大值点), 则 $D_x u(\hat{x}, T) = 0$, $\partial_t u(\hat{x}, T) \leq (\geq)0$, $D_x^2 u(\hat{x}, T) \geq (\leq)0$.

- 弱极值原理: 设 $u(x, t) \in C(Q_T \cup \Gamma_T)$ 且 $u_t(x, t), u_{x_i x_i}(x, t) \in C(Q_T)$, $i = 1, \dots, n$. 如果 $u(x, t)$ 满足微分不等式 $u_t(x, t) - a^2 \Delta u(x, t) \leq (\geq)0$, $\forall (x, t) \in Q_T$, 则 $u(x, t)$ 必然在抛物边界 Γ_T 上取到最大值 (最小值), 即

$$\max\{u(x, t) : (x, t) \in \bar{Q}_T\} = \max\{u(x, t) : (x, t) \in \Gamma_T\}$$

$$(\min\{u(x, t) : (x, t) \in \bar{Q}_T\} = \min\{u(x, t) : (x, t) \in \Gamma_T\})$$

- 复习二阶椭圆型方程的极值原理; 思考: 如何推广到一般的二阶抛物型偏微分算子:

$\mathcal{L}u \doteq u_t - \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x, t) \partial_{ij} u + \sum_{j=1}^n b^j(x, t) \partial_j u + c(x, t)u$? 特别是对源项 $c(x, t)$ 的正负号是否有必要限制?

● 极值点的局部刻画 (数学分析)

- 设 $u(x) \in C^2(\Omega)$ (注意 Ω 是开集), 如果 $\hat{x}$ 是 $u(x)$ 的极小值点 (极大值点), 则 $Du(\hat{x}) = 0$, $D^2u(\hat{x}) \geq (\leq)0$.
- 设 $u(x, t) \in C^2(Q_T)$, 如果 $(\hat{x}, T)$ 是 $u(x, t)$ 在 Q_T 上的极小值点 (极大值点), 则 $D_x u(\hat{x}, T) = 0$, $\partial_t u(\hat{x}, T) \leq (\geq)0$, $D_x^2 u(\hat{x}, T) \geq (\leq)0$.

- **弱极值原理:** 设 $u(x, t) \in C(Q_T \cup \Gamma_T)$ 且 $u_t(x, t), u_{x_i x_i}(x, t) \in C(Q_T)$, $i = 1, \dots, n$. 如果 $u(x, t)$ 满足微分不等式 $u_t(x, t) - a^2 \Delta u(x, t) \leq (\geq)0$, $\forall (x, t) \in Q_T$, 则 $u(x, t)$ 必然在抛物边界 Γ_T 上取到最大值 (最小值), 即

$$\max\{u(x, t) : (x, t) \in \bar{Q}_T\} = \max\{u(x, t) : (x, t) \in \Gamma_T\}$$

$$(\min\{u(x, t) : (x, t) \in \bar{Q}_T\} = \min\{u(x, t) : (x, t) \in \Gamma_T\})$$

- 复习二阶椭圆型方程的极值原理; 思考: 如何推广到一般的二阶抛物型偏微分算子:

$\mathcal{L}u \doteq u_t - \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x, t) \partial_{ij} u + \sum_{j=1}^n b^j(x, t) \partial_j u + c(x, t)u$? 特别是对源项 $c(x, t)$ 的正负号是否有必要限制?

● 极值点的局部刻画 (数学分析)

- 设 $u(x) \in C^2(\Omega)$ (注意 Ω 是开集), 如果 $\hat{x}$ 是 $u(x)$ 的极小值点 (极大值点), 则 $Du(\hat{x}) = 0$, $D^2u(\hat{x}) \geq (\leq)0$.
- 设 $u(x, t) \in C^2(Q_T)$, 如果 $(\hat{x}, T)$ 是 $u(x, t)$ 在 Q_T 上的极小值点 (极大值点), 则 $D_x u(\hat{x}, T) = 0$, $\partial_t u(\hat{x}, T) \leq (\geq)0$, $D_x^2 u(\hat{x}, T) \geq (\leq)0$.

- **弱极值原理:** 设 $u(x, t) \in C(Q_T \cup \Gamma_T)$ 且 $u_t(x, t), u_{x_i x_i}(x, t) \in C(Q_T)$, $i = 1, \dots, n$. 如果 $u(x, t)$ 满足微分不等式 $u_t(x, t) - a^2 \Delta u(x, t) \leq (\geq)0, \quad \forall (x, t) \in Q_T$, 则 $u(x, t)$ 必然在抛物边界 Γ_T 上取到最大值 (最小值), 即

$$\max\{u(x, t) : (x, t) \in \bar{Q}_T\} = \max\{u(x, t) : (x, t) \in \Gamma_T\}$$

$$(\min\{u(x, t) : (x, t) \in \bar{Q}_T\} = \min\{u(x, t) : (x, t) \in \Gamma_T\})$$

- 复习二阶椭圆型方程的极值原理; 思考: 如何推广到一般的二阶抛物型偏微分算子:

$\mathcal{L}u \doteq u_t - \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x, t) \partial_{ij} u + \sum_{j=1}^n b^j(x, t) \partial_j u + c(x, t)u$? 特别是对源项 $c(x, t)$ 的正负号是否有必要限制?

- 证明 — 只需对最大值情形证明 (最小值情形: 利用线性, 将 u 换作 $-u$)
- 第一步 — 松弛: 假设成立严格不等式 $u_t(x, t) - a^2 \Delta u(x, t) < 0, \quad \forall (x, t) \in Q_T$.
 - i) 紧性保证极大值点的存在性: $\bar{Q}_T = Q_T \cup \Gamma_T$ 是紧集, $u \in C(Q_T \cup \Gamma_T) \Rightarrow u$ 在 $\bar{Q}_T$ 上有极大值点.
 - ii) 设极大值点 $(\hat{x}, t) \in Q_T$, 如果 $t \in (0, T)$, 则
$$u_t(\hat{x}, t) = 0, D_x^2 u(\hat{x}, t) \leq 0 \Rightarrow (u_t - a^2 \Delta u)(\hat{x}, t) \geq 0, \text{ 与假设矛盾.}$$
 - iii) 如果 $t = T$, 则 $u_t(\hat{x}, T) \geq 0, D_x^2 u(\hat{x}, T) \leq 0 \Rightarrow (u_t - a^2 \Delta u)(\hat{x}, T) \geq 0$, 依然与假设矛盾.
 - iv) 所以任意极大值点都在抛物边界. 结论成立.

- 第二步 — 极限: 任取 $\epsilon > 0$, 置 $v(x, t) \doteq u(x, t) - \epsilon t$, 则 $v(x, t)$ 满足微分不等式 $v_t(x, t) - a^2 \Delta v(x, t) \leq -\epsilon < 0$, $\forall (x, t) \in Q_T$. 由上一步结论,
$$\begin{aligned} \max\{u(x, t) : (x, t) \in \bar{Q}_T\} &\leq \max\{v(x, t) : (x, t) \in \bar{Q}_T\} + \epsilon T = \\ \max\{v(x, t) : (x, t) \in \Gamma_T\} + \epsilon T &\leq \max\{u(x, t) : (x, t) \in \Gamma_T\} + 2\epsilon T \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \\ \max\{u(x, t) : (x, t) \in \bar{Q}_T\} &\leq \max\{u(x, t) : (x, t) \in \Gamma_T\} \xrightarrow[\Gamma_T \subset \bar{Q}_T]{\leq} \\ \max\{u(x, t) : (x, t) \in \bar{Q}_T\} &\Rightarrow \text{结论成立.} \end{aligned}$$

边界点引理

- **区域的内球条件:** 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是 (开) 区域, 如果对任意的 $\hat{x} \in \partial\Omega$, 存在一个球 $B_R(\hat{y}) \subset \bar{\Omega}$ 且 $\partial\Omega \cap \overline{B_R(\hat{y})} = \{\hat{x}\}$, 就称 Ω 满足内球条件.
- **边界点引理:** 设区域 Ω 满足内球条件, $u(x, t) \in C^1(Q_T \cup \Gamma_T)$ 且 $u_{x_i x_i}(x, t) \in C(Q_T)$, $i = 1, \dots, n$, 还满足微分不等式 $u_t(x, t) - a^2 \Delta u(x, t) \leq (\geq) 0$, $\forall (x, t) \in Q_T$. 如果 $u(x, t)$ 在 $(\hat{x}, \hat{t})$ 达到**严格最大值 (最小值)**, 其中 $\hat{x} \in \partial\Omega$, $\hat{t} > 0$, 则 $\frac{\partial u}{\partial \nu}(\hat{x}, \hat{t}) > (<) 0$. 这里 $\nu \doteq (\hat{x} - \hat{y})/r$, 而 $\hat{y}$ 和 r 分别是 Ω 在 $\hat{x}$ 点的内球的球心和半径.

- 证明: 思路与二阶椭圆型方程的类似, 在**内球为底的时空柱体上**构造辅助函数, 用极值原理.
- 设 $u(x, t)$ 在点 $(\hat{x}, \hat{t}) \in S_T$ (侧边) 取到严格的最大值. 设 $B_r(\hat{y}) (r > 0)$ 是 Ω 在 $\hat{x}$ 的一个内球. 置 $Q \doteq \left\{ (x, t) \in Q_T : \frac{r}{2} \leq |x - \hat{y}| \leq r, \hat{t} - \tau \leq t \leq \hat{t} \right\}$, 其中 $\tau \in (0, \hat{t})$. 记 $\partial_p Q = \left\{ (x, \hat{t} - \tau) : \frac{r}{2} \leq |x - \hat{y}| \leq r \right\}_{\text{底}} \cup \left\{ (x, t) : |x - \hat{y}| = \frac{r}{2} \text{ 或者 } |x - \hat{y}| = r; \hat{t} - \tau \leq t \leq \hat{t} \right\}_{\text{侧壁}}$ 为环柱体 Q 的抛物边界.
- 考察定义在 Q 上函数 $w(x) \doteq e^{-\lambda|x-\hat{y}|^2} - e^{-\lambda r^2}$, 它在外侧壁恒为零, 且不难算得 $\Delta w(x) = 2\lambda(2\lambda|x - \hat{y}|^2 - n)e^{-\lambda|x-\hat{y}|^2}$, 从而当 $\lambda > 0$ 充分大时, $\Delta w(x) > 0, w(x) \geq 0, (\forall x : \frac{r}{2} \leq |x - \hat{y}| \leq r)$.

- 由于 $(\hat{x}, \hat{t})$ 是 $u(x, t)$ 在 $Q_T \cup \Gamma_T$ 上的严格最大值点, 对充分小的 $\epsilon > 0$, 成立 $v(x, t) \doteq u(x, t) + \epsilon w(x) < u(\hat{x}, \hat{t})$, $\forall (x, t) \in \partial_p Q \setminus \{(\hat{x}, \hat{t})\}$. 在 Q 上 $v(x, t)$ 满足微分不等式 $v_t - a^2 \Delta v = u_t - a^2 \Delta u - \epsilon a^2 \Delta w \leq -\epsilon a^2 \Delta w < 0$. 由极值原理, $v(x, t)$ 的最大值必然在 Q 的抛物边界 $\partial_p Q$ 取到. 显然 $v(\hat{x}, \hat{t}) = u(\hat{x}, \hat{t})$ 就是 $v(x, t)$ 在 $\partial_p Q$ 上的最大值, 所以 $0 \leq \frac{\partial v}{\partial \nu}(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(\hat{x}, \hat{t}) + \epsilon \frac{\partial w}{\partial \nu}(\hat{x})$, 其中 $\nu = (\hat{x} - \hat{y})/r$.
- 计算得 $\frac{\partial w}{\partial \nu}(\hat{x}) = -2\lambda e^{-\lambda r^2}(\hat{x} - \hat{y}) \cdot \nu = -2\lambda r e^{-\lambda r^2} < 0$, 所以 $\frac{\partial u}{\partial \nu}(\hat{x}, \hat{t}) \geq -\epsilon \frac{\partial w}{\partial \nu}(\hat{x}) > 0$. 证毕!

强极值原理

- 强极值原理: 设 $u(x, t) \in C(Q_T \cup \Gamma_T)$ 且 $u_t(x, t), u_{x_i x_i}(x, t) \in C(Q_T)$, $i = 1, \dots, n$. 如果 $u(x, t)$ 满足微分不等式 $u_t(x, t) - a^2 \Delta u(x, t) \leq (\geq) 0$, $\forall (x, t) \in Q_T$, 存在 $(\hat{x}, \hat{t}) \in Q_T$ 满足 $u(\hat{x}, \hat{t}) = \max\{u(x, t) : (x, t) \in \bar{Q}_T\}$ ($u(\hat{x}, \hat{t}) = \min\{u(x, t) : (x, t) \in \bar{Q}_T\}$), 则 $u(x, t) \equiv u(\hat{x}, \hat{t}), \forall x \in \bar{\Omega}, t \in [0, \hat{t}]$.
- 注意 — 因果律: 只能判定 $\hat{t}$ 时刻之前解是常值, 不能确定之后解是否仍为常值 (侧边的边界条件在未来可能有改变). 请和椭圆型方程的强极值原理对比!
- 证明: 习题 (选作).

强极值原理

- 强极值原理: 设 $u(x, t) \in C(Q_T \cup \Gamma_T)$ 且 $u_t(x, t), u_{x_i x_i}(x, t) \in C(Q_T)$, $i = 1, \dots, n$. 如果 $u(x, t)$ 满足微分不等式 $u_t(x, t) - a^2 \Delta u(x, t) \leq (\geq) 0, \quad \forall (x, t) \in Q_T$, 存在 $(\hat{x}, \hat{t}) \in Q_T$ 满足 $u(\hat{x}, \hat{t}) = \max\{u(x, t) : (x, t) \in \bar{Q}_T\}$ ($u(\hat{x}, \hat{t}) = \min\{u(x, t) : (x, t) \in \bar{Q}_T\}$), 则 $u(x, t) \equiv u(\hat{x}, \hat{t}), \forall x \in \bar{\Omega}, t \in [0, \hat{t}]$.
- 注意 — 因果律: 只能判定 $\hat{t}$ 时刻之前解是常值, 不能确定之后解是否仍为常值 (侧边的边界条件在未来可能有改变). 请和椭圆型方程的强极值原理对比!
- 证明: 习题 (选作).

有界区域上初边值问题经典解的唯一性

- **典型问题:** 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是具光滑边界的有界 (开) 区域, $\nu(x)$ 是 $x \in \partial\Omega$ 的外单位法向, $b, c \in \mathbb{R}$ 不同时为零, $T > 0$ 是给定常数 (♣)
$$\begin{cases} u_t(x, t) - a^2 \Delta u(x, t) = 0, & x \in \Omega, T \geq t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & x \in \bar{\Omega}, \\ b \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) + cu(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, T \geq t > 0. \end{cases}$$
 证明其经典解只能是 $u(x, t) \equiv 0$.
- **Dirichlet 问题** ($b = 0, c = 1$): 直接用极值原理, $\forall (\hat{x}, \hat{t}) \in \Omega \times (0, \infty)$, $0 = \min_{\Gamma_{\hat{t}}} u \leq u(\hat{x}, \hat{t}) \leq \max_{\Gamma_{\hat{t}}} u = 0 \Rightarrow u \equiv 0$.

- **Neumann 问题或 Robin 问题** ($b = 1, c \geq 0$): 设 Ω 满足内球条件, $u(x, t)$ 是不恒等于零的经典解, 则它在 $\bar{Q}_T$ 上必有正的最大值或负的最小值. 由 **强极值原理**, 正的最大值或负的最小值必在抛物边界取到, 而且是 **严格最大 (最小)** 的. 不妨设 $u(x, t)$ 在 $(\hat{x}, \hat{t}) \in S_T$ 取到正的最大值, 由边界条件和边界点引理, $0 = \frac{\partial u}{\partial \nu}(\hat{x}, \hat{t}) + cu(\hat{x}, \hat{t}) \geq \frac{\partial u}{\partial \nu}(\hat{x}, \hat{t}) > 0$, 矛盾! 对负的最小值类似得到矛盾. 故 u 的最大值和最小值只能在底 Q_0 取到. 由于初值为零, 必有 $u \equiv 0$, 矛盾!

- **Robin 问题** ($b = 1, c < 0$): 唯一性依然成立 (仅需了解). 思路: 构造重要的刻画边界的辅助函数 $d(x)$ — 设 $\partial\Omega \in C^2$, 基于距离函数 $\text{dist}(x, \partial\Omega)$ 构造出 $d(x) \in C^2(\Omega)$, 在 $\partial\Omega$ 上 $Dd = -\nu$ (内单位法向). 对参数 λ, σ 充分大, 作变换 $u(x, t) = e^{\lambda t + \sigma d(x)} v(x, t)$, 这里参数 σ 用于转化为 $c > 0$ 的情形, λ 用于处理变换导致的方程中的零阶项 (源项).
- $d(x)$ 的构造及上述性质的证明, 以及边界曲面平均曲率、Gauss 曲率的计算公式等, 参见 Gilbarg, David; Trudinger, Neil S. Elliptic partial differential equations of second order. Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. [中译本: 叶其孝等译, 二阶椭圆型偏微分方程, 高等教育出版社, 2016 年] (第 14 章, p.332)

有界区域上初边值问题经典解的最大模估计 (稳定性)

- 典型问题: 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有 C^2 边界的有界 (开) 区域, $\nu(x)$ 是在 $x \in \partial\Omega$ 的外单位法向, $b, c \in \mathbb{R}$ 不同时为零, $T > 0$ 是给定常数, $(\partial\Omega \in C^2 \Rightarrow \text{内球条件})$

$$(\clubsuit) \quad \begin{cases} u_t(x, t) - a^2 \Delta u(x, t) = f(x, t), & x \in \Omega, \quad T \geq t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \bar{\Omega}, \\ b \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) + cu(x, t) = \mu(x, t), & x \in \partial\Omega, \quad T \geq t > 0. \end{cases}$$

- 最大模估计:** 设 $u(x, t)$ 是问题 $(\clubsuit)$ 的经典解, f, ϕ, μ 都是连续函数, 则存在仅与区域 Ω, a, b, c 和 T 有关的常数 $C > 0$, 使得

$$\max_{\bar{Q}_T} |u| \leq C \left(\max_{\bar{Q}_T} |f| + \max_{\bar{\Omega}} |\phi| + \max_{\partial\Omega \times [0, T]} |\mu| \right).$$

- 证明: 辅助函数 + 极值原理

- Dirichlet 问题 ($b = 0, c = 1$): 置

$F \doteq \max_{\bar{Q}_T} |f|, B \doteq \max \left\{ \max_{\bar{\Omega}} |\phi|, \max_{\partial\Omega \times [0, T]} |\mu| \right\}$. 引入辅助函数

$w_{\pm}(x, t) \doteq Ft + B \pm u(x, t)$, 考虑它满足的定解问题:

i) 在抛物边界 Γ_T 上 $w_{\pm}(x, t) \geq 0$;

ii) 在区域 Q_T 内 $\partial_t w_{\pm} - a^2 \Delta w_{\pm} = F \pm f(x, t) \geq 0$.

弱极值原理 $\Rightarrow$ 在 $\bar{Q}_T$ 上

$w_{\pm} \geq 0 \Rightarrow |u(x, t)| \leq Ft + B \Rightarrow \max_{\bar{Q}_T} |u(x, t)| \leq C(F + B)$, 其中 $C = \max\{1, T\}$.

- Robin 问题: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有 C^2 边界的有界区域, $\nu(x)$ 是 $x \in \partial\Omega$ 的外单位法向, $c \in \mathbb{R}$, $T > 0$ 是给定常数,

$$\begin{cases} u_t(x, t) - a^2 \Delta u(x, t) = f(x, t), & x \in \Omega, T \geq t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) + cu(x, t) = \mu(x, t), & x \in \partial\Omega, T \geq t > 0. \end{cases}$$

- 利用辅助距离函数 $d(x)$, 它满足: i) $d(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$; ii) 在 $\partial\Omega$ 上 $d(x) = 0$, 在 Ω 内 $d(x) > 0$; iii) $Dd(x) = -\nu(x)$ 是 $x \in \partial\Omega$ 处的内单位法向.

- 引入函数 $v(x, t)$: $u(x, t) = v(x, t)e^{\lambda t + \sigma d(x)}$, 则 $v(x, t)$ 满足定解问题

$$\begin{cases} v_t(x, t) - a^2 \Delta v(x, t) - 2a^2 \sigma \langle D_x v, Dd(x) \rangle + e(x, t)v = f(x, t)e^{-\sigma d(x) - \lambda t}, & x \in \Omega, T \geq t > 0, \\ v(x, 0) = \phi(x)e^{-\sigma d(x)}, & x \in \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu}(x, t) + (\sigma + c)v(x, t) = \mu(x, t)e^{-\lambda t}, & x \in \partial\Omega, T \geq t > 0; \end{cases} \quad e(x, t) \doteq \lambda - a^2 \sigma^2 |Dd(x)|^2 - a^2 \sigma \Delta d(x).$$

置 $\sigma \doteq 1 + |c|$, $\lambda \doteq 1 + a^2 \max \{ \sigma^2 |Dd(x)|^2 + \sigma |\Delta d(x)| : x \in \bar{\Omega} \}$, 则 $\sigma + c \geq 1$, $e(x, t) \geq 1$. 此外, 注意

$$\max_{\bar{Q}_T} |f(x, t)e^{-\sigma d(x) - \lambda t}| \leq \max_{\bar{Q}_T} |f(x, t)| = F,$$

$$\max \left\{ \max_{\bar{\Omega}} |\phi(x)e^{-\sigma d(x)}|, \max_{\partial\Omega \times [0, T]} |\mu(x, t)e^{-\lambda t}| \right\} \leq \max \left\{ \max_{\bar{\Omega}} |\phi(x)|, \max_{\partial\Omega \times [0, T]} |\mu(x, t)| \right\} = B.$$

- 置 $w_{\pm}(x, t) \doteq Ft + B \pm v(x, t)$, 那么 (✓)
$$\begin{cases} \partial_t w_{\pm}(x, t) - a^2 \Delta w_{\pm}(x, t) - 2a^2 \sigma \langle D_x w_{\pm}(x, t), Dd(x) \rangle + e(x, t)w_{\pm}(x, t) \geq 0, & x \in \Omega, T \geq t > 0, \\ w_{\pm}(x, 0) \geq 0, & x \in \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial w_{\pm}}{\partial \nu}(x, t) + (\sigma + c)w_{\pm}(x, t) \geq 0, & x \in \partial\Omega, T \geq t > 0; \end{cases}$$

- 结论: $w_{\pm}(x, t) \geq 0, \forall (x, t) \in \bar{Q}_T$.

注意: 方程有低阶项, 不能直接用已有结论.

- $w_{\pm} = Ft + B \pm v$, (注意 $e(x, t) \geq 1, \sigma + c \geq 1, u(x, t) = v(x, t)e^{\lambda t + \sigma d(x)}$)

$$(\checkmark) \begin{cases} \partial_t w_{\pm}(x, t) - a^2 \Delta w_{\pm}(x, t) - 2a^2 \sigma \langle D_x w_{\pm}(x, t), Dd(x) \rangle + e(x, t) w_{\pm}(x, t) \geq 0, & x \in \Omega, T \geq t > 0, \\ w_{\pm}(x, 0) \geq 0, & x \in \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial w_{\pm}}{\partial \nu}(x, t) + (\sigma + c) w_{\pm}(x, t) \geq 0, & x \in \partial\Omega, T \geq t > 0; \end{cases}$$

- 结论: $w_{\pm}(x, t) \geq 0, \forall (x, t) \in \bar{Q}_T$.

证明 用弱极值原理的证明方法. 反证法: 设 $w_{\pm}$ 取到负的最小值. i) 在内部 Q_T 取到, 则在最小值点

$\partial_t w_{\pm}(x, t) \leq 0, a^2 \Delta w_{\pm}(x, t) \geq 0, D_x w_{\pm}(x, t) = 0 \Rightarrow 2a^2 \sigma \langle D_x w_{\pm}(x, t), Dd(x) \rangle = 0$, 而在负的最小值点

$e(x, t) w_{\pm}(x, t) \leq w_{\pm}(x, t) < 0 \Rightarrow \partial_t w_{\pm}(x, t) - a^2 \Delta w_{\pm}(x, t) - 2a^2 \sigma \langle D_x w_{\pm}(x, t), Dd(x) \rangle + e(x, t) w_{\pm}(x, t) < 0$, 与

($\checkmark$) 第一式矛盾.

ii) 若 $w_{\pm}$ 在侧面 S_T 取到负的最小值, 则 $\frac{\partial w_{\pm}}{\partial \nu}(x, t) \leq 0$,

$(\sigma + c) w_{\pm}(x, t) \leq w_{\pm}(x, t) < 0 \Rightarrow \frac{\partial w_{\pm}}{\partial \nu}(x, t) + (\sigma + c) w_{\pm}(x, t) < 0$, 与 ($\checkmark$) 第二式矛盾. 但在底面 Q_0 上

$w_{\pm} \geq 0$, 取不到负的最小值, 矛盾!

- 结论: $w_{\pm}(x, t) \geq 0, \forall (x, t) \in \bar{Q}_T \Rightarrow |v(x, t)| \leq Ft + B \Rightarrow |u(x, t)| \leq C(F + B), \forall (x, t) \in Q_T$, 这里 $C = \max \left\{ \exp(\lambda t + \sigma d(x)) : (x, t) \in \bar{Q}_T \right\} \max \{T, 1\}$.

Cauchy 问题有界解的唯一性和稳定性

- Cauchy 问题 (b): $x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0; u_t - a^2 \Delta u = f(x, t); u(x, 0) = \phi(x).$
- 自由项和解的有界性条件: 存在非负常数 M_1 使得 $|\phi(x)| \leq M_1, \forall x \in \mathbb{R}^n$; 存在非负常数 M_2 使得 $|f(x, t)| \leq M_2, \forall x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T$. 存在非负常数 M 使得 $|u(x, t)| \leq M, \forall x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T$.
- 定理 — Cauchy 问题满足有界性条件的经典解的最大模估计: 设 $u(x, t) \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ 是 Cauchy 问题 (b) 的有界的经典解, 则对任意 $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$, 成立不等式 $|u(x, t)| \leq M_1 + tM_2$.
- 推论 — Cauchy 问题满足有界性条件的经典解的唯一性和稳定性.

证明: 对任意固定的 (x_0, t_0) , 其中 $t_0 \in (0, T]$, 作柱形区域

$R_0 = \{(x, t) : |x - x_0| \leq L, 0 \leq t \leq t_0\}$. 这里 $L > 0$ 是参数. 做函

数 $v(x, t) \doteq \frac{4nM}{2L^2} \left(\frac{|x - x_0|^2}{2n} + a^2 t \right) + M_1 + tM_2$, 则 $v(x, 0) \geq M_1 \geq \phi(x) = u(x, 0)$;

当 $|x - x_0| = L$ 时, $v(x, t) \geq M \geq u(x, t)$; 而在 R_0 内部,

$v_t - a^2 \Delta v = M_2 \geq f(x, t) = u_t - a^2 \Delta u$. 于是对函数 $v - u$ 用极值原理, 得到在 R_0 内

$u(x, t) \leq v(x, t)$. 类似可得到在 R_0 内 $u(x, t) \geq -v(x, t)$, 于是

$|u(x, t)| \leq v(x, t), \forall (x, t) \in R_0$. 特别的, $|u(x_0, t_0)| \leq v(x_0, t_0) = \frac{4nM}{2L^2} a^2 t_0 + M_1 + t_0 M_2$.

令 $L \rightarrow +\infty$, 就得到 $|u(x_0, t_0)| \leq M_1 + t_0 M_2$. 由 (x_0, t_0) 的任意性即得所需估计式. □

Cauchy 问题解的比较原理: 增长条件

- Cauchy 问题 (b): $x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0; u_t - a^2 \Delta u = f(x, t); u(x, 0) = \phi(x).$
- 自由项的增长性条件: 存在非负常数 M_1, r_1 使得 $|\phi(x)| \leq M_1 e^{r_1 |x|^2}, \forall x \in \mathbb{R}^n$; 存在非负常数 M_2, r_2 使得 $|f(x, t)| \leq M_2 e^{r_2 |x|^2}, \forall x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T.$
- 解的增长条件: 存在非负常数 M, r 使得 $|u(x, t)| \leq M e^{r |x|^2}, \forall x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T.$
- 比较原理: 设函数 $u(x, t) \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ 满足增长条件, 且 $u_t - a^2 \Delta u \geq 0, u(x, 0) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, t \in (0, T],$ 那么 $u(x, t) \geq 0, \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T].$
- 推论 — Cauchy 问题满足增长条件的经典解的唯一性: 设 $u(x, t) \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ 是 Cauchy 问题 $x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0; u_t - a^2 \Delta u = 0; u(x, 0) = 0$ 的经典解, 满足增长条件, 则 $u \equiv 0.$
- 推论 — Cauchy 问题满足增长条件的经典解的最大模估计: 设 $u(x, t) \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ 是 Cauchy 问题 (b) 的经典解, 则对任意 $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T_0],$ 其中 $T_0 > 0$ 满足 $4a^2 T_0 \max\{r_1, r_2\} < 1,$ 成立不等式

$$|u(x, t)| \leq M_1 (1 - 4r_1 a^2 t)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ \frac{r_1 |x|^2}{1 - 4r_1 a^2 t} \right\} + M_2 \int_0^t (1 - 4r_2 a^2 (t - \tau))^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ \frac{r_2 |x|^2}{1 - 4r_2 a^2 (t - \tau)} \right\} d\tau.$$
 推论: 当 $r_1 = r_2 = 0$ 时, 有 $|u(x, t)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\phi(x)| + t \sup_{(x, s) \in \mathbb{R}^n \times [0, t]} |f(x, s)|, \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T].$

证明: 用比较原理, 习题. 辅助函数来源: 热核 (热传导方程 Cauchy 问题的基本解, 下一讲介绍.)

比较原理的证明: 增长条件

- **比较原理**: 设函数 $u(x, t) \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ 满足增长条件: 存在非负常数 M, r 使得 $|u(x, t)| \leq Me^{r|x|^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T$, 且 $u_t - a^2 \Delta u \geq 0, u(x, 0) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, t \in (0, T]$, 那么 $u(x, t) \geq 0, \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T]$.
- 证明: 关键 — 局部化 + 辅助函数
 - 任取 $(\hat{x}, \hat{t}) \in \mathbb{R}^n \times (0, T]$. 任取 R 充分大, 使得 $R > |\hat{x}|$. 记 $Q(R, T) \doteq \{(x, t) : |x| < R, 0 < t \leq T\}$, 其抛物边界 $\Gamma(R, T) = \overline{Q(R, T)} \setminus Q(R, T)$. 先设 $4a^2 r T < 1$, 取 $\epsilon > 0$ 满足 $4a^2 r(T + \epsilon) < 1$. 对 $\delta > 0$, 置

$v_\delta(x, t) \doteq \delta(T + \epsilon - t)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ \frac{|x|^2}{4a^2(T + \epsilon - t)} \right\} + u(x, t).$

 直接计算, 有
 - i) $\partial_t v_\delta(x, t) - a^2 \Delta v_\delta(x, t) \geq 0, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T]$, ii) $v_\delta(x, 0) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$, iii) 当 R 充分大时, $v_\delta(x, t) \geq 0, \quad \forall |x| = R$. 在 $Q(R, T)$ 上用弱极值原理, 得到 $v_\delta(x, t) \geq 0, \forall (x, t) \in \overline{Q(R, T)} \Rightarrow \forall (x, t) \in \overline{Q(R, T)}, u(x, t) \geq -\delta(T + \epsilon - t)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ \frac{|x|^2}{4a^2(T + \epsilon - t)} \right\} \Rightarrow u(\hat{x}, \hat{t}) \geq -\delta(T + \epsilon - \hat{t})^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ \frac{|\hat{x}|^2}{4a^2(T + \epsilon - \hat{t})} \right\}$. 令 $\delta \searrow 0$, 得到 $u(\hat{x}, \hat{t}) \geq 0$.
 - 当 $4a^2 r T > 1$ 时, 取 $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_{m-1} < T_m = T$, 使得 $4a^2 r(T_k - T_{k-1}) < 1, k = 1, \cdots, m$, 在 $\mathbb{R}^n \times [T_{k-1}, T_k]$ 上依次用已证的结论即可. (利用一致估计逐步延拓)

热方程齐次 Cauchy 问题的非零解: Tychonov 反例

例. 记 $\varphi(z) = \begin{cases} e^{-1/z^2}, & \text{if } z \neq 0 \\ 0, & \text{if } z = 0, \end{cases}$ 定义 $(\diamond) u(x, t) \doteq \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d^n}{dt^n} \varphi(t) \right) \frac{x^{2n}}{(2n)!}, & \text{if } t > 0, \\ 0, & \text{if } t = 0. \end{cases}$ 证明它是 Cauchy 问题

$x \in \mathbb{R}, t > 0; u_t = u_{xx}; u(x, 0) = 0$ 的一个经典解.

证明 1. 首先形式计算 $(\heartsuit) \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n} \varphi(t) \Big|_{t=0} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 0; (\spadesuit)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n} \varphi(t) (2n)(2n-1) \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n} \varphi(t) \frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \varphi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

2. 为说明 $(\heartsuit)$ 的合理性, 只需说明对任意固定的 $T > 0, a > 0$, 级数 $(\diamond)$ 在 $[-a, a] \times [0, T]$ 上一致收敛. 由函数项级数求导定理, 也只需验证级数 $(\spadesuit)$ 一致收敛. 所以关键是估计系数 $\frac{d^n}{dt^n} \varphi(t)$. 注意 $\varphi(t) \in C^\infty$, 但不是解析函数.

3. 对任意固定的 $t > 0$, 考虑复平面上围道 $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = t + \frac{t}{2}e^{i\theta}, 0 < \theta \leq 2\pi\}$, 它不包含原点. 由 Cauchy 积分公式, $\frac{d^n}{dt^n} \varphi(t) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(z)}{(z-t)^{n+1}} dz, \forall n \in \mathbb{N}$. 于是 $\left| \frac{d^n}{dt^n} \varphi(t) \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re}(z^{-2})}}{|z-t|^{n+1}} |dz| = \frac{n!}{2\pi} \left(\frac{2}{t}\right)^n \int_0^{2\pi} e^{-\operatorname{Re} z^{-2}} d\theta$. 由于 $z^2 = t^2 \left(1 + \frac{1}{2}e^{i\theta}\right)^2 \Rightarrow z^{-2} = t^{-2} \frac{1 + \frac{1}{4}e^{-2i\theta} + e^{-i\theta}}{|(1 + \frac{1}{2}e^{i\theta})^2|^2} \Rightarrow \operatorname{Re} z^{-2} \geq (2t)^{-2}$, 从而 $\left| \frac{d^n}{dt^n} \varphi(t) \right| \leq n! \left(\frac{2}{t}\right)^n e^{-\frac{1}{4t^2}}.$

4. 用 Stirling 公式 $\frac{2^n n!}{(2n)!} \leq \frac{1}{n!}$, 就得到 $(\diamond)$ 在 $|x| \leq a$ 时的优级数 $e^{-\frac{1}{4t^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^n \frac{a^{2n}}{n!} = e^{-\frac{1}{4t^2}} e^{\frac{a^2}{t}}$. 注意后者当 $t \rightarrow 0$ 时收敛到零. 证毕!

阅读任务和作业

- 必读 — 郇中丹, 黄海洋: 偏微分方程 (第二版), 高等教育出版社, 2013. [pp. 177-189]
- 作业 — p.181: 3; p.185: 2; p.188: 3,4.
- 参考文献
 - DiBenedetto, Emmanuele. Partial differential equations. Second edition. Cornerstones. Birkhäuser Boston, Ltd., Boston, MA, 2010.

最后更新: 2022-11-21

偏微分方程

第十六讲 热传导方程的初值问题和 Fourier 变换

袁海荣 (华东师范大学 数学科学学院)

2022 年 12 月 8 日

里奇流差不多是汉密尔顿一手一脚发展出来的. 这种方法基于微分方程而非标准的拓扑方法, 是热方程的一种几何形式. ……有别于使热均匀地分布, 它把在几何空间中凹凸状物和不规则的东西都变得光滑. 曲率大的区域的曲率逐渐变小, 最后整体的曲率就变得均匀如球面了, 而球面就是曲率为正常数的曲面. 不过, 有些凸状物比较顽固, 不容易被熨平. 恰恰相反, 会出现尖刺和折叠, 数学上称之为“奇点”, 需要特殊的处理. ……但有一种奇点即像雪茄一般的凸状物, 却不能用割补的方法除去. 在里奇流流动的过程中, 曲率一般而言在平均化, 但在这些突触中却会不受控制地变大. 汉密尔顿指出, 所谓“雪茄”的出现, 乃是证明庞加莱猜想最大的障碍.

— 丘成桐 《我的几何人生》 pp. 267-268



传记: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Yau/>

学习要点

- 熟练掌握 Fourier 变换及其基本性质
- 熟练掌握利用 Fourier 变换求解热传导方程初值问题的方法
- 熟练掌握齐次化原理
- 了解算子分裂法的基本思想
- 熟练掌握 Poisson 公式、它的意义及其验证
- 了解非齐次热传导方程初值问题解的验证

$\mathbb{R}^n$ 上的 Fourier 变换

- Fourier 变换: 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 称函数 $\mathcal{F}[f](y) = \hat{f}(y) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy \cdot x} f(x) \, dx$ 为 f 的 Fourier 变换, 其中 $y \cdot x$ 是向量 $y, x \in \mathbb{R}^n$ 的内积.
- f 的 Fourier 逆变换 定义为 $\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \check{f}(x) \doteq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y} f(y) \, dy.$

- 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则 $\hat{f}$ 和 $\check{f}$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 上的一致连续的函数.

证明: $|\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(e^{-ih \cdot y} - 1 \right) e^{-ix \cdot y} dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |e^{-ih \cdot y} - 1| dy \leq \int_{|y| \leq r} |f(y)| |e^{-ih \cdot y} - 1| dy + 2 \int_{|y| > r} |f(y)| dy. \forall \varepsilon > 0,$
 取 r 充分大使得第二项小于 ε ; 对这样取定的 r , 再令 $|h|$ 充分小, 使 $|e^{-ih \cdot y} - 1| \leq \varepsilon$; 注意这里 $|h|$ 的大小与 x 无关. 从而
 $|\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)| \leq (1 + \|f\|_{L^1})\varepsilon$, 即 $\hat{f}$ 一致连续. 对 $\check{f}$ 的证明完全相同. (注意: 用 Lebesgue 控制收敛定理得不到一致连续性). □

[参见: 袁海荣编, 调和分析与偏微分方程讲义, 第一讲. <http://math.ecnu.edu.cn/~hryuan>]

● [Riemann-Lebesgue 弓|理]

设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则 $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$ 且 $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \check{f}(\xi) = 0$.

证明 逼近思想. 1. 对一元函数 $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$, 它是闭区间 $[a, b]$ 的特征函数, 直接计算就得到 $\widehat{\chi_{[a,b]}}(\xi) = \frac{e^{-ib\xi} - e^{-ia\xi}}{-i\xi}$, 所以结论成立.

2. 利用 Fourier 变换变量分离的特性, 若 $f(x) = \prod_{j=1}^d \chi_{[a_j, b_j]}(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 那么 $\hat{f}(\xi) = \prod_{j=1}^d \frac{e^{-ib_j\xi_j} - e^{-ia_j\xi_j}}{-i\xi_j}$, 所以结论成立 (在 $|\xi| \rightarrow \infty$ 过程中若某个分量 $\xi_j = 0$, 利用 L'Hospital 法则, 对应因式是个有界量, 不影响结论). 特别地, 定理结论对阶梯函数 g (有限个方体的特征函数的线性组合) 仍然成立.

3. $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\forall \varepsilon > 0$, 存在阶梯函数 g 使得 $\|f - g\|_{L^1} \leq \varepsilon$, 从而 $|\hat{f}(\xi)| \leq |(\widehat{f-g})(\xi)| + |\hat{g}(\xi)| \leq \|f - g\|_{L^1} + |\hat{g}(\xi)| \leq \varepsilon + |\hat{g}(\xi)|$. 于是 $\limsup_{|\xi| \rightarrow \infty} |\hat{f}(\xi)| \leq \varepsilon$. 利用 ε 的任意小性即得所证. □

• 例 对任意 $t > 0$, 成立 $(e^{-t|x|^2})^\wedge(y) = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}}$.

解: 1. 对任意 $b > 0, a \in \mathbb{R}$, 首先计算 $\int_{\mathbb{R}} e^{iax-bx^2} dx$. 我们有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{iax-bx^2} dx &= e^{\frac{-a^2}{4b}} \int_{\Gamma \doteq \left\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} z = \frac{-a}{2\sqrt{b}}\right\}} \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{b}} dz \quad \left(z = \sqrt{b}x - \frac{ia}{2\sqrt{b}}\right) \\ &= e^{\frac{-a^2}{4b}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx\right) \frac{1}{\sqrt{b}} \quad (\text{全纯函数的 Cauchy 积分定理}) \\ &= e^{\frac{-a^2}{4b}} \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{回忆 } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}) \end{aligned}$$

2. 从而, 对任意 $t > 0$, 可得

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y - t|x|^2} dx = \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_j y_j - tx_j^2} dx_j = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}}. \text{ 由此, 根据定义, 即}$$

知 $(e^{-t|x|^2})^\wedge(y) = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}}$. 此外, 还可看出 $(e^{-t|x|^2})^\vee(y) = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}}$. (后面会用)

- 复习 (实分析): 简单函数 (simple function) — 形如 $\sum_{k=1}^N a_k \chi_{E_k}$ 的 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ 的函数, 其中 $a_k \in \mathbb{C}$, $E_k \subset \mathbb{R}^n$ 是 Lebesgue 可测且测度有限的. 阶梯函数 (step function) — 上述 E_k 是长方体的简单函数.

定理: 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上可测函数, 则存在一系列阶梯函数 $\{\psi_k\}$ 几乎处处收敛到 f .

定理: 简单函数、阶梯函数和具有紧致支集的连续函数都在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中稠密.

- 复习 (复分析): Cauchy 积分定理 — 复平面内单连通区域上的全纯函数在任一围线 (分段光滑的简单闭曲线) 上的积分为零.

- [Plancherel 定理] 设 $u \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$,
则 $\hat{u}, \check{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 且 $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|\check{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.
- [Parseval 等式] $\int_{\mathbb{R}^n} u(x) \bar{v}(x) dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x) \bar{\hat{v}}(x) dx, \quad \forall u, v \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n).$
- [Fourier 积分定理] 设 $u \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, 那么 $(\hat{u})^\vee = u$.
证明见参考文献. 意义: 由于 $L^1 \cap L^2$ 在 L^2 中稠密, 根据稠定有界线性算子保范延拓定理, 可对任意 L^2 函数, 定义其 Fourier 变换. Fourier 变换可以保范延拓为 (复) $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的线性保距酉算子.

若 $u, D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (其中 α 是多重指标), 则几乎处处成立 $\widehat{D^\alpha u}(y) = (iy)^\alpha \hat{u}(y)$.

证明 逼近方法. 先设 $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 分部积分得到

$$\begin{aligned} \widehat{D^\alpha u}(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} D^\alpha u(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^\alpha (e^{-ix \cdot y}) u(x) dx = \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} (-iy)^\alpha e^{-ix \cdot y} u(x) dx = (iy)^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} u(x) dx = (iy)^\alpha \hat{u}(y). \end{aligned}$$

然后逼近: 对任意满足 $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 的 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的函数 u , 利用稠密性, 找到一族函数 $u_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, 使得 $u_k \xrightarrow{L^2} u, D^\alpha u_k \xrightarrow{L^2} D^\alpha u$. 由 Fourier 变换保 L^2 范数的性质, 就有 $\mathcal{F}u_k \xrightarrow{L^2} \mathcal{F}u, \mathcal{F}(D^\alpha u_k) \xrightarrow{L^2} \mathcal{F}(D^\alpha u)$. 通过取一个子列, 可设上述收敛还是几乎处处意义下成立的. 从而将已证上式应用于 u_k 并两边取极限 $k \rightarrow \infty$ 即可. □

• [卷积与 Fourier 变换] 设 $u, v \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, 则 $\widehat{u * v} = \hat{u} \hat{v}$.

• 卷积: $(u * v)(x) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} u(x - y)v(y) \, dy$ (满足交换律, 结合律)

• 推论: $\mathcal{F}^{-1}(uv) = \mathcal{F}^{-1}u * \mathcal{F}^{-1}v$.

证明 $\widehat{u * v}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \left(\int_{\mathbb{R}^n} u(x - y)v(y) \, dy \right) dx =$
 $\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-y) \cdot \xi} u(x - y) dx \right) e^{-iy \cdot \xi} v(y) \, dy = \hat{u}(\xi) \hat{v}(\xi)$. (用到了 Fubini 定理和 Lebesgue 测度的平移不变性)

复习: 实分析与泛函分析

积分和级数的收敛定理: 设 $(X, \mathcal{X}, \mu)$ 是个测度空间.

- 序列单调收敛定理: 设 $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ 是可测的非负递增函数列, 则
$$\int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$
- 级数单调收敛定理: 设 $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$ 可测, 则 $\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu.$
- Fatou 引理: 设 $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$ 可测, 则
$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

- 序列的控制收敛定理: 设 $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ 是几乎处处收敛到 f 的可测函数列, 且存在绝对可积的函数 $g : X \rightarrow [0, +\infty]$, 使得几乎处处成立 $|f_n| \leq g$, 则

$$\int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$
- 级数的控制收敛定理: 设 $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ 是可测函数, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu < \infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 对几乎所有的 x 都绝对收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu$.

- Egorov 定理: 设 $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ 是可测函数, A 是 X 的测度有限的子集, 对几乎所有的 $x \in A$, $\{f_n(x)\}$ 收敛. 那么对任意 $\varepsilon > 0$, 存在一个测度至多为 ε 的子集 D_ε , 使得在 $A \setminus D_\varepsilon$ 上 f_n 一致收敛到 f .
- Lusin 定理: 设 X 是局部紧的 Hausdorff 空间, 且是 σ -紧的, μ 是 Radon 测度, 而 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 的支集具有有限测度. 那么对任意 $\varepsilon > 0$, 存在函数 $g \in C_c(X \rightarrow \mathbb{R})$, 使得集合 $\mu(\{x \in X : g \neq f\}) \leq \varepsilon$.
- 稠密性定理: 仅取有限个值的可测函数叫作简单函数. 支集具有有限测度的简单函数在 $L^p(X, \mathcal{X}, \mu)$ ($0 < p < \infty$) 中稠密; 简单函数 (不需要支集测度有限) 在 L^∞ 中稠密.

- 稠定有界线性算子的保范延拓定理: 设 U, V 是赋范线性空间, $L: U \rightarrow V$ 是有界线性算子. 记 $\bar{U}$ 和 $\bar{V}$ 是 U, V 分别完备化后得到的 Banach 空间, 则存在有界线性算子 $\bar{L}: \bar{U} \rightarrow \bar{V}$, 使得 $\bar{L}|_U = L$, 且 $\|\bar{L}\| = \|L\|$.

- Fubini-Tonelli 定理: 设 $(X, \mathcal{X}, \mu)$ 和 $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ 是 σ -有限的测度空间, 其乘积测度空间为 $(X \times Y, \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mu \times \nu)$.

- Tonelli 定理: 设 $f: X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ 可测, 则

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y);$$

- Fubini 定理: 设 $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ 绝对可积, 则

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y), \text{ 且内层积分均几乎处处绝对可积, 外层积分均绝对可积.}$$

如果 $(X, \mathcal{X}, \mu)$ 和 $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ 是完备的测度空间, 则将乘积 σ -代数 $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ 换作它的完备化后上述结论依然成立.

- 注意: 称一个测度空间是完备的, 如果每个零测集的子集仍然可测.

齐次热传导方程的 Cauchy 问题

- 目标问题: $x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0; u_t(x, t) = a^2 \Delta u(x, t); u(x, 0) = \phi(x).$
- 用 Fourier 变换法求出形式解: 将 $u(x, t)$ 对 x 作 Fourier 变换 (t 看作参数; 或者在方程两端乘以乘子 $e^{-ix \cdot y}$, 然后关于 $x \in \mathbb{R}^n$ 积分), 记

$\hat{u}(y, t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} u(x, t) dx$, 它满足如下以 t 为自变量的无数个一阶常系数线性

ODE ($y \in \mathbb{R}^n$ 是参数): $\frac{d}{dt} \hat{u}(y, t) = -a^2 |y|^2 \hat{u}(y, t), \quad \hat{u}(y, 0) = \hat{\phi}(y) \Rightarrow \hat{u}(y, t) =$

$$e^{-a^2 |y|^2 t} \hat{\phi}(y) \xrightarrow{\text{Fourier 积分定理}} u(x, t) = \mathcal{F}_y^{-1} [e^{-a^2 |y|^2 t} \hat{\phi}(y)](x) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}(uv) = \mathcal{F}^{-1} u * \mathcal{F}^{-1} v} =$$

$$(F_y^{-1} [e^{-a^2 |y|^2 t}] * F^{-1} [\hat{\phi}]) (x) = (F_y^{-1} [e^{-a^2 |y|^2 t}] * \phi) (x) \xrightarrow{\epsilon = a^2 t, (e^{-\epsilon |y|^2})^\vee(x) = (\frac{1}{4\pi\epsilon})^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}}} =$$

$$u(x, t) = \left[\left(\frac{1}{4a^2 \pi t} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left(-\frac{|\cdot|^2}{4a^2 t} \right) * \phi(\cdot) \right] (x).$$

- Poisson 公式:
$$u(x, t) = \left(\frac{1}{4a^2\pi t} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2t} \right) \phi(y) \, dy$$

该公式表明: 扰动 (热) 具有无限传播速度.

- Gauss 核或热核: $G_t(x) \doteq \left(\frac{1}{4a^2\pi t} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left(-\frac{|x|^2}{4a^2t} \right), \mathcal{F}[G_t(x)] = \exp(-a^2t|y|^2)$

非常重要的特殊函数: 正态分布 $N(0, 2a^2t)$ 的概率密度函数.

算子分裂法: 基本思想

典型目标问题 — 发展型方程的初值问题:

$$\frac{d}{dt}u(t) + A(u(t)) = 0, \quad u(0) = u_0, \quad t \geq 0.$$

基本假设: 算子 $A(u) = A_1(u) + \cdots + A_l(u)$. 算子分裂法基本想法:

- 简化问题: $j = 1, \dots, l$: $\boxed{\frac{d}{dt}u_j + A_j(u_j) = 0, \quad u_j(0) = u_0}$. 记对应解为 $\boxed{u_j(t) = S_t^j u_0}$.
- 原问题近似解: $\boxed{\tilde{u}(n\Delta t) \doteq [S_{\Delta t}^l \cdots S_{\Delta t}^1]^n u_0}$ (注意符号 Δt 是一个整体, 代表离散后的时间步长)
- 原问题解:

$$u(t) = \lim_{\substack{t=n\Delta t \\ \Delta t \rightarrow 0, n \rightarrow \infty}} \tilde{u}(n\Delta t)$$

思考题: 是否只适用于自治系统?

常系数线性常微分方程组 Cauchy 问题

- 原问题: $u_t + Cu = 0, u(0) = u_0, C = A + B$ 都是 N 阶方阵 $\Rightarrow u(t) = \exp(-t(A+B))u_0 = [\exp(-\Delta t(A+B))]^n u_0$
- 分解的问题:
$$\begin{cases} v_t + Av = 0, & v(0) = v_0; \\ w_t + Bw = 0, & w(0) = w_0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(t) = S_t^1 v_0 = \exp(-tA)v_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-t)^m}{m!} A^m v_0, \\ w(t) = S_t^2 w_0 = \exp(-tB)w_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-t)^m}{m!} B^m w_0, \end{cases}$$
- 近似解: $t = n\Delta t, \tilde{u}(n\Delta t) = [\exp(-\Delta tA) \exp(-\Delta tB)]^n u_0$
- 问题: 记算子 $U_{\Delta t} \doteq \exp(-\Delta t(A+B)), V_{\Delta t} \doteq \exp(-\Delta tA) \exp(-\Delta tB)$, 是否有

$$\lim_{\substack{t=n\Delta t \\ \Delta t \rightarrow 0, n \rightarrow \infty}} (u(n\Delta t) - \tilde{u}(n\Delta t)) = \lim_{\substack{t=n\Delta t \\ \Delta t \rightarrow 0, n \rightarrow \infty}} (U_{\Delta t}^n - V_{\Delta t}^n)u_0 = 0? \quad (1)$$

技巧

$$\begin{aligned} U_{\Delta t}^n - V_{\Delta t}^n &= \sum_{m=0}^{n-1} \left(U_{\Delta t}^{m+1} V_{\Delta t}^{n-(m+1)} - U_{\Delta t}^m V_{\Delta t}^{n-m} \right) = \sum_{m=0}^{n-1} U_{\Delta t}^m (U_{\Delta t} - V_{\Delta t}) V_{\Delta t}^{n-1-m} \Rightarrow (\text{算子范数}) \|U_{\Delta t}^n - V_{\Delta t}^n\| \leq \\ &\sum_{m=0}^{n-1} \|U_{\Delta t}\|^m \|U_{\Delta t} - V_{\Delta t}\| \|V_{\Delta t}\|^{n-1-m} \leq n \max\{\|U_{\Delta t}\|, \|V_{\Delta t}\|\}^{n-1} \|U_{\Delta t} - V_{\Delta t}\| \leq \underbrace{n \|U_{\Delta t} - V_{\Delta t}\| \exp(t(\|A\| + \|B\|))}_{\text{须估计此项!}} \end{aligned}$$

(注: 由算子范数的性质, $\|U_{\Delta t}\| = \|\exp(-\Delta t(A+B))\| \leq \exp(\Delta t(\|A\| + \|B\|))$;

$\|V_{\Delta t}\| \leq \|\exp(-\Delta tA)\| \|\exp(-\Delta tB)\| \leq \exp(\Delta t\|A\|) \exp(\Delta t\|B\|)$).

$\|U_{\Delta t} - V_{\Delta t}\|$ 的估计:

- $U_{\Delta t} = I - \Delta t(A + B) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2(A + B)^2 + O(\Delta t^3)$
- $U_{\Delta t} - V_{\Delta t} = I - \Delta t(A + B) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2(A + B)^2 + O(\Delta t^3) - [I - \Delta tA + \frac{1}{2}(\Delta t)^2A^2 + O(\Delta t^3)][I - \Delta tB + \frac{1}{2}(\Delta t)^2B^2 + O(\Delta t^3)] = \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \underbrace{(BA - AB)}_{\doteq [B,A] \text{ (交换子)}} + O(\Delta t^3) = -\frac{1}{2}[A, B](\Delta t)^2 + O(\Delta t^3)$

$\Rightarrow \left\|U_{\Delta t}^m - V_{\Delta t}^m\right\| \leq n\left\|U_{\Delta t} - V_{\Delta t}\right\| \exp (t(\|A\|+\|B\|)) \xrightarrow{\text { 用 } n \Delta t=t} \leq \frac{1}{2} t \Delta t \exp (t(\|A\|+\|B\|))\|[A, B]\|+t O(\Delta t)^2=O(\Delta t) \Rightarrow(1)$ 得证:

$$\lim _{\substack{t=n \Delta t \\ \Delta t \rightarrow 0, n \rightarrow \infty}}\left[\exp (-\Delta t A) \exp (-\Delta t B)\right]^n u_0=u(t) .$$

结论: 算子分裂法对常系数线性常微分方程组确实有效!

注意, 上述就是 Lie 群 Lie 代数理论中关于指数映射的 Lie 乘积公式: 设 A, B 是 n 阶 (复) 方阵, 则 $\exp (A+B)=\lim _{m \rightarrow \infty}\left(\exp \left(\frac{A}{m}\right) \exp \left(\frac{B}{m}\right)\right)^m$. 将其推广到 Hilbert 空间中某类无界算子, 就称为 Trotter 乘积公式. 由此可定义量子力学中的路径积分. 参考: Gustafson, Stephen J.; Sigal, Israel Michael: Mathematical concepts of quantum mechanics. Third edition. Universitext. Springer, Cham, 2020. (第 15.3 节)

高维热方程的 Cauchy 问题 $u_t = \Delta u$, $u(0) = u_0$. 以二维空间为例

● 分裂的问题:

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, & v(0) = v_0(x, y); \quad (y \text{ 是参数}) \\ w_t = w_{yy}, & w(0) = w_0(x, y), \quad (x \text{ 是参数}) \end{cases} \xrightarrow[\text{一维情形的 Poisson 公式}]{G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)} \begin{cases} v(x, y, t) = S_t^1 v_0 = \int_{\mathbb{R}} G_t(x - \xi) v_0(\xi, y) d\xi \\ w(x, y, t) = S_t^2 w_0 = \int_{\mathbb{R}} G_t(y - \eta) w_0(x, \eta) d\eta \end{cases}$$

$$\bullet \quad G_t * G_s = G_{t+s}, \quad \text{即} \quad \int_{\mathbb{R}} G_t(x - y) G_s(y) dy = G_{t+s}(x) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} G_t(x - y) G_s(y - z) dy = G_{t+s}(x - z)$$

证: 用 Fourier 变换, $(G_t * G_s)^\wedge(\xi) = \hat{G}_t(\xi) \hat{G}_s(\xi) = e^{-\xi^2 t} e^{-\xi^2 s} = e^{-\xi^2(t+s)} = (G_{t+s})^\wedge(\xi)$.

- 近似解 (请自己写出 $n = 1, 2$ 的情形, 方便理解): $[S_{\Delta t}^2 S_{\Delta t}^1]^n u_0 = \int_{\mathbb{R}^{2n}} G_{\Delta t}(x - \xi_n) G_{\Delta t}(\xi_n - \xi_{n-1}) \cdots G_{\Delta t}(\xi_2 - \xi_1) G_{\Delta t}(y - \eta_n) G_{\Delta t}(\eta_n - \eta_{n-1}) \cdots G_{\Delta t}(\eta_2 - \eta_1) u_0(\xi_1, \eta_1) d\xi_n \cdots d\xi_1 d\eta_n \cdots d\eta_1 = \int_{\mathbb{R}^2} G_{n\Delta t}(x - \xi_1) G_{n\Delta t}(y - \eta_1) u_0(\xi_1, \eta_1) d\xi_1 d\eta_1 = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\right)^2 \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4t}\right) u_0(\xi, \eta) d\xi d\eta \doteq G_t * u_0$, 这里 $G_t(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\right)^2 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4t}\right)$
- 由于近似解与 n 和 Δt 无关, 可猜测解就是 $u(x, y, t) = G_t * u_0$. 当 $u_0 \in L^\infty \cap L^1(\mathbb{R}^2)$ 时可直接验证.
- 结论: 算子分裂法对热方程 Cauchy 问题适用. (其他方法: 高维 Fourier 变换; 自相似解或基本解; 梯度流或欧拉法)

$$\bullet \quad \text{一般情形 Poisson 公式: } u(\mathbf{x}, t) = G_t * u_0(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}\right) u_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

非齐次热方程的齐次初值问题

- 目标问题 (◇):
$$\begin{cases} u_t(x, t) = a^2 \Delta u(x, t) + f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

- 齐次化原理 — 考虑无限个齐次方程的 Cauchy 问题:

设 $w(x, t; s)$, $\forall t \geq s$ ($s \geq 0$ 是参数) 是
$$\begin{cases} \partial_t w(x, t; s) - a^2 \Delta_x w(x, t; s) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > s, \\ w(x, s; s) = f(x, s), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$
 的经典解, 则

$u(x, t) \doteq \int_0^t w(x, t; s) ds$ 是 (◇) 的经典解. 证明: 含参变量积分求导.

- 由 Poisson 公式, 作时间平移 $t \rightarrow t - s$, 得到 $w(x, t; s) = [G_{t-s}(\cdot) * f(\cdot, s)](x) = \int_{\mathbb{R}^n} G_{t-s}(x - y) f(y, s) dy$. 于是 (◇)

的形式解是
$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G_{t-s}(x - y) f(y, s) dy ds = \int_0^t \frac{1}{(4\pi a^2(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-s)}} f(y, s) dy ds.$$

- 结论: 初值问题
$$\begin{cases} u_t(x, t) = a^2 \Delta u(x, t) + f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$
 的解具有形式

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \phi(y) dy + \int_0^t \frac{1}{(4\pi a^2(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-s)}} f(y, s) dy ds.$$

再次复习: 含参量反常积分的性质

- 复习含参量反常积分的性质 (华东师大《数学分析》(第四版) 下册定理 19.10, 19.11, p.196)
 - 连续性: 设 $f(x, y)$ 在 $I \times [c, +\infty)$ 上连续, 若含参反常积分 $\Phi(x) = \int_c^\infty f(x, y) dy$ 在 I 上一致收敛, 则 $\Phi(x)$ 在 I 上连续.
 - 可微性: 设 $f(x, y)$ 与 $f_x(x, y)$ 在区域 $I \times [c, +\infty)$ 上连续, 若 $\Phi(x) = \int_c^\infty f(x, y) dy$ 在 I 上收敛, $\int_c^\infty f_x(x, y) dy$ 在 I 上一致收敛, 则 $\Phi(x)$ 在 I 上可微, 且 $\Phi'(x) = \int_c^\infty f_x(x, y) dy$.
 - 一致收敛 (p. 193): 设 $f(x, y)$ 是定义在无界区域 $R = I \times [c, \infty)$ 上的函数, 其中 I 是一个区间, 若对每一个固定的 $x \in I$, 反常积分 $\Phi(x) \doteq \int_c^\infty f(x, y) dy$ 都收敛, 就称之为含参反常积分. 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在常数 $M > c$, 使得对任意的 $A_1, A_2 > M$, 对一切 $x \in I$, 都有 $\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x, y) dy \right| < \varepsilon$, 就称含参反常积分 $\int_c^\infty f_x(x, y) dy$ 在 I 上**一致收敛**到 $\Phi(x)$.
 - 优函数判别法: 设存在函数 $g(y)$, 使得 $|f(x, y)| \leq g(y)$, $\forall (x, y) \in I \times [c, +\infty)$, 且 $\int_c^\infty g(y) dy$ 收敛, 则 $\int_c^\infty f(x, y) dy$ 在 I 上一致收敛.
- 注意: 实际应用中, x, y 都是多元的, 一致收敛等概念要对应推广, 证明对应作修改, 但没有本质的区别. 由于连续和可微是局部性质, 可要求 I 是个含有内点的紧集. 对瑕积分有类似结论.

- 齐次热方程 Cauchy 问题解的存在性定理 (有界连续初值情形): 考虑初值问

题
$$\begin{cases} u_t(x, t) = a^2 \Delta u(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$
 设 $\phi(x) \in C \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 那么

$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \phi(y) dy$ 是 $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ 上的 C^∞ 函数, 且满足齐次热方程. 进一步, 还成立 $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$ 且 $u(x, 0) = \phi(x)$.

- 证明: 关键点 — 变量替换得到

$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \phi(y) dy = \pi^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x - 2ay\sqrt{t}) e^{-|y|^2} dy$; 结合含参量反常积分的可微性 (用前一表达式, 判定被积函数求导后反常积分是否一致收敛, 找可积优函数), 以及含参量反常积分的连续性 (用后一表达式, 找可积优函数).

- 任取 $0 < T_1 < T_2 < +\infty$ 及 $R > 0$, 设 $|x| \leq R, T_1 \leq t \leq T_2$. 对任意多重指标 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 记 $\partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, 那么
$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \partial^\alpha \left[\left(\frac{1}{4a^2 \pi t} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t} \right) \right] dy = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) P_\alpha(x-y, \frac{1}{\sqrt{t}}) \exp \left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t} \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y) P_\alpha(y, \frac{1}{\sqrt{t}}) \exp \left(-\frac{|y|^2}{4a^2 t} \right) dy,$$
这里 $P_\alpha(y, \frac{1}{\sqrt{t}})$ 是 y 和 $1/\sqrt{t}$ 的多项式, 次数和系数都只与 α 和 n 有关. 记 $|P_\alpha|$ 为 $|y|, 1/\sqrt{t}$ 的多项式, 其系数为 P_α 中相应系数的绝对值, 而且将 P_α 中的形如 y^β 的因子用 $|y|^{|\beta|}$ 取代. 于是, 成立 $\left| \phi(x-y) P_\alpha(y, \frac{1}{\sqrt{t}}) \exp \left(-\frac{|y|^2}{4a^2 t} \right) \right| \leq M |P_\alpha|(|y|, \frac{1}{\sqrt{T_1}}) \exp \left\{ -\frac{|y|^2}{4a^2 T_2} \right\} \doteq h(y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 这里 $M = \|\phi\|_{L^\infty}$. 于是求导后含参反常积分一致收敛 $\Rightarrow u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (T_1, T_2)) \Rightarrow u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$.
- 直接计算 $\Rightarrow$ Gauss 核满足热方程: $\partial_t G_t(x) - a^2 \Delta G_t(x) = 0 \Rightarrow u(x, t)$ 在 $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ 上满足齐次热方程.

- 满足初值条件且有界:** 设 $\phi \in C(\mathbb{R}^n)$ 且有界 M , 则含参反常积分

$$u(x, t) = \pi^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x - 2ay\sqrt{t}) e^{-|y|^2} dy$$

在 $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ 上一致收敛. 所以 $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$. 又显然成立 $|u(x, t)| \leq M \doteq \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \forall x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$. (有界解!)

优函数: $|\phi(x - 2ay\sqrt{t}) e^{-|y|^2}| \leq M \exp\{-|y|^2\} \doteq h(y)$. 注意 $h(y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 就是优函数.
- 满足初值:** 若 $\phi \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 可直接用 Lebesgue 控制收敛定理证明

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u(x, t) = \phi(x).$$

控制函数是上述 $h(y)$. 由 ϕ 的连续性, 固定 y 时

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \phi(x - 2ay\sqrt{t}) e^{-|y|^2} = \phi(x) e^{-|y|^2},$$

注意到 $\pi^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} dy = 1$, 从而

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u(x, t) = \phi(x).$$

- 也可以用极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义, 证明: 若 $\phi \in C \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, $t \rightarrow 0+$ 时, $u(x, t)$ 收敛到 $\phi(x)$. 进一步, 如果 $\phi(x)$ 一致连续, 则 $u(\cdot, t)$ 也一致收敛到 ϕ . (习题!)

- Gauss 核 $G_t(x) = \Phi(x, t) \doteq \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}$ 是问题

$$\begin{cases} \Phi_t - a^2 \Delta \Phi = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ \Phi = \delta_0, & \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$
 的 Green 函数, 其中 δ_0 是 $\mathbb{R}^n$ 中在原点的 Dirac 测度.
 - 按照定义, 要证明 $\lim_{t \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) \phi(y) dy = \phi(0)$. 由于 $\Phi(x, t) = \Phi(-x, t)$, 这就是要求 $\lim_{t \rightarrow 0+} u(0, t) = \lim_{t \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(-y, t) \phi(y) dy = \phi(0)$, 对此上面已经证明, 故结论成立.
 - 这表明, 信号 (扰动) 的无限传播速度
- 意义: 用 C^∞ 函数近似有界连续函数 $\phi(x)$ ($C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $C \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中稠密); 刻画 Brown 运动的概率密度函数

定理 (非齐次热方程初值问题经典解的存在性)

设 $f \in C_{x,t}^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$ 且具有紧支集, 则函数

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{1}{(4\pi a^2(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-s)}} f(y, s) dy ds$$

满足:

- i) $u \in C_{x,t}^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty));$
- ii) $u_t(x, t) - a^2 \Delta u(x, t) = f(x, t), \forall x \in \mathbb{R}^n, t > 0;$
- iii) $\lim_{(x,t) \rightarrow (x^0, 0), x \in \mathbb{R}^n, t > 0} u(x, t) = 0.$

难点: 关于 y 的积分是无界区域上反常积分; 关于 s 的积分是瑕积分.

- 由于 f 有紧的支集, 上述定义 $u(x, t)$ 的含参积分中, 关于 y 的积分不是反常积分, 换元 $z = (x - y)/\sqrt{4a^2(t - s)}$ 得到关于 s 的积分也不是瑕积分:

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f(x - y, t - s) dy ds =$$

$$\pi^{-n/2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} f(x - \sqrt{4a^2(t - s)}y, t - s) dy ds.$$

由此直接用含参积分求导公式, 可得到 $u_t(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f_t(x - y, t - s) dy ds + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f(x - y, 0) dy$, 以及对 $i, j = 1, \dots, n$, $u_{x_i x_j}(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f_{x_i x_j}(x - y, t - s) dy ds$. 由含参积分的连续性, 可知 $u_t, D_x^2 u$, 以及 $u, D_x u \in C(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$. 于是

$$u_t(x, t) - a^2 \Delta u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) [(\partial_t - a^2 \Delta_x) f(x - y, t - s)] dy ds + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f(x - y, 0) dy$$

$$= \int_\tau^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) [(-\partial_s - a^2 \Delta_y) f(x - y, t - s)] dy ds + \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) [(-\partial_s - a^2 \Delta_y) f(x - y, t - s)] dy ds + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f(x - y, 0) dy \doteq I_\tau + J_\tau + K.$$

- 由于对任意 $s > 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) dy = 1$ (习题), 故
 $|J_\tau| \leq (\|f_t\|_{L^\infty} + \|D^2 f\|_{L^\infty}) \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) dy ds \leq C\tau$. 利用分部积分, 我们有

$$I_\tau = \int_\tau^t \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left[\left(\frac{\partial}{\partial s} - a^2 \Delta_y \right) \Phi(y, s) \right]}_{=0} f(x - y, t - s) dy ds + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \tau) f(x - y, t - \tau) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f(x - y, 0) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \tau) f(x - y, t - \tau) dy - K.$$
 故对 $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, 有 $u_t(x, t) - a^2 \Delta u(x, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \tau) f(x - y, t - \tau) dy = f(x, t)$. 这里最后的极限可用 $\varepsilon - \delta$ 方法证明.

● 事实上,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \tau) f(x - y, t - \tau) dy - f(x, t) \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \tau) |f(x - y, t - \tau) - f(x, t)| dy = \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2} \left| f(x - \xi \sqrt{4a^2 \tau}, t - \tau) - f(x, t) \right| d\xi \leq \\ &\leq \frac{2\|f\|_{L^\infty}}{\pi^{n/2}} \int_{|\xi| > h} e^{-|\xi|^2} d\xi + \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{|\xi| \leq h} e^{-|\xi|^2} \left| f(x - \xi \sqrt{4a^2 \tau}, t - \tau) - f(x, t) \right| d\xi. \end{aligned}$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 取定充分大的 h 使得前一项 $\leq \varepsilon/2$, 在最后一项中, 由 f 的连续性, 当 τ 充分小时 $\leq \varepsilon/2$, 得证. (也可以直接用控制收敛定理证明.)

● 注意 $|u(x, t)| \leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) |f(x - y, t - s)| dy ds \leq t \|f\|_{L^\infty} \rightarrow 0$ (当 $t \rightarrow 0+$ 时), 所以性质 iii) 成立. □

注意: 以下对自由项和解附加指数增长性条件后, 讨论 Cauchy 问题解的存在性.

- 齐次热方程 Cauchy 问题解的存在性定理 (增长条件情形): 考虑初值问题
$$\begin{cases} u_t(x, t) = a^2 \Delta u(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$
 设 $\phi(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ 且满

足 增长性条件: 存在非负常数 M, r 使得 $|\phi(x)| \leq M e^{r|x|^2}, \forall x \in \mathbb{R}^n, (\forall)$ 那么 $u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \phi(y) dy$ 是 $\mathbb{R}^n \times (0, T_0)$ 上的 C^∞ 函数, 且满足齐次热方程. 这里 $T_0 = 1/(4a^2 r)$. 进一步, 还成立 $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T_0))$ 且 $u(x, 0) = \phi(x)$. (注意: 存在时长 T_0 只和 r 有关, 与 M 无关)

- 证明: 关键点 — 变量替换得到 $u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \phi(y) dy = \pi^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x - 2ay\sqrt{t}) e^{-|y|^2} dy$ 含参量反常积分的可微性 (用前一表达式, 判定被积函数求导后反常积分是否一致收敛, 找可积优函数) + 含参量反常积分的连续性 (用后一表达式, 找可积优函数)

- 任取 $0 < T_1 < T_2 < T_0$ 及 $R > 0$, 设 $|x| \leq R, T_1 \leq t \leq T_2$. 对任意多重指标 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 记 $\partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, 那么

$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \partial^\alpha \left[\left(\frac{1}{4a^2 \pi t} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t} \right) \right] dy = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) P_\alpha \left(x - y, \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \exp \left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t} \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x - y) P_\alpha \left(y, \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \exp \left(-\frac{|y|^2}{4a^2 t} \right) dy$, 这里 $P_\alpha \left(y, \frac{1}{\sqrt{t}} \right)$ 是 y 和 $1/\sqrt{t}$ 的多项式, 次数和系数都只与 α 和 n 有关. 记 $|P_\alpha|$ 为 $|y|, 1/\sqrt{t}$ 的多项式, 其系数为 P_α 中相应系数的绝对值, 而且将 P_α 中的形如 y^β 的因子用 $|y|^{|\beta|}$ 取代. 于是, 成立 $\left| \phi(x - y) P_\alpha \left(y, \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \exp \left(-\frac{|y|^2}{4a^2 t} \right) \right| \leq M |P_\alpha| (|y|, \frac{1}{\sqrt{T_1}}) \exp \left\{ r|x - y|^2 - \frac{|y|^2}{4a^2 T_2} \right\}$. 对于任意 $\epsilon > 0$, 成立 $|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y \leq |x|^2 + |y|^2 + \epsilon |y|^2 + \frac{1}{\epsilon} |x|^2 = (1 + \epsilon) |y|^2 + (1 + \frac{1}{\epsilon}) |x|^2$, 于是, 取 $\epsilon > 0$ 充分小使得 $-\sigma \doteq r(1 + \epsilon) - \frac{1}{4a^2 T_2} < 0$, (这就是取 $T_0 = 1/(4a^2 r)$ 的原因; $r = 0$ 情形更简单, 稍修改即成立,) 则

$\left| \phi(x - y) P_\alpha \left(y, \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \exp \left(-\frac{|y|^2}{4a^2 t} \right) \right| \leq M e^{r(1 + \epsilon^{-1})|x|^2} |P_\alpha| (|y|, \frac{1}{\sqrt{T_1}}) \exp \left\{ \left(r(1 + \epsilon) - \frac{1}{4a^2 T_2} \right) |y|^2 \right\} \leq H |P_\alpha| (|y|, \frac{1}{\sqrt{T_1}}) e^{-\sigma |y|^2} \doteq h(y)$, 其中 $H = M e^{r(1 + \epsilon^{-1})|R|^2}$. 注意到 $h(y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 可知求导后含参反常积分一致收敛 $\Rightarrow u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (T_1, T_2))$.

复习: 热方程 Cauchy 问题解的比较原理

- Cauchy 问题 (b): $x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0; u_t - a^2 \Delta u = f(x, t); u(x, 0) = \phi(x)$.
- 自由项的增长性条件: 存在非负常数 M_1, r_1 使得 $|\phi(x)| \leq M_1 e^{r_1 |x|^2}, \forall x \in \mathbb{R}^n$; 存在非负常数 M_2, r_2 使得 $|f(x, t)| \leq M_2 e^{r_2 |x|^2}, \forall x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T$.
- 解的增长条件: 存在非负常数 M, r 使得 $|u(x, t)| \leq M e^{r |x|^2}, \forall x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T$.
- 比较原理: 设函数 $u(x, t) \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ 满足增长条件, 且 $u_t - a^2 \Delta u \geq 0, u(x, 0) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, t \in (0, T]$, 那么 $u(x, t) \geq 0, \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T]$.
- 推论— Cauchy 问题满足增长条件的经典解的唯一性: 设 $u(x, t) \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ 是 Cauchy 问题 $x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0; u_t - a^2 \Delta u = 0; u(x, 0) = 0$ 的经典解, 满足增长条件, 则 $u \equiv 0$.
- 推论— Cauchy 问题满足增长条件的经典解的最大模估计: 设 $u(x, t) \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ 是 Cauchy 问题 (b) 的经典解, 则对任意 $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T_0]$, 其中 $T_0 > 0$ 满足 $4a^2 T_0 \max\{r_1, r_2\} < 1$, 成立不等式
$$|u(x, t)| \leq M_1 (1 - 4r_1 a^2 t)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ \frac{r_1 |x|^2}{1 - 4r_1 a^2 t} \right\} + M_2 \int_0^t (1 - 4r_2 a^2 (t - \tau))^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ \frac{r_2 |x|^2}{1 - 4r_2 a^2 (t - \tau)} \right\} d\tau.$$
推论: 当 $r_1 = r_2 = 0$ 时, 有 $|u(x, t)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\phi(x)| + t \sup_{(x, s) \in \mathbb{R}^n \times [0, t]} |f(x, s)|, \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$.

方程和初值的验证

- 直接计算 $\Rightarrow$ Gauss 核满足热方程: $\partial_t G_t(x) - a^2 \Delta G_t(x) = 0 \Rightarrow u(x, t)$ 在 $\mathbb{R}^n \times (0, T_0]$ 上满足齐次热方程.
- 满足初值条件: 设 $\phi \in C(\mathbb{R}^n)$ 满足增长性条件, 则含参反常积分 $u(x, t) = \pi^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x - 2ay\sqrt{t}) e^{-|y|^2} dy$ 在 $\{(x, t) : |x| \leq R, 0 \leq t \leq T_1\}$ 上一致收敛, 其中 $R > 0, T_1 \in (0, 1/(8ra^2))$ 任意取定.

优函数: $\left| \phi(x - 2ay\sqrt{t}) e^{-|y|^2} \right| \leq M \exp\{r|x - 2ay\sqrt{t}|^2 - |y|^2\} \leq M \exp\{2r|x|^2 + 8a^2rt|y|^2 - |y|^2\} \leq M e^{2rR^2} \exp\{(8ra^2T_1 - 1)|y|^2\} = M e^{2rR^2} \exp\{-\sigma|y|^2\} \doteq h(y)$, 其中 $-\sigma = 8ra^2T_1 - 1 < 0$. 注意 $h(y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 就是优函数.

- 初值 $\phi \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 时整体解存在性: 由解的最大模估计, $u(x, t)$ 当 $0 \leq t \leq T_0$ 时仍连续有界, 故满足与 $(\forall)$ 类似的增长性条件 (其中取 $M = \|\phi\|_{L^\infty}$, 但 $r = 0$). 以 $u(x, T_0)$ 为初值在 $[T_0, 2T_0]$ 上求解, 以 $u(x, 2T_0)$ 为初值在 $[2T_0, 3T_0]$ 上求解 $\cdots \Rightarrow u(x, t)$ 在 $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ 上有定义且满足齐次热方程. (或直接利用 Poisson 公式在 $[0, \infty)$ 上的有效性.)

非齐次热方程齐次 Cauchy 问题经典解的存在性

- 非齐次热方程齐次初值问题解的存在性定理: 考虑初值问题

$$\begin{cases} v_t(x, t) = a^2 \Delta v(x, t) + f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, T \geq t \geq 0, \\ v(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

设 $f(x, t), D_x f(x, t) \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ 且满足增长性条件: 存在

非负常数 M, r 使得 $|f(x, t)| + |D_x f(x, t)| \leq M e^{r|x|^2}, \forall x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T]$,

置 $v(x, t) \doteq \int_0^t \left(\frac{1}{4a^2\pi(t-\tau)} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y, \tau) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}} dy d\tau = \pi^{-\frac{n}{2}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(x - 2ay\sqrt{t-\tau}, \tau) e^{-|y|^2} dy d\tau$, 那么

$v_t, D_x v, D_x^2 v \in C(\mathbb{R}^n \times (0, T_0))$, 且满足非齐次热方程. 这里 $T_0 = \min\{1/(8a^2r), T\}$. 此外, 还成立

$v \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T_0])$ 且 $v(x, 0) = 0$.

- $v \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T_0])$ 且 $v(x, 0) = 0$ 的证明与前面类似. (利用

$|f(x - 2ay\sqrt{t-\tau}, \tau)| e^{-|y|^2} \leq M e^{2r|x|^2} e^{(8a^2r(t-\tau)-1)|y|^2}$, 而 $8a^2r(t-\tau) - 1 \leq 8a^2rt - 1 < 8a^2rT_0 - 1 < 0$, 用 Lebesgue 控制收敛定理.)

- 可微性的关键点: 对 Poisson 公式作参变量求导时, 利用了 Gauss 核的正则性; 但这里积分核带有奇性因子 $(1/\sqrt{t-\tau})^n$, 不能用第一个表达式. 如果要用第二个表达式, 就必须要求 $f(x, t)$ 关于 x 连续可导, 先把一阶导数转化到 f 上, 再利用 $f(x - 2ay\sqrt{t-\tau}, \tau)$ 中 x 与 y 的对称性, 利用分部积分转化到 $e^{-|y|^2}$ 上.

- $v(x, t) = \pi^{-\frac{n}{2}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(x - 2ay\sqrt{t-\tau}, \tau) e^{-|y|^2} dy d\tau$ 形式上用 (变积分限) 含参积分求导公式, 得到
 - $\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = f(x, t) - \int_0^t \frac{a d\tau}{\pi^{\frac{n}{2}} \sqrt{t-\tau}} \int_{\mathbb{R}^n} \langle D_x f(x - 2ay\sqrt{t-\tau}, \tau), y \rangle e^{-|y|^2} dy;$
 - $\frac{\partial v}{\partial x_j}(x, t) = \pi^{-\frac{n}{2}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x - 2ay\sqrt{t-\tau}, \tau) e^{-|y|^2} dy d\tau \xrightarrow{\text{分部积分}} = -\frac{\pi^{-\frac{n}{2}}}{2a} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial y_j} f(x - 2ay\sqrt{t-\tau}, \tau) e^{-|y|^2} dy d\tau$
 $= -\int_0^t \frac{d\tau}{a\pi^{\frac{n}{2}} \sqrt{t-\tau}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - 2ay\sqrt{t-\tau}, \tau) y_j e^{-|y|^2} dy, \quad j = 1, \dots, n;$
 - $\frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_k}(x, t) = -\int_0^t \frac{d\tau}{a\pi^{\frac{n}{2}} \sqrt{t-\tau}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x - 2ay\sqrt{t-\tau}, \tau) y_j e^{-|y|^2} dy, \quad j, k = 1, \dots, n;$
 (如果再作分部积分, 将会出现不收敛的瑕积分 $\int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau}$. 所以不能把 f 关于 x 的导数都搬到 $e^{-|y|^2}$ 上去.)
 - 利用增长条件, 不难验证上述形式计算式最右边的表达式都是收敛的积分;
 - 由第一式和第三式右端, 直接看出, 如果能证明上述式子, 就有 $v_t - a^2 \Delta v = f$.
- 证明 $\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = f(x, t) - \int_0^t \frac{a d\tau}{\pi^{\frac{n}{2}} \sqrt{t-\tau}} \int_{\mathbb{R}^n} \langle D_x f(x - 2ay\sqrt{t-\tau}, \tau), y \rangle e^{-|y|^2} dy$. (第二、三式证明的思路类似, 但细节较为复杂, 略去)
 - 取定 $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T_0/2]$, 给出证明. 然后利用最大模估计, 延拓到 $(T_0/2, T_0]$, $[T_0, \frac{3}{2}T_0], \dots$
 - 取 $h \neq 0$ 充分小, 则 $\frac{v(x, t+h) - v(x, t)}{h} = I_1 + I_2$, 其中 (按 $h > 0$ 的情形来写; 对于 $h < 0$, 为保证开方有意义, 要适当修改) $I_1 = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \frac{d\tau}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - 2ay\sqrt{t+h-\tau}, \tau) e^{-|y|^2} dy; I_2 = \int_0^t \frac{d\tau}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{h} [f(x - 2ay\sqrt{t+h-\tau}, \tau) - f(x - 2ay\sqrt{t-\tau}, \tau)] e^{-|y|^2} dy$
 - 目的: 证明 $\lim_{h \rightarrow 0} I_1 = f(x, t), \lim_{h \rightarrow 0} I_2 = -\pi^{-\frac{n}{2}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \langle D_x f(x - 2ay\sqrt{t-\tau}, \tau), \frac{ay}{\sqrt{t-\tau}} \rangle e^{-|y|^2} dy d\tau$.
- 当 $f(x, t)$ 有界时 (即 $r = 0$), 利用 Cauchy 问题解的最大模估计, 可延拓解的存在范围到 $t \in [0, \infty)$.

● 关于 I_1 : 变量替换

$$s = t + h - \tau \Rightarrow I_1 \doteq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \frac{d\tau}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - 2ay\sqrt{t+h-\tau}, \tau) e^{-|y|^2} dy = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{d\tau}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - 2ay\sqrt{s}, t+h-s) e^{-|y|^2} dy.$$

置 $g(x, t; h, s) \doteq \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - 2ay\sqrt{s}, t+h-s) e^{-|y|^2} dy$, 其中 $s \in [0, h]$ (注意 $h > 0$ 的假设). 对固定的 (x, t) , 找控制函数 $|f(x - 2ay\sqrt{s}, t+h-s) e^{-|y|^2}| \leq M e^{2r|x|^2} e^{(8a^2rs-1)|y|^2}$, 而当 $0 < s < T_0 \leq 1/(8a^2r)$ 时后者可积, 且对固定的 x, y, t , 当 $h \rightarrow 0$ (从而 $s \rightarrow 0$) 时 $f(x - 2ay\sqrt{s}, t+h-s) e^{-|y|^2} \rightarrow f(x, t) e^{-|y|^2}$, 由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(x, t; h, s) = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) e^{-|y|^2} dy = f(x, t). \text{ 于是利用极限的 } \varepsilon - \delta \text{ 语言, 可知}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} I_1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h g(x, t; h, s) ds = f(x, t).$$

● 关于 I_2 : Lagrange 中值定理 $\Rightarrow I_2 \doteq \int_0^t \frac{d\tau}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{h} \left[f(x - 2ay\sqrt{t+h-\tau}, \tau) - f(x - 2ay\sqrt{t-\tau}, \tau) \right] e^{-|y|^2} dy =$

$\pi^{-\frac{n}{2}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle D_x f(x - 2ay\sqrt{t+\theta h-\tau}, \tau), -\frac{ay}{\sqrt{t+\theta h-\tau}} \right\rangle e^{-|y|^2} dy d\tau$ (注意 $\theta \in (0, 1)$, $h > 0$, 所以对 $\tau \in [0, t]$ 作积分时, 被积表达式有意义). 显然对固定的 (x, y, t, τ) , 当 $h \rightarrow 0$ 时被积函数

$\left\langle D_x f(x - 2ay\sqrt{t+\theta h-\tau}, \tau), -\frac{ay}{\sqrt{t+\theta h-\tau}} \right\rangle e^{-|y|^2} \rightarrow -\left\langle D_x f(x - 2ay\sqrt{t-\tau}, \tau), \frac{ay}{\sqrt{t-\tau}} \right\rangle e^{-|y|^2}$. 再看控制函数, 由增长性条件,

$$\left| \left\langle D_x f(x - 2ay\sqrt{t+\theta h-\tau}, \tau), -\frac{ay}{\sqrt{t+\theta h-\tau}} \right\rangle e^{-|y|^2} \right| \leq M e^{2r|x|^2 + (8ra^2t-1)|y|^2} \frac{|y|}{\sqrt{t-\tau}} \leq C_{x,t,r,a,M} e^{-\sigma|y|^2} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}$$

关于 $(y, \tau) \in \mathbb{R}^n \times [0, t]$ 可积, 其中 $\sigma > 0$. 从而由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\lim_{h \rightarrow 0} I_2 = -\pi^{-\frac{n}{2}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle D_x f(x - 2ay\sqrt{t-\tau}, \tau), \frac{ay}{\sqrt{t-\tau}} \right\rangle e^{-|y|^2} dy d\tau.$$

● $h < 0$ 情形的验证: 习题.

热方程 Cauchy 问题经典解的存在性: 增长条件情形

- 定解问题 (♡):
$$\begin{cases} u_t(x, t) = a^2 \Delta u(x, t) + f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, T \geq t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$
- 定义 (经典解): 设函数 $u(x, t) \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T))$ 具有如下性质: i) 正则性: $u_t(x, t), Du(x, t), D^2u(x, t) \in C(\mathbb{R}^n \times (0, T))$; ii) 在 $\mathbb{R}^n \times (0, T)$ 上满足 (♡) 中的方程; iii) $u(x, 0) = \phi(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$, 就称 u 是定解问题 (♡) 的一个 **经典解**.
- 解的存在性定理: 设初值 $\phi(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ 满足 **增长性条件: 存在非负常数 M, r 使得 $|\phi(x)| \leq Me^{r|x|^2}$** , 自由项 $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T))$ 满足 $D_x f(x, t) \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T))$, 以及 **增长性条件: 存在非负常数 M, r 使得 $|f(x, t)| + |D_x f(x, t)| \leq Me^{r|x|^2}, \forall x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T)$** , 则定解问题 (♡) 在存在唯一的满足增长性条件的经典解 $u(x, t)$, 其中 $x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T_0 \doteq \min\{1/(8a^2r), T\}$. (如果 $r = 0$, 则 $T_0 = T$.)

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \phi(y) dy + \int_0^t \frac{1}{(4\pi a^2 (t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 (t-s)}} f(y, s) dy ds.$$

例 (解的衰减): 对初值问题 $\begin{cases} u_t(x, t) = a^2 \Delta u(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$ 设 $\phi(x) \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 证明:

$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = O(t^{-\frac{n}{2}}), \quad (t \rightarrow \infty).$

证明: 根据 Poisson 公式, $|u(x, t)| = \left| \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} dy \right| \leq \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(y)| dy = \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} (4\pi a^2 t)^{-\frac{n}{2}}.$

习题 1. 证明: Gauss 核 $\Phi(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & (x \in \mathbb{R}^n, t > 0), \\ 0, & (x \in \mathbb{R}^n, t < 0) \end{cases}$ 满足: 对任意 $t > 0$, 成立 $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1.$

Black-Scholes 期权定价公式

- 问题: 在 $0 \leq S < \infty$, $0 \leq t \leq T$ 上求解定解问题: (请复习第六讲, 了解建模过程. 这里 σ, r, K 都是常数.)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad V|_{t=T} = \begin{cases} (S-K)^+, & \text{(看涨期权)} \\ (K-S)^+, & \text{(看跌期权)} \end{cases} \quad V|_{S=0} = \begin{cases} 0, & \text{(看涨期权)} \\ K, & \text{(看跌期权)} \end{cases}$$

- 第一步: 自变量代换. 置 $x \doteq \ln S$, $\tau \doteq T-t$, 原问题化为如下常系数抛物型方程的 Cauchy 问题: (注意, 记号 $u(x)^+ \doteq \max\{u(x), 0\}$)

$$(\diamond) \quad \frac{\partial V}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial V}{\partial x} + rV = 0, \quad V|_{\tau=0} = \begin{cases} (e^x - K)^+, & \text{(看涨期权)} \\ (K - e^x)^+, & \text{(看跌期权)} \end{cases}$$

- 第二步: 未知函数变换. 置 $V \doteq ue^{\alpha\tau + \beta x}$, 选取适当的 α 和 β , 使得上述方程转化为热传导方程. 由于

$$V_\tau = e^{\alpha\tau + \beta x} [u_\tau + \alpha u], \quad V_x = e^{\alpha\tau + \beta x} [u_x + \beta u], \quad V_{xx} = e^{\alpha\tau + \beta x} [u_{xx} + 2\beta u_x + \beta^2 u], \text{ 代入 } (\diamond) \Rightarrow$$

$$u_\tau - \frac{\sigma^2}{2} u_{xx} - \left[\beta\sigma^2 + r - \frac{\sigma^2}{2}\right] u_x + \left[r - \beta\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \frac{\sigma^2}{2}\beta^2 + \alpha\right] u = 0. \text{ 为了让 } \beta\sigma^2 + r - \frac{\sigma^2}{2} = 0, \text{ 要取 } \beta = \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}. \text{ 为了让 } u \text{ 的系数为 } 0, \text{ 需}$$

$$\text{要 } \alpha = -r + \beta\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{\sigma^2}{2}\beta^2 = -r - \frac{1}{2\sigma^2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.} \text{ 初值变为 (以看涨期权为例)}$$

$$\boxed{u|_{\tau=0} = e^{-\beta x} V|_{\tau=0} = e^{-\beta x} (e^x - K)^+ \triangleq \varphi(x).}$$

- 第三步: Poisson 公式 $\Rightarrow u(x, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2\tau}} \left[e^{-\beta\xi} (e^\xi - K)^+\right] d\xi = \int_{\ln K}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2\tau}} \left[e^{(1-\beta)\xi} - Ke^{-\beta\xi}\right] d\xi$, 其中 $\beta = -\frac{1}{\sigma^2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)$.

● 第四步: 回到原未知量. $V(x, \tau) = e^{-r\tau - \frac{1}{2\sigma^2}(r - \frac{\sigma^2}{2})^2\tau - \frac{1}{\sigma^2}(r - \frac{\sigma^2}{2})x} u(x, \tau) \doteq I_1 + I_2,$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{\ln K}^{+\infty} \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma\tau} + \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2} \right) \xi - r\tau - \frac{\tau+2x}{2\sigma^2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] d\xi \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{\ln K}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma\tau} + \frac{\tau(\sigma^2+2r)\xi}{2\sigma^2\tau} - \frac{2\sigma^2\tau^2r}{2\sigma^2\tau} - \frac{\left[\tau \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2}{2\sigma^2\tau} - \frac{\tau(2r - \sigma^2)x}{2\sigma^2\tau} \right\} d\xi \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{\ln K}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma\tau} + \frac{(\sigma^2+2r)\tau(\xi-x)}{2\sigma^2\tau} + x - \frac{\left[\tau \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2}{2\sigma^2\tau} \right\} d\xi \\
 &= \frac{e^x}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{\ln K}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{\left[x - \xi + \tau \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2}{2\sigma^2\tau} \right\} d\xi = \frac{e^x}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{x - \ln K + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{\sqrt{\tau}\sigma} \right)^2} d\eta \quad \left(\text{令 } \eta \doteq x - \xi + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right)
 \end{aligned}$$

● 记 $N(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds$ 为标准正态分布的概率分布函数, 则 $I_1 = e^x N \left(\frac{x - \ln K + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right)$. 同理 $I_2 = -Ke^{-r\tau} N \left(\frac{x - \ln K + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right)$.

● 第五步: 回到原自变量 (S, t) , 则 $V(S, t) = SN \left(\frac{\ln S - \ln K + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) - Ke^{-r(T-t)} N \left(\frac{\ln S - \ln K + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)$. (Black-Scholes 期权定价公式)

阅读任务和作业

- 必读 — 郇中丹, 黄海洋: 偏微分方程 (第二版), 高等教育出版社, 2013. [pp. 95-104; pp. 170-177]
- 作业 — p.105: 4, 5; p.175: 4, 8; p.177: 2.
- 参考文献

[1] Stein, Elias M.; Shakarchi, Rami. Fourier analysis. An introduction. Princeton Lectures in Analysis, 1. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. (Fourier 变换, 第五章)

[2] Holden, Helge; Karlsen, Kenneth H.; Lie, Knut-Andreas; Risebro, Nils Henrik. Splitting methods for partial differential equations with rough solutions. Analysis and MATLAB programs. EMS Series of Lectures in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2010. (算子分裂法)

[3] Lax, Peter D. Functional Analysis. John Wiley & Sons, 2002.

[4] Tao, Terence. An Epsilon of Room, I: Real Analysis. Graduate Studies in Mathematics, vol. 117. American Mathematical Society, 2010.

[5] Evans, Lawrence C. Partial differential equations. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

最后更新: 2022-12-2

偏微分方程

第十七讲 弦振动方程的定解问题

袁海荣 (华东师范大学 数学科学学院)

2022 年 12 月 15 日

正如积分线性偏微分方程的最有成效的方法并非靠发展这个问题中的一般概念,而是从处理特殊的物理问题得出的,所以看来非线性偏微分方程理论也最好是通过对于一个特殊的物理问题作深入的、考虑到所有附加条件的处理来得到,而且实际上,一个特殊问题的求解,它构成本文的对象,需要新的方法和观念,它们也很可能在普遍的问题中发挥作用.

—《论有限振幅平面空气波的传播》(1860 年发表)

—黎曼 (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826 年 9 月 20 日—1866 年 7 月 20 日)



传记: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Riemann/>

学习要点

- 熟练掌握一维波动方程的通解, 会应用通解求解 Cauchy 问题、半有界弦初边值问题、中心球面波、Goursat 问题等典型问题
- 理解行波的概念、波的相互作用及其物理意义
- 熟练掌握一维波动方程的有限传播速度性质
- 熟练掌握齐次化原理

一维齐次波动方程的 Cauchy 问题: d'Alembert 公式

- 典型问题 — 区域: $-\infty < x < +\infty, t > 0$; 方程: $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$; 初值条件: $u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x)$.
- 复习 — 特征线方法: 只依赖于两个自变量 (x, y) 的二阶线性 PDE

$$a_{11}(x, y)u_{xx}(x, y) + 2a_{12}(x, y)u_{xy}(x, y) + a_{22}(x, y)u_{yy}(x, y) + b_1(x, y)u_x(x, y) + b_2(x, y)u_y(x, y) + c(x, y)u(x, y) = f(x, y).$$

- 特征方程: $a_{11}(x, y)dy^2 - 2a_{12}(x, y)dx dy + a_{22}(x, y)dx^2 = 0$.
- 双曲型方程: $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0 \Rightarrow$ 特征方程有两个独立的首次积分 $\lambda(x, y), \mu(x, y)$.
- 特征曲线: 固定 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 称平面曲线 $\lambda(x, y) = c_1$ 和 $\mu(x, y) = c_2$ 为上述 PDE 的特征线.
- 标准形: 通过自变量的变换 $\xi = \lambda(x, y), \eta = \mu(x, y)$, 可将上述 PDE 化为标准形 $2u_{\xi\eta} + \text{低阶项} = \hat{g}(\xi, \eta)$.

- 一维波动方程的特征线 — 第一族: $\xi = x - at$; 第二族: $\eta = x + at$. 标准形: $u_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$.
- $\Rightarrow u(x, t) = F(x - at) + G(x + at)$ (物理意义: 右行和左行行波 (travelling wave); $a > 0$ – 波速; F, G – 波形).

- 寻找 F, G 满足初始条

$$\text{件} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(s) \, ds + \frac{c}{2a}, \quad G(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(s) \, ds - \frac{c}{2a}$$

$$\Rightarrow \text{d'Alembert 公式} \quad u(x, t) = \frac{\phi(x - at) + \phi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) \, ds.$$

一维非齐次波动方程的 Cauchy 问题: 齐次化原理

- 典型问题 (♣) — 区域: $-\infty < x < \infty, t > 0$; 方程: $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t)$; 初值条件: $u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x)$.
- 叠加原理: $u = v + w$
 - 问题 I: — 区域: $-\infty < x < \infty, t > 0$; 方程: $v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x, t)$; 初值条件: $v(x, 0) = 0, v_t(x, 0) = 0$.
 - 齐次化原理 — 无限叠加: $\forall \tau \geq 0$, 求解函数 $v(x, t; \tau)$ 满足问题 I': — 区域: $-\infty < x < \infty, t > \tau$; 方程: $v_{tt}(x, t; \tau) - a^2 v_{xx}(x, t; \tau) = 0$; 初值条件: $v(x, \tau; \tau) = 0, v_t(x, \tau; \tau) = f(x, \tau)$.

$$v(x, t) = \int_0^t v(x, t; \tau) d\tau$$

- $v(x, t; \tau)$ 的求解: 置 $t' = t - \tau \Rightarrow$ 求解函数 $\tilde{v}(x, t'; \tau) \doteq v(x, t' + \tau; \tau)$ 满足问题 — 区域: $-\infty < x < \infty, t' > 0$; 方程: $\tilde{v}_{t't'}(x, t'; \tau) - a^2 \tilde{v}_{xx}(x, t'; \tau) = 0$; 初值条件: $\tilde{v}(x, 0; \tau) = 0, \tilde{v}_{t'}(x, 0; \tau) = f(x, \tau)$.

d'Alembert 公

$$\text{式} \Rightarrow \tilde{v}(x, t'; \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-at'}^{x+at'} f(s, \tau) ds \Rightarrow v(x, t; \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds.$$

- $$v(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau = \frac{1}{2a} \iint_{G(x,t)} f(s, \tau) ds d\tau.$$

$G_{(x,t)} \doteq \{(s, \tau) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \tau \leq t; x + a(\tau - t) \leq s \leq x - a(\tau - t)\}$ 是 (s, τ) 平面上以 (x, t) 为顶点, s 轴上区间 $[x - at, x + at]$ 为底边的实心三角形区域.

- 问题 II: — 区域: $-\infty < x < \infty, t > 0$; 方程: $w_{tt} - a^2 w_{xx} = 0$; 初值条件:
 $w(x, 0) = \phi(x), w_t(x, 0) = \psi(x)$.
- 问题 (♣) 解的公式

$$u(x, t) = \frac{\phi(x - at) + \phi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) \, ds + \frac{1}{2a} \iint_{G(x,t)} f(s, \tau) \, ds d\tau.$$

一维波动方程 Cauchy 问题的适定性: 连续函数空间

- 典型问题 (♣) — 区域: $-\infty < x < \infty, t > 0$; 方程: $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t)$; 初值条件: $u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x)$.

解的公式

$$u(x, t) = \frac{\phi(x - at) + \phi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) \, ds + \frac{1}{2a} \iint_{G(x,t)} f(s, \tau) \, ds d\tau$$

- 存在性: 设 $\phi \in C^2(\mathbb{R}), \psi \in C^1(\mathbb{R}), f \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$, 则上式定义的函数 $u(x, t) \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ 是问题 (♣) 的经典解.
证明: 直接用含参变量积分的连续性和求导公式.

- **唯一性:** 设 u 是经典解, 用特征线法得到必有 $u \equiv 0$.

$$(\partial_t - a\partial_x)(\partial_t + a\partial_x)u = 0 \Rightarrow \begin{cases} (\partial_t - a\partial_x)v = 0, \\ (\partial_t + a\partial_x)u = v. \end{cases} \quad \text{零初始条件}$$

$$u(x, 0) = 0, \ u_t(x, 0) = 0 \Rightarrow v(x, 0) \equiv 0 \xrightarrow[\text{用一阶 PDE 的特征线方法}]{\text{对第一个方程}} v(x, t) \equiv$$

$$0 \xrightarrow[\text{对第二个方程用一阶 PDE 的特征线方法}]{u(x,0)=0} u(x, t) \equiv 0.$$

- **C^2 空间中的稳定性:** 给定 $T > 0$. 设 $k \rightarrow \infty$ 时, 在 $C^2(\mathbb{R})$ 中 $\phi_k \rightarrow \phi$, 在 $C^1(\mathbb{R})$ 中 $\psi_k \rightarrow \psi$, 在 $C^1(\mathbb{R} \times [0, T])$ 中 $f_k \rightarrow f$. 记 u_k 为问题 (♣) 中自由项分别为 ϕ_k, ψ_k, f_k 的解. 那么在 $C^2(\mathbb{R} \times [0, T])$ 中 $u_k \rightarrow u$.
证明: 用定积分与一致收敛连续函数列极限换序定理.

有限传播速度: 依赖区域、影响区域、决定区域

- 典型问题 (♣) — 区域: $-\infty < x < \infty, t > 0$; 方程: $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t)$; 初值条件: $u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x)$.

解的公式

$$u(x, t) = \frac{\phi(x - at) + \phi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds + \frac{1}{2a} \iint_{G(x,t)} f(s, \tau) ds d\tau$$

- 依赖区域: 给定时空点 (x_0, t_0) , (其中 $t_0 > 0$), x 轴上区间 $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ 称为 (x_0, t_0) 对初值的依赖区域.
- 决定区域: 设 $[c, d]$ 是 x 轴上的一个区间, xOt 平面上的区域 $\{(x, t) : c + at \leq x \leq d - at, 0 \leq t \leq \frac{d-c}{2a}\}$ 称为区间 $[c, d]$ 的决定区域.
- 影响区域: 设 $[c, d]$ 是 x 轴上的一个区间, xOt 平面上的区域 $\{(x, t) : c - at \leq x \leq d + at, 0 \leq t\}$ 称为区间 $[c, d]$ 的影响区域.

- 有限传播速度 — 双曲型方程的本质特点: $x + at = c$ — 过点 $(c, 0)$ 的第一族特征线; $x - at = c$ — 过点 $(c, 0)$ 的第二族特征线; $a > 0$ — 波速
 - 波动方程的解具有局部特性
 - 在数值计算、能量积分、适定性分析中有本质性的应用 (例如, 有限差分格式的 Courant-Friedrichs-Lewy 条件)

半直线上一维波动方程的初边值问题: 波的反射

- 带齐次 Dirichlet 边界条件的半直线上一维波动方程的初边值问题 (♠) — 区域: $0 < x < \infty, t > 0$; 方程: $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$; 边值条件: $u(0, t) = 0$; 初值条件: $u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x)$.
- 相容性条件: 零阶 — $\phi(0) = 0$, 保证解连续; 一阶 — $\psi(0) = 0$, 保证解连续可导; 二阶 — $\phi''(0) = 0$, 保证解二阶连续可导.
- 延拓法 (源像法).
 - 将 ϕ 和 ψ 关于 $x = 0$ 作奇延拓得到 $\mathbb{R}$ 上的奇函数 Φ 和 Ψ .
 - 考虑 Cauchy 问题 — 区域: $-\infty < x < \infty, t > 0$; 方程: $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$; 初值条件: $u(x, 0) = \Phi(x), u_t(x, 0) = \Psi(x)$.

- d'Alembert 公式 $\Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2}[\Phi(x - at) + \Phi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(s) ds =$
$$\begin{cases} \frac{1}{2}[\phi(x - at) + \phi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds, & x > at; \text{ (由初值确定的右行波区域)} \\ \frac{1}{2}[\phi(x + at) - \phi(at - x)] + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} \psi(s) ds, & 0 \leq x \leq at \text{ (左行波与反射波相互作用区域)}. \end{cases}$$

思考: 对应的依赖区域、决定区域和影响区域如何确定?

- 定理: 若 $\phi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$ 且满足零阶、一阶、二阶相容性条件, 则上式给出了问题 (♠) 的经典解.

球面波

- 三维波动方程的径向对称初值问题 (♡):

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, & t > 0, \quad r = |x|, \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} = \varphi(r), \quad u_t|_{t=0} = \psi(r). \end{cases}$$

- 球对称解: $u = u(r, t)$.

- 在 $\mathbb{R}^3$ 的球坐标下, 三维波动方程的球对称解满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad \text{置 } u(r, t) = e^{\alpha(r)} v(r, t), \text{ 其中 } \alpha(r) \text{ 是待定函数. 那}$$

么 v 满足方程 $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \left[2\alpha'(r) + \frac{2}{r} \right] \frac{\partial v}{\partial r} + \left[\alpha''(r) + \alpha'(r)^2 + \frac{2}{r} \alpha'(r) \right] v \right\}.$

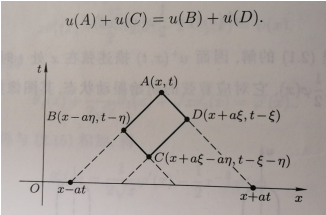
当 $\alpha(r) = -\ln r$, 即 $v = ru$ 时可得一维波动方程 $v_{tt} = a^2 v_{rr}$. 设 u 有界, 则得到边界条件 $v(0, t) = 0$, 初值条件: $v(r, 0) = r\varphi(r)$, $v_t(r, 0) = r\psi(r)$.

- $u(r, t) = \frac{1}{r}[f(r - at) + g(r + at)]$. 发散波: $f(r - at)$; 汇聚波: $g(r + at)$; $\frac{1}{r}$: 波形的衰减 ($r > 1$) 或扩张 ($r < 1$) 因子.
- 问题 ♡ 的公式:

$$u(r, t) = \begin{cases} \frac{1}{2r}[(r + at)\varphi(r + at) + (r - at)\varphi(r - at)] + \frac{1}{2ar} \int_{r-at}^{r+at} \xi \psi(\xi) d\xi, & t \leq \frac{r}{a}, \\ \frac{1}{2r}[(r + at)\varphi(r + at) - (at - r)\varphi(at - r)] + \frac{1}{2ar} \int_{at-r}^{r+at} \xi \psi(\xi) d\xi, & t > \frac{r}{a}. \end{cases}$$

Goursat 问题

- Goursat 问题: 特征线上给定边值 —
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \\ u|_{x-at=0} = \phi(x), \quad u|_{x+at=0} = \psi(x), \quad \phi(0) = \psi(0). \end{cases}$$
- 用通解法: 将定解条件代入一维波动方程的通解 $u(x, t) = F(x - at) + G(x + at)$, 由 $u|_{x-at=0} = F(0) + G(2x) = \phi(x), u|_{x+at=0} = F(2x) + G(0) = \psi(x)$, 可知 $F(x) = \psi(\frac{x}{2}) - G(0)$, $G(x) = \phi(\frac{x}{2}) - F(0)$. 特别地, $F(0) + G(0) = \frac{1}{2}[\phi(0) + \psi(0)]$. 于是
$$u(x, t) = \phi(\frac{x+at}{2}) + \psi(\frac{x-at}{2}) - \phi(0).$$
- 用一维齐次波动方程解的平行四边形法则 (d'Alembert 公式的几何意义): 对任何以四条特征线为边的平行四边形, 解 u 在对顶点值的和相等, 即 $u(x, t) + u(x + a\xi - a\eta, t - \xi - \eta) = u(x + a\xi, t - \xi) + u(x - a\eta, t - \eta)$.
 - (ξ, η) 特征坐标下直接证明
 - 用 d'Alembert 公式
 - 在特征四边形内对波动方程用散度定理



Riemann 问题

- Riemann 问题 — 初值是分片常数的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_-, & x < 0, \\ u_+, & x > 0, \end{cases} & u_t(x, 0) = \begin{cases} v_-, & x < 0, \\ v_+, & x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

这里 $u_{\pm}$ 和 $v_{\pm}$ 都是常数.

$$\bullet \text{ d'Alembert 公式 } \Rightarrow u(x, t) = \begin{cases} u_- + v_- t, & \text{if } x < -at, \\ \frac{u_+ + u_-}{2} + \frac{(v_+ - v_-)x}{2a} + \frac{(v_+ + v_-)t}{2}, & \text{if } -at < x < at \\ u_+ + v_+ t, & \text{if } x > at. \end{cases}$$

- 置 $u = w_t, v = -w_x$, 将一维波动方程 $w_{tt} - a^2 w_{xx} = 0$ 转化为一阶双曲组 (以下方法适用于非线性问题)

- 守恒律形式: $\boxed{u_t + a^2 v_x = 0, \quad v_t + u_x = 0}$; 特征值: $\lambda = \pm a$.

- 特征形式: $\begin{cases} (u_t - au_x) - a(v_t - av_x) = 0, \\ (u_t + au_x) + a(v_t + av_x) = 0. \end{cases}$ Riemann 不变量: $r_1 \doteq u - av, r_2 \doteq u + av$.

- 对角化形式: $\frac{\partial r_1}{\partial t} - a \frac{\partial r_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r_2}{\partial t} + a \frac{\partial r_2}{\partial x} = 0.$ r_1 沿特征线 $x + at = c$ 是常数 $\Rightarrow r_1 = f(x + at); r_2$ 沿特征线 $x - at = c$ 是常数

$$\Rightarrow r_2 = g(x - at)$$

Darboux 问题

例: 求解 Darboux 问题
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < t, \\ u|_{x=0} = \phi(t), & t \geq 0, \\ u|_{x=t} = \psi(t), & t \geq 0, \end{cases}$$
 其中 $\phi(0) = \psi(0)$. 如果 ϕ 和 ψ 都只在 $[0, a]$ 上有定义, 指出此定

解条件的决定区域.

解. 利用通解表达式, 不难算得 $u(x, t) = \psi(\frac{x+t}{2}) - \psi(\frac{t-x}{2}) + \phi(t-x)$.

决定区域: 由直线 $x = 0, x = t, x + t = 2a, x = t - a$ 围成的四边形.

要点: 画图, 对特征线和有限传播速度的准确把握; 波的结构.

波的干涉

习题 1. 求解如下初值问题:
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = \phi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \end{cases}$$

其中 $\phi(x) = \begin{cases} u_l, & \text{if } x < -1, \\ u_m, & \text{if } -1 < x < 1, \\ u_r, & \text{if } x > 1, \end{cases}$ $\psi(x) = \begin{cases} v_l, & \text{if } x < -1, \\ v_m, & \text{if } -1 < x < 1, \\ v_r, & \text{if } x > 1, \end{cases}$ 而 $u_l, u_m, u_r, v_l, v_m, v_r$ 都是常数.

习题 2. 求解
$$\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} + \cos x = 0, & y > 0, -\infty < x < +\infty, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = 4x. \end{cases}$$

习题 3. 求解
$$\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0, \\ u(x, 0) = 3x^2, \quad u_y(x, 0) = 0. \end{cases}$$

阅读任务和作业

- 必读 — 郇中丹, 黄海洋: 偏微分方程 (第二版), 高等教育出版社, 2013. [pp. 120-129]
- 作业 — p.123: 3, 4, 6; p.128: 6, 7.
- 参考文献

[1] 朱长江, 阮立志: 偏微分方程简明教程. 高等教育出版社, 2015.

[2] 黎曼: 论有限振幅平面空气波的传播. 黎曼全集 (第一卷), 中文版. 李培廉 译. 高等教育出版社, 2016. [第 137-159 页. 详细的中文解读见我的讲义: <http://math.ecnu.edu.cn/~hryuan/conservationlaw.pdf>]

最后更新: 2022-11-21

偏微分方程

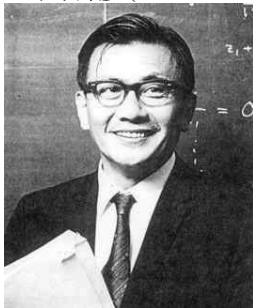
第十八讲 高维波动方程的 Cauchy 问题

袁海荣 (华东师范大学 数学科学学院)

2022 年 12 月 20 日

……有时候反复阅读证明过程也难解其意, 这种情况下, 我便会尝试在笔记本中抄写这些数学证明. 在抄写过程中, 我会发现证明中有些地方不尽如人意, 于是转而寻求是否存在更好的证明方法. 如果能顺利找到还好, 若一时难以觅得, 则多会陷入苦思, 至无路可走、油尽灯枯才会作罢. 按照这种方法, 读至一章末尾, 已是月余, 开篇的内容则早被忘到九霄云外. 没办法, 只好折返回去从头来过. 之后, 我又注意到书中整个章节的排列顺序不甚合理. 比如, 我会考虑将定理七的证明置于定理三的证明之前的话, 是否更加合适. 于是我又开始撰写调整章节顺序的笔记. 完成这项工作后, 我才有真正掌握第一章的感觉, 终于松了一口气, 同时又因太耗费精力而心生烦忧. ……

— 小平邦彦 (Kunihiko Kodaira, 1915 年 3 月 16 日—1997 年 7 月 26 日)



传记: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kodaira/>

学习要点

- 掌握用球平均函数求解 Euler-Poisson-Darboux 方程初值问题的计算
- 掌握三维和二维波动方程 Cauchy 问题解的 Poisson 公式和 Kirchhoff 公式
- 理解 Huygens 原理和波的弥散现象, 熟练掌握依赖区域、决定区域、影响区域的概念
- 熟练掌握用方程和初值条件的具体特点以及公式计算解

线性初值问题的分解

- 定理: 设 $Lu \doteq \sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha(x) D_x^\alpha u$. 如果 $w(x, t)$ 是初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^m w}{\partial t^m} + Lw = 0, & t > 0, \\ \frac{\partial^j w}{\partial t^j}(x, 0) = 0, & j = 0, 1, \dots, m-2, \\ \frac{\partial^{m-1} w}{\partial t^{m-1}}(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

的光滑解, 则 $u(x, t) \doteq \frac{\partial^{m-1-k} w}{\partial t^{m-1-k}}(x, t)$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$) 是初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^m u}{\partial t^m} + Lu = 0, & t > 0, \\ \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(x, 0) = 0, & j \in \{0, 1, \dots, m-1\} \setminus \{k\}, \\ \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

的解.

(即最高阶的初值条件才是本质的; 所有低阶的非零初值问题的解可通过对其关于 t 求导得到.)

- 证明: i) 算子 L 的系数与 t 无关 $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}L = L\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow u$ 满足方程: $\partial_t^m u + Lu = 0$.
ii) 初值条件: $\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, 0) = \frac{\partial^{m-1-k} w}{\partial t^{m-1-k}}(x, 0) = \varphi(x)$.
iii) 其它初值条件: 当 $j < k$ 时, $m - k - 1 + j < m - 1$, 从而
 $\frac{\partial^j u}{\partial t^j}(x, 0) = \frac{\partial^{m-1-k+j} w}{\partial t^{m-1-k+j}}(x, 0) = 0$. iv) 当 $j > k$ 时, $m - 1 - k + j \geq m$; 由 $j \leq m - 1$
有 $j - k - 1 \leq m - 2$, 对方程 $\partial_t^m u + Lu = 0$ 求导 $j - k - 1$ 次, 得到
 $\frac{\partial^j u}{\partial t^j}(x, 0) = \frac{\partial^{m-1-k+j} w}{\partial t^{m-1-k+j}}(x, 0) = -L \frac{\partial^{j-k-1} w}{\partial t^{j-k-1}}(x, 0) = -L0 = 0$. 证毕!
● 注意: 该定理可推广到初边值问题.

函数的球面平均与 Euler-Poisson-Darboux 方程初值问题

- 定义: 设 $g \in C(\mathbb{R}^n)$, g 的球面平均函数 定义为

$$w(x, r) = M_g(x, r) \doteq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{S_r(x)} g(y) d\sigma(y).$$

这里 $\omega_n = (2\pi)^{\frac{n}{2}}/\Gamma(n/2)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球面的面积 ($\Gamma(s)$ 是 Euler 的 Gamma 函数), $S_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = r\}$. 如果取 $\mathbb{R}^n$ 的球坐标为

$$x_1 = r \cos \theta_1, x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \cdots, x_{n-1} =$$

$$r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1}, x_n = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1},$$
 其中

$0 \leq \theta_1, \cdots, \theta_{n-2} \leq \pi, 0 \leq \theta_{n-1} < 2\pi$, 则 $S_r(x)$ 的面积元是

$$d\sigma = r^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} \sin^{n-k-1} \theta_k d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1}.$$

- 球面平均函数的性质: 设 $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$, 则 $w(x, r) = M_g(x, r) \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$, 且满足:

i) $\lim_{r \searrow 0} w(x, r) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$. (即可定义 $w(x, 0) = g(x)$.)

ii) $\frac{\partial w}{\partial r}(x, 0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

iii) (Euler-Poisson-Darboux 方程)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(x, r) + \frac{n-1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}(x, r) - \Delta w(x, r) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, r > 0.$$

- 换句话说, 将 r 视作时间变量, $w(x, r) = M_g(x, r)$ 给出了 Euler-Poisson-Darboux 方程上述初值问题的解.

- 证明: 利用 $w(x, r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} g(x + r\xi) d\sigma(\xi)$, 由含参积分求导, 可知 $g \in C^2$ 时 $w \in C^2$. i) 用 g 的连续性即可. ii) 由含参积分求导,

$$\Delta w(x, r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} \Delta g(x + r\xi) d\sigma(\xi) = \frac{1}{|S_r(x)|} \int_{S_r(x)} \Delta g(y) d\sigma(y). \text{ 另外,}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r}(x, r) = \frac{1}{|S_1(0)|} \int_{S_1(0)} Dg(x + r\xi) \cdot \xi d\sigma(\xi) = \frac{1}{|S_r(x)|} \int_{S_r(x)} Dg(y) \cdot \nu(y) d\sigma(y) = \frac{1}{|S_r(x)|} \int_{B_r(x)} \operatorname{div} Dg(y) dy = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(x)} \Delta g(y) dy. \text{ (思考: 为什么第二个等号处不直接用散度定理, 而要转化到 } S_r(x) \text{ 上的积分后才可以用散度定理?)} \text{ 于是}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r}(x, 0) = \lim_{r \searrow 0} \frac{\partial w}{\partial r}(x, r) = \lim_{r \searrow 0} \frac{r}{n} \left(\frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} \Delta g(y) dy \right) = \frac{0}{n} \Delta g(x) = 0.$$

$$\text{iii) } \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(x, r) = -\frac{n-1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} \Delta g(y) dy + \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^r \left(\int_{S_\lambda(x)} \Delta g(y) d\sigma(y) \right) d\lambda = -\frac{n-1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} \Delta g(y) dy + \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{S_r(x)} \Delta g(y) d\sigma(y) = -\frac{n-1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}(x, r) + \Delta w(x, r). \text{ 证毕.}$$

• 推论: 设 $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$, 取 $r = at$, 则函数 $v(x, t) \doteq M_g(x, at) \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, 且满足:

i) $v(x, 0) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}^n;$

ii) $\frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = 0;$

iii) $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) + \frac{n-1}{t} \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) - a^2 \Delta v(x, t) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$

- 典型问题 I: 在 $\mathbb{R}^3 \times \{t > 0\}$ 中 $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$, 且 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = g(x)$.
- 解法: 作 $v(x, t) \doteq M_g(x, at)$, 则 $v(x, 0) = g(x)$, 而
且 $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) + \frac{2}{t} \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) - a^2 \Delta v(x, t) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^3, t > 0$. 置 $u(x, t) \doteq tv(x, t)$, 那么 $u_{tt} = (tv)_{tt} = tv_{tt} + 2v_t = ta^2 \Delta v = a^2 \Delta(tv) = a^2 \Delta u$, 所以方程成立. 此外, $u(x, 0) = 0 \cdot g(x) = 0$, $u_t(x, 0) = v(x, 0) + 0 \cdot v_t(x, 0) = g(x)$. 所以

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S(x, at)} g(y) d\sigma(y)$$
 给出了问题 I 的解.

- 典型问题 II: 在 $\mathbb{R}^3 \times \{t > 0\}$ 中 $v_{tt} - a^2 \Delta v = 0$, 且 $v(x, 0) = \varphi(x)$, $v_t(x, 0) = 0$.
- 解法: 由初值问题的分解, 考虑问题: 在 $\mathbb{R}^3 \times \{t > 0\}$ 中 $w_{tt} - a^2 \Delta w = 0$, 且 $w(x, 0) = 0$, $w_t(x, 0) = \varphi(x)$. 则 $v(x, t) = \partial_t w(x, t)$ 就是问题 II 的解. 故

$$v(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S(x, at)} \varphi(y) \, d\sigma(y) \right) \quad \text{给出了问题 II 的解.}$$

- 典型问题 III: 在 $\mathbb{R}^3 \times \{t > 0\}$ 中 $h_{tt} - a^2 \Delta h = f(x, t)$, 且 $h(x, 0) = 0$, $h_t(x, 0) = 0$.
- 解法: 齐次化原理. 对参数 $\tau \geq 0$, 考虑 $h(x, t; \tau)$ 满足的定解问题 IV: 在 $\mathbb{R}^3 \times \{t > \tau\}$ 中 $h_{tt}(x, t; \tau) - a^2 \Delta h(x, t; \tau) = 0$, 且 $h(x, \tau; \tau) = 0$, $h_t(x, \tau; \tau) = f(x, \tau)$, 则 $h(x, t) = \int_0^t h(x, t; \tau) d\tau$ 是问题 III 的解.

- 对问题 IV, 置 $t' = t - \tau$, 由问题 I 的解的公式, 可得

$$h(x, t; \tau) = \frac{1}{4\pi a^2(t-\tau)} \int_{S(x, a(t-\tau))} f(y, \tau) d\sigma(y) = \frac{1}{4\pi a} \int_{S(x, a(t-\tau))} \frac{f(y, \tau)}{|x-y|} d\sigma(y) =$$

$$\frac{1}{4\pi a} \int_{S(x, a(t-\tau))} \frac{f(y, t - \frac{|x-y|}{a})}{|x-y|} d\sigma(y). \text{ 于是}$$

$$h(x, t) = \frac{1}{4\pi a} \int_0^t \int_{S(x, a(t-\tau))} \frac{f(y, t - \frac{|x-y|}{a})}{|x-y|} d\sigma(y) d\tau \xrightarrow[\text{换元 } r = a(t-\tau)]{\text{d}\tau = -\frac{1}{a} \text{d}r} =$$

$$\frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at} \int_{S(x, r)} \frac{f(y, t - \frac{|x-y|}{a})}{|x-y|} d\sigma(y) dr = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{B(x, at)} \frac{f(y, t - \frac{|x-y|}{a})}{|x-y|} dy. \text{ 故 Kirchhoff 公式}$$

$$h(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{B(x, at)} \frac{f(y, t - \frac{|x-y|}{a})}{|x-y|} dy \quad \text{给出了问题 III 的解.}$$

三维波动方程 Cauchy 问题的解

- 定理: 设 $\varphi(x) \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$, $f(x, t) \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty))$, 则 Cauchy

$$\text{问题} \begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t), & x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad \text{有经典解 } u(x, t) \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)),$$

$$\text{且} \quad u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S(x, at)} \varphi(y) d\sigma(y) \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S(x, at)} \psi(y) d\sigma(y) + \frac{1}{4\pi a^2} \int_{B(x, at)} \frac{f(y, t - \frac{|y-x|}{a})}{|y-x|} dy.$$

证明: 可用含参积分求导验证; 或说明在定理假设下, 前述推导都是严格成立的. 注意: 初值 $\varphi \in C^3 \Rightarrow u \in C^2$, 在连续函数空间中有正则性损失. 但能量积分方法 $\Rightarrow$ Sobolev 空间中无损失! 所以 Sobolev 空间框架更适合描述和研究高维波动方程.

- 注意: 第三项的重积分叫推迟势. (物理意义: 设 $f(y, t) = 4\pi a^2 \delta(y - x') \delta(t - t')$ 是 Dirac 测度, 则推迟势就是对应的非齐次波动方程 Cauchy 问题的 Green 函数 $G(x, t; x', t') = \frac{\delta\left(\left[t - \frac{|x - x'|}{a}\right] - t'\right)}{|x - x'|} = \frac{\delta\left(t' - \left[t - \frac{|x - x'|}{a}\right]\right)}{|x' - x|}$, 分子表明在 t 时刻在 x 点观测的结果来自于与 x 相距 $R = |x - x'|$ 处的源 x' 在更早时刻 $t' = t - \frac{R}{a}$ 受到的扰动, 是因果律的数学体现.)

参考: Jackson, John David: Classical Electrodynamics. Third edition. John Wiley & Sons, 1999. [6.4 节]

Huygens 原理

- $\mathbb{R}^3$ 中波动方程的 Cauchy 问题 $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$, $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$
经典解的 Poisson 公式

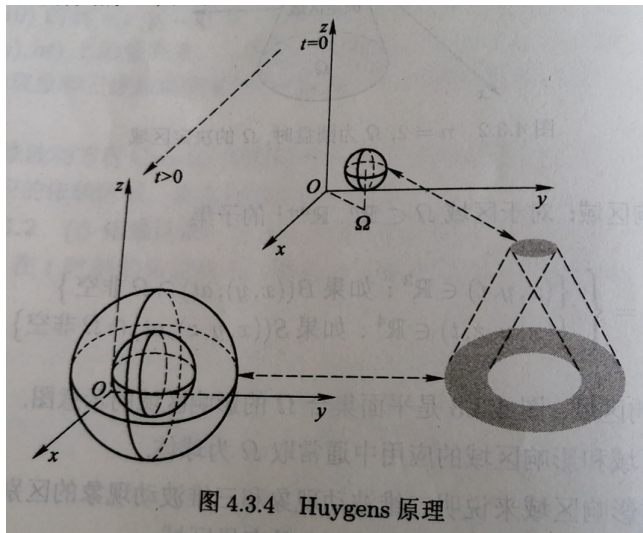
$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S(x, at)} \varphi(y) \, d\sigma(y) \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S(x, at)} \psi(y) \, d\sigma(y) \doteq \text{I} + \text{II}.$$

$$\begin{aligned} \text{这里 I} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{S(0,1)} t \varphi(x + at\omega) \, d\sigma(\omega) \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\int_{S_1(0)} \varphi(x + at\omega) \, d\sigma(\omega) + \int_{S_1(0)} t \mathbf{D}\varphi(x + at\omega) \cdot (a\omega) \, d\sigma(\omega) \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi(at)^2} \int_{S(x, at)} \left(\varphi(y) + \mathbf{D}\varphi(y) \cdot (y - x) \right) \, d\sigma(y). \end{aligned}$$

- 依赖区域: 对于空间点 $x \in \mathbb{R}^3$, 初始空间中的球面 $S(x, at)$ 称作点 x 在时刻 t 的 依赖区域.
- 决定区域: 对于区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ 的子集 $J_\Omega \doteq \{(x, t) : S(x, at) \subset \Omega\}$ 称为 Ω 的 决定区域.
- 影响区域: 对于区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ 的子集 $E_\Omega \doteq \{(x, t) : S(x, at) \cap \Omega \neq \emptyset\}$ 称为 Ω 的 影响区域.

- Huygens 原理: 对三维空间中的波动现象, 在空间有界集上的扰动对于空间中的任一点 x 的影响只能持续有限的一段时间.

证明: 设 $U \subset \mathbb{R}^3$ 是产生扰动的有界闭集, $\forall x \in \mathbb{R}^3$, 定义 $r_1 \doteq \inf_{y \in U} |x - y|$, $r_2 \doteq \sup_{y \in U} |x - y|$. 于是当 $at < r_1$ 或 $at > r_2$ 时, 对任意 $y \in U$, 都有 $x \notin S(y, at)$, 即 $S(x, at) \cap U = \emptyset$, 所以 x 不在 U 的影响区域中, 从而感受不到来自 U 的扰动的影响. (见上述解的公式!) (画图, 类比一维 D'Alembert 公式理解.)



三维波动方程 Cauchy 问题解的大时间衰减率

- $\mathbb{R}^3$ 中波动方程的 Cauchy 问题 $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$, $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$
经典解的 Poisson 公式

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi(at)^2} \int_{S(x, at)} \left(\varphi(y) + \mathbf{D}\varphi(y) \cdot (y - x) \right) d\sigma(y) \\ + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S(x, at)} \psi(y) d\sigma(y).$$

- 定理: 设 $\varphi \in C_0^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in C_0^2(\mathbb{R}^3)$, (它们都有紧致支集,) 则
 $|u(x, t)| = O(t^{-1}) \quad (t \rightarrow \infty).$

- 证明: (用 Huygens 原理). 由于 φ, ψ 有紧支集, 它们在一个球 $B_R(0)$ 外为零, 且存在常数 M 使得 $\forall z \in \mathbb{R}^3, |\varphi(z)| + |\mathbf{D}\varphi(z)| + |\psi(z)| \leq M$. 于是
$$|u(x, t)| = \left| \frac{1}{4\pi(at)^2} \int_{S(x, at)} \left(\varphi(y) + \mathbf{D}\varphi(y) \cdot (y - x) + t\psi(y) \right) d\sigma(y) \right| \leq \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \int_{S(x, at) \cap B_R(0)} \left(M + Mat + Mt \right) d\sigma \leq \frac{M(1+t+at)|S(0, R)|}{4\pi a^2 t^2} = O(t^{-1}) \quad (t \rightarrow +\infty).$$
这里利用了几何结论: t 充分大时 $|S(x, at) \cap B_R(0)| \leq |\partial B_R(0)| = 4\pi R^2$; 注意 t 很小时 $|S(x, at) \cap B_R(0)| = O(t^2)$.

- 典型问题 I: 求函数 $u(x, y, t)$, 使得在 $\mathbb{R}^2 \times \{t > 0\}$ 中 $u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0$, 且 $u(x, y, 0) = 0, u_t(x, y, 0) = \psi(x, y)$.
- 解法: Hadamard 降维法. 二维波动方程的解必然是三维波动方程的解, $u(x, y, t) = u(x, y, z, t) = u(x, y, 0, t)$. 用 Poisson 公式,

$$u(x, y, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S((x, y, 0); at)} \psi(\xi, \eta) d\sigma(\xi, \eta, \zeta)$$

二维球面 $S((x, y, 0); at)$ 在 xy 平面的投影为 $\Sigma_{at}^{(x, y)} \doteq \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : |\xi - x|^2 + |\eta - y|^2 \leq (at)^2\}$

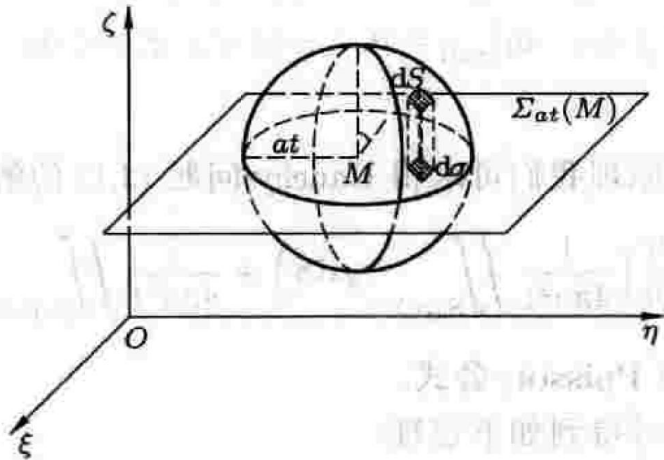
第一型曲面积分化为重积分, 注意球面 S 有关于平面 $\zeta = 0$ 对称的两部分

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{4\pi a^2 t} \int_{\Sigma_{at}^{(x, y)}} \psi(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{\frac{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}{at}} \\ &= \frac{1}{2\pi a} \int_{\Sigma_{at}^{(x, y)}} \frac{\psi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi a} \int_0^{at} \int_0^{2\pi} \frac{\psi(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta)}{\sqrt{(at)^2 - r^2}} r \, d\theta dr \\
&\xrightarrow[s \doteq \sqrt{(at)^2 - r^2}]{-sds = rdr} = \underbrace{\frac{1}{2\pi a} \int_0^{at} \int_0^{2\pi} \psi(x + \sqrt{(at)^2 - s^2} \cos \theta, y + \sqrt{(at)^2 - s^2} \sin \theta) \, d\theta ds}_{\heartsuit}.
\end{aligned}$$

这里蓝色式子使用了面积微元的投影公式: $d\xi d\eta = d\sigma \cos(\angle(\nu, \mathbf{e}_\zeta))$, 这里 $\angle(\nu, \mathbf{e}_\zeta)$ 是曲面的外单位法向与 ζ 轴的夹角, 从而 $\cos(\angle(\nu, \mathbf{e}_\zeta)) = \nu_3$, 即曲面 $\{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \zeta^2 = (at)^2\}$ 外单位法向 $\nu = \frac{(\xi - x, \eta - y, \zeta)}{at}$ 的第三个分量 $\frac{\zeta}{at} = \frac{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}{at}$. 故问题 I 的解的公式为

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_{B_{at}(x, y)} \frac{\psi(\xi, \eta) \, d\xi d\eta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}.$$



- 典型问题 II: 在 $\mathbb{R}^2 \times \{t > 0\}$ 中 $v_{tt} - a^2 \Delta v = 0$, 且 $v(x, y, 0) = \varphi(x, y)$, $v_t(x, y, 0) = 0$.
 - 解法: 由初值问题的分解, 考虑问题: 在 $\mathbb{R}^2 \times \{t > 0\}$ 中 $w_{tt} - a^2 \Delta w = 0$, 且 $w(x, y, 0) = 0$, $w_t(x, y, 0) = \varphi(x, y)$. 则 $v(x, y, t) = \partial_t w(x, y, t)$ 就是问题 II 的解.
- 故 $v(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi a} \int_{B_{at}(x, y)} \frac{\varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} \right)$ 给出了问题 II 的解. 可用上一页 (♡) 式将导数展开.

- 典型问题 III: 在 $\mathbb{R}^2 \times \{t > 0\}$ 中 $h_{tt} - a^2 \Delta h = f(x, y, t)$, 且 $h(x, y, 0) = 0$, $h_t(x, y, 0) = 0$.
- 解法: 齐次化原理. 对参数 $\tau \geq 0$, 考虑 $h(x, y, t; \tau)$ 满足的定解问题 IV: 在 $\mathbb{R}^2 \times \{t > \tau\}$ 中 $h_{tt}(x, y, t; \tau) - a^2 \Delta h(x, y, t; \tau) = 0$, 且 $h(x, y, \tau; \tau) = 0$, $h_t(x, y, \tau; \tau) = f(x, y, \tau)$, 则 $h(x, y, t) = \int_0^t h(x, y, t; \tau) d\tau$ 是问题 III 的解. 对问题 IV, 置 $t' = t - \tau$, 由问题 I 的解的公式, 可得

$$h(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \left(\int_{B_{a(t-\tau)}(x, y)} \frac{f(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (\xi-x)^2 - (\eta-y)^2}} \right) d\tau.$$

- 结论: 二维波动方程的 Cauchy 问题 $u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0$, 且

$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), u_t(x, y, 0) = \psi(x, y)$ 的解为

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_{B_{at}(x, y)} \frac{\psi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} + \varphi(x, y) \\ + \frac{at}{2\pi} \int_{B_{at}(x, y)} \frac{(\varphi_\xi(\xi, \eta)(\xi - x) + \varphi_\eta(\xi, \eta)(\eta - y)) d\xi d\eta}{((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2) \sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}.$$

- 点 (x, y) 在时刻 t 的 **依赖区域** 是圆盘 $B_{at}(x, y)$; 对 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, 称 $J_\Omega \doteq \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ : B_{at}(x, y) \subset \Omega\}$ 为 Ω 的 **决定区域**, $E_\Omega \doteq \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ : B_{at}(x, y) \cap \Omega \neq \emptyset\}$ 为 Ω 的 **影响区域**.

- **波的弥散:** 对于 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, 存在 $r_0 \geq 0$, 使得当 $r \geq r_0$ 时, $B_r(x, y) \cap \Omega \neq \emptyset$, 即若 $(x, y, t_0) \in E_\Omega$, 则 $\forall t \geq t_0$, 有 $(x, y, t) \in E_\Omega$. 这意味着: 平面上的局部的扰动必然会影响到平面上的任一点, 而且一旦影响到, 其影响将永远持续下去.
(解释物理现象: 水面波)

- 设 a, c 都是正的常数, 求解如下初值问题:
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) - c^2u = 0, & x, y \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = 0. \end{cases}$$

- 解: (降维法). 置 $v(x, y, z, t) = u(x, y, t)e^{\frac{c}{a}z}$, 则 v 满足

$$v_{tt} - a^2(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) = 0, \quad v(x, y, z, 0) = e^{\frac{c}{a}z}\varphi(x, y), \quad v_t(x, y, z, 0) = 0.$$

于是 $v(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int_{S_{at}(x, y, z)} e^{\frac{c}{a}\zeta} \varphi(\xi, \eta) d\sigma \right)$. 这里 $\zeta = \pm \sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}$, 从而

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)^2} d\xi d\eta = \frac{at}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\xi d\eta. \text{ 由此, } v(x, y, z, t) =$$

$$\frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{t} \int_{B_{at}(x, y)} \left[e^{\frac{c}{a}\left(z + \sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}\right)} + e^{\frac{c}{a}\left(z - \sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}\right)} \right] \frac{at\varphi(\xi, \eta)}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\xi d\eta \right\} =$$

$$\frac{1}{2\pi a} e^{\frac{c}{a}z} \frac{\partial}{\partial t} \int_{B_{at}(x, y)} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}\right) \varphi(\xi, \eta)}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\xi d\eta. \text{ 故所求的解为}$$

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{B_{at}(x, y)} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}\right) \varphi(\xi, \eta)}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\xi d\eta. \quad \text{这里 } \operatorname{ch}x \doteq \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \text{ 是双曲余弦函数.}$$

Lorentz 变换下波动方程的不变性

- Lorentz 变换 (相对论) — 记时间为 x_0 . 设在某时刻 (如 $x_0 = 0$ (即 $t = 0$) 时), 惯性系 K 与 $\bar{K}$ 的时空坐标系重合, 然后 $\bar{K}$ 以匀常速度 $V = (V_1, V_2, V_3)$ 相对于 K 作匀速直线运动. 以 (x_0, x_1, x_2, x_3) 与 $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ 分别表示 K 与 $\bar{K}$ 中的时空坐标, 则它们之间的关系由如下 Lorentz 变换给出:

$$\bar{x}_0 = \gamma \left(x_0 - \frac{V_1}{c^2} x_1 - \frac{V_2}{c^2} x_2 - \frac{V_3}{c^2} x_3 \right),$$
$$\bar{x}_i = -\gamma V_i x_0 + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\gamma - 1}{|V|^2} V_i V_j + \delta_{ij} \right) x_j, \quad (i = 1, 2, 3).$$

这里 c 是光速, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{|V|^2}{c^2}\right)}}$, δ_{ij} 是 Kronecker 符号.

- 证明: $c \rightarrow +\infty$ 时上述 Lorentz 变换的极限就是伽利略变换.
- 证明: 波动方程 $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$ 在 Lorentz 变换下形式保持不变.

高维 Riemann 问题

- 证明: 对任意 $\lambda > 0$, 若 $u(x, y, t)$ 是二维波动方程 $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy})$ 的解, 则 $u^\lambda(x, y, t) \doteq u(\lambda x, \lambda y, \lambda t)$ 也是该方程的解.
- 置 $\xi = \frac{x}{t}, \eta = \frac{y}{t}$. 设 $u(x, y, t) = v(\frac{x}{t}, \frac{y}{t})$, 称 v 为**自相似解**. 请证明 $v(\xi, \eta)$ 满足偏微分方程 $(\xi^2 - a^2)v_{\xi\xi} + 2\xi\eta v_{\xi\eta} + (\eta^2 - a^2)v_{\eta\eta} + 2\xi v_\xi + 2\eta v_\eta = 0$.
- 证明: 当 $\xi^2 + \eta^2 < a^2$ 时上述方程是椭圆型的; 当 $\xi^2 + \eta^2 > a^2$ 时它是双曲型的.
- 在平面上四个象限分别给定常数初值, 即 $u(x, y, 0) = \begin{cases} c_1, & \text{if } x > 0, y > 0, \\ c_2, & \text{if } x < 0, y > 0, \\ c_3, & \text{if } x < 0, y < 0, \\ c_4, & \text{if } x > 0, y < 0, \end{cases} \quad u_t(x, y, 0) = 0$, 其中 $c_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, 3, 4$. 求在此初值条件下, 在 $|x| > at$ 或 $|y| > at$ 时的解.

思考题: 求上述 Riemann 问题的整体解. (* 相当困难.)

高维 Riemann 问题

- 置 $\xi = \frac{x}{t}$, $\eta = \frac{y}{t}$. 设 $u(x, y, t) = tv(\frac{x}{t}, \frac{y}{t})$. 若 $u(x, y, t)$ 是二维波动方程 $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy})$ 的解, 请证明 $v(\xi, \eta)$ 满足偏微分方程 $(\xi^2 - a^2)v_{\xi\xi} + 2\xi\eta v_{\xi\eta} + (\eta^2 - a^2)v_{\eta\eta} = 0$. 请给出该方程的分类.

- 在平面上四个象限分别给定常数初值, $u(x, y, 0) = 0$, $u_t(x, y, 0) = \begin{cases} c_1, & \text{if } x > 0, y > 0, \\ c_2, & \text{if } x < 0, y > 0, \\ c_3, & \text{if } x < 0, y < 0, \\ c_4, & \text{if } x > 0, y < 0, \end{cases}$ 其中 $c_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, 3, 4$. 求在此初值条件下, 在 $|x| > at$ 或 $|y| > at$ 时的解.

思考题: 求上述 Riemann 问题的整体解. (* 相当困难.)

参考: Chen, Shuxing: Multidimensional Riemann problem for semilinear wave equations. Comm. Partial Differential Equations, 17 (1992), no.5-6, 715-736.

阅读任务和作业

- 必读 — 郇中丹, 黄海洋: 偏微分方程 (第二版), 高等教育出版社, 2013. [pp. 129–138]
- 作业 — p.133: 3; p.135: 3, 4.
- 参考文献

[1] 李大潜, 秦铁虎: 物理学与偏微分方程 (下册). 高等教育出版社, 1997 年. [第九章, 狭义相对论]

[2] McOwen, Robert C. Partial differential equations, methods and applications. Pearson Education Inc., 2004. [第三章]

最后更新: 2022-12-15

偏微分方程

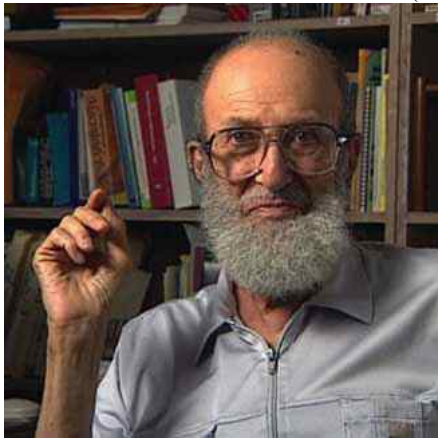
第十九讲 波动方程的初边值问题 (分离变量法)

袁海荣 (华东师范大学 数学科学学院)

2022 年 12 月 22 日

Mathematics is not a deductive science - that's a cliché. When you try to prove a theorem, you don't just list the hypotheses, and then start to reason. What you do is trial-and-error, experimentation, guesswork.

— Paul Halmos (1916 年 3 月 3 日—2006 年 10 月 2 日)



传记: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Halmos/>

学习要点

- 熟练掌握分离变量法和解的验证
- 准确理解解的物理意义和对应的物理现象
- 了解特殊函数的来源

波动方程初边值问题的分解

- 典型问题: 区域 — $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界区域, $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$; 方程 — $u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t), x \in \Omega, t > 0$; 初值 — $u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), x \in \Omega$; 边值 — $b \frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu(x)} + cu(x, t) = \mu(x, t), x \in \partial\Omega, t > 0$. 要求: $a, b, c \in \mathbb{R}$ 且 $a > 0, b, c$ 不同时为 0.
- 分离变量法求解步骤
- 第一步: 边界条件齐次化 — 找到 $w(x, t) \in C^2$ 使得 $b \frac{\partial w(x, t)}{\partial \nu(x)} + cw(x, t) = \mu(x, t), x \in \partial\Omega, t > 0$. 考虑 $u - w$ 满足的边值问题.
一般方法: $b \neq 0$ 时, 若 $\partial\Omega \in C^2, \mu \in C^2$, 求解一阶线性方程的 Cauchy 问题, 得到局部解后作 C^2 延拓到 Ω ; $b = 0$ 时, 取 $w = \mu/c$. 注意具体问题具体分析.

• 第二步: 问题的分解
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), \\ b \frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu(x)} + cu(x, t) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(I) \begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), \\ b \frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu(x)} + cu(x, t) = 0 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t), \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, \\ b \frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu(x)} + cu(x, t) = 0 \end{cases}$$

问题 (I) 分解为

$$(III) \begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = \psi(x), \\ b \frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu(x)} + cu(x, t) = 0 \end{cases} \quad (IV) \begin{cases} v_{tt} - a^2 \Delta v = 0, \\ v(x, 0) = \varphi(x), v_t(x, 0) = 0, \\ b \frac{\partial v(x, t)}{\partial \nu(x)} + cv(x, t) = 0. \end{cases}$$

- (II)—用齐次化原理转化为 (III) 型问题; (IV) — 转化为 (III) 型问题

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2 \Delta w = 0, \\ w(x, 0) = 0, w_t(x, 0) = \varphi(x), & v = \partial_t w. \\ b \frac{\partial w(x, t)}{\partial \nu(x)} + cw(x, t) = 0 \end{cases}$$

- 第三步: 分离变量法求解 (III) 型问题 ($\rightarrow$ 特征值问题 + 函数项级数).
- 第四步: 利用叠加原理得到原问题的解.

波动方程初边值问题的分离变量解法

- 典型问题: 区域 — $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界区域, $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$; 方程 — $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, x \in \Omega, t > 0$; 初值 — $u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = \psi(x), x \in \Omega$; 边值 — $b \frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu(x)} + cu(x, t) = 0, x \in \partial\Omega, t > 0$. (设 $bc \geq 0$.)
- 分离变量法求解步骤
- 第一步: 分离变量的特解 — 设 $u(x, t) = X(x)T(t)$, 满足齐次方程和齐次边值条件, 则 (♣)
$$\begin{cases} \Delta X + \lambda X = 0, & x \in \Omega, \\ b \frac{\partial X}{\partial \nu}(x) + cX(x) = 0, & x \in \partial\Omega; \end{cases}$$
 (♠)
$$\begin{cases} T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, & t > 0, \\ T(0) = 0. \end{cases}$$

- 第二步: 特征值问题

- (♣) 的特征值 $(0 \leq) \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$ 及对应特征函数 $\{X_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$.

- 特征函数系的完备性和正交性: $\int_{\Omega} X_k(x) X_l(x) dx = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$

- (♠) 的特解 $T_k(t) = \sin a\sqrt{\lambda_k}t \Rightarrow$ 特解 $u_k(x, t) = (\sin a\sqrt{\lambda_k}t)X_k(x)$.

- 第三步: 形式解 $u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (\sin a\sqrt{\lambda_k}t) X_k(x)$.

系数公式: $A_k = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_k}} \int_{\Omega} \psi(x) X_k(x) dx, \quad k = 0, 1, \cdots$

- 第四步: 解的验证. 在 ψ 和 $\partial\Omega$ 的适当条件下, 得到函数项级数的一致收敛性和逐项求导性.

两端固定的弦的振动

- 问题 (M): $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0; u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x); u(0, t) = 0 = u(l, t).$
- 特征值问题: $X''(x) + \lambda X(x) = 0, X(0) = X(l) = 0.$ 通解: 如果 $\lambda < 0$, $X(x) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}$; 如果 $\lambda = 0$, $X(x) = C_1 + xC_2$; 如果 $\lambda > 0$, $X(x) = C_1 \sin \sqrt{\lambda}x + C_2 \cos \sqrt{\lambda}x \Rightarrow$ 特征值 $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$, 特征函数 $X_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l}x, k = 1, 2, \dots$
- $T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \Rightarrow T_k(t) = A_k \cos \frac{ka\pi}{l}t + B_k \sin \frac{ka\pi}{l}t.$ 特解 $u_k(x, t) = \left(A_k \cos \frac{ka\pi}{l}t + B_k \sin \frac{ka\pi}{l}t\right) \sin \frac{k\pi}{l}x.$

- 形式解 $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{ka\pi}{l} t + B_k \sin \frac{ka\pi}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x$. 初值条件 $\Rightarrow$ Fourier 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{l} x = \varphi(x)$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{ka\pi}{l} B_k \sin \frac{k\pi}{l} x = \psi(x) \Rightarrow$
 $A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x \, dx$, $B_k = \frac{2}{ka\pi} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x \, dx$.

注意: 将初值奇延拓到 $(-l, l)$, 用 Fourier 正弦展开; 此外

$\int_0^l \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \frac{m\pi}{l} x \, dx = \frac{l}{2} \delta_{km}$. 积化和差公式:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)), \cos \alpha \cos \beta =$$

$$\frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)), \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)).$$

- 解的验证 — 引理: 设 $\varphi(x) \in C^3, \psi(x) \in C^2$, 且 $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$, 则系数 A_k, B_k 确定的级数 $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |A_k|, \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |B_k|$ 收敛.
证明: 对 Fourier 系数公式用分部积分, 再用 Cauchy-Schwarz 不等式和 Bessel 不等式.
- 结论: 若 $\varphi(x) \in C^3, \psi(x) \in C^2$, 且成立相容性条件 $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$, 则上述形式解一致收敛, 可逐项求两阶导数, 从而给出了问题 (M) 的经典解.
- 对初值的正则性的要求 ($\varphi \in C^3, \psi \in C^2$), 相比 D'Alembert 公式给出的高, 但和高维波动方程初值问题的 Poisson 公式的要求相同.

应用: 吉他、钢琴、长笛和单簧管

- 吉他: $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0;$
$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} \frac{h}{\lambda l} x, & 0 < x < \lambda l, \\ \frac{h}{(1-\lambda)l} (l-x), & \lambda l < x < l, \end{cases} \quad u_t(x, 0) = 0; u(0, t) = 0 = u(l, t)$$

($0 < \lambda < 1$)
- $B_k = 0, A_k = \frac{2h}{\lambda(1-\lambda)k^2\pi^2} \sin(\lambda k\pi) \Rightarrow$
$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2h}{\lambda(1-\lambda)k^2\pi^2} \sin(\lambda k\pi) \cos\left(\frac{ka\pi}{l}t\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$$
- 该级数一致收敛. 当 $\lambda = p/q \in \mathbb{Q}$ 时, 如果 k 是 q 的倍数, 则对应频率的振动不出现. (实际演奏中常取 $\lambda = 1/3$.) 物理解释: 对应驻波的节点是 $x = \frac{p}{q}l$, 初值条件使得该点不可能是节点, 从而该频率的波不出现.

- 钢琴: $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0; u(x, 0) = 0,$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \begin{cases} 1, & s < x < s + h, \\ 0, & \text{其它;} \end{cases} \quad u(0, t) = 0 = u(l, t). \quad \text{这里区间}$$

$[s, s + h] \subset [0, l]$ 是弦槌敲击的范围, h 是弦槌的长度. $s = l/7$ 使得 k 为 7 倍数的非简谐音不出现, 即 $x = l/7$ 时 $\sin(k\pi x/l) = 0$.

- $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos\left(\frac{ka\pi}{l}t\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right),$
 $B_k = \frac{2}{ak\pi} \int_s^{s+h} \sin \frac{k\pi}{l}x \, dx = \frac{2l}{ak^2\pi^2} \left[\cos \frac{k\pi s}{l} - \cos \frac{k\pi(s+h)}{l} \right].$

- 长笛 (flute): $\rho_{tt} - c^2 \rho_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0;$
 $\rho(x, 0) = \varphi(x), \rho_t(x, 0) = \psi(x); \rho(0, t) = 0 = \rho(l, t) \quad (c^2 = p'(\rho_0) = \text{音速}; \text{源于可压缩欧拉方程组在均匀状态 } \rho = \rho_0, u = 0 \text{ 的线性化.})$
- 单簧管 (黑管 clarinet): $\rho_{tt} - c^2 \rho_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0;$
 $\rho(x, 0) = \varphi(x), \rho_t(x, 0) = \psi(x); \partial_x \rho(0, t) = 0 = \rho(l, t).$

声学: 基音与泛音

- **弦的固有频率**: 频率 $\omega_k = \frac{a\lambda_k}{2\pi} = \frac{ka}{2l}$; $a = \sqrt{T/\rho}$ (张力 T , 线密度 ρ); 关系: $\omega_k = k\omega_1$ (乐音); 基音: ω_1 ; 泛音: ω_k .
- 声音: 气体的振动 (压强扰动的传播) — $\partial_t \rho + \rho_0 \partial_x v = 0$, $\rho_0 \partial_t v + p'(\rho_0) \partial_x \rho = 0$ (ρ — 密度的扰动量; v — 速度的扰动量; $p_0 = p(\rho_0)$ — 压强与密度的本构关系); $a = \sqrt{p'(\rho_0)}$ — 音速.
- 描述声音的客观量 — **频率** (单位时间振动次数 = 1/周期, 单位: 赫兹. 人耳能听到的范围: 20-20000Hz; 平常说话的频率 500-3000Hz); **声强** (沿给定方向单位面积单位时间内声波传过的能量, 单位: 瓦/平方米; 分贝 $= 10 \log \frac{\text{声强}}{\text{参考声强}}$. 0 分贝 = 刚能听到的声音; 60 分贝 = 正常交谈的声音); **音值** (声音持续时间长短).
 $A \sin(2\pi\omega t)$ — A 振幅 (决定声强); ω — 频率.
- 描述声音的主观量 — **音调** (pitch, 与频率有关, 音调高: 空灵, 清凉, 纤细; 音调低: 雄浑, 澎湃, 粗犷); **音色** (tone, 主要由其泛音决定); **响度** (loudness, 人耳感受到的声音强弱, 它是人对声音大小的一个主观感觉量.)
- 人们很早就发现, 一根空弦所发出的声音与同一根空弦但长度减半后发出的声音有非常悦耳的效果, 或者说接近于“共鸣”, 后来这两个音被称为具有八度音的关系. 八度音是在听觉和谐方面关系最密切的音. 频率是 2 倍的两个振动 (声音) 称为一个八度.
- 十二平均律: 88 键钢琴第 n 个音符 (note) 的频率: $2^{(n-49)/12} \times 440\text{Hz}$. 目的: 在一个八度间得到尽量多的和弦.

非齐次边界条件或外力引起的共振现象

$$\bullet \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, & 0 < x < l, \\ u(0, t) = 0, u_x(l, t) = A \sin \omega t, & t > 0. \end{cases} \begin{cases} \text{假设: } a, A, \omega \text{ 都是非零常数, } \omega > 0; \\ \text{弦左端固定, 右端受到竖直方向周期外力作用.} \end{cases}$$

● 第一步: 边界条件齐次化. 置 $U(x, t) = Ax \sin \omega t$, $v = u - U$, 则

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = A\omega^2 x \sin \omega t, & 0 < x < l, t > 0, \\ v(x, 0) = 0, v_t(x, 0) = -A\omega x, & 0 < x < l, \\ v(0, t) = 0, v_x(l, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

● 第二步: 分解 — $v = v_1 + v_2$.

$$(I) \begin{cases} v_{1,tt} - a^2 v_{1,xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ v_1(x, 0) = 0, v_{1,t}(x, 0) = -A\omega x, & 0 < x < l, \\ v_1(0, t) = 0, v_{1,x}(l, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (II) \begin{cases} v_{2,tt} - a^2 v_{2,xx} = A\omega^2 x \sin \omega t, & 0 < x < l, t > 0, \\ v_2(x, 0) = 0, v_{2,t}(x, 0) = 0, & 0 < x < l, \\ v_2(0, t) = 0, v_{2,x}(l, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

$$(I) \begin{cases} v_{1,tt} - a^2 v_{1,xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ v_1(x, 0) = 0, v_{1,t}(x, 0) = -A\omega x, & 0 < x < l, \\ v_1(0, t) = 0, v_{1,x}(l, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

特征值和特征函数: $X'' + \lambda X = 0, X(0) = X'(l) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^2, X_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} x, n = 1, 2, \dots$

形式解 $v_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin a\sqrt{\lambda_n} t \sin \sqrt{\lambda_n} x$, 其中 $b_n = \frac{-\int_0^l A\omega x \sin \sqrt{\lambda_n} x dx}{a\sqrt{\lambda_n} \int_0^l \sin^2 \sqrt{\lambda_n} x dx} = \frac{(-1)^n 2A\omega}{al\lambda_n^{3/2}}$.

$$(II) \begin{cases} v_{2,tt} - a^2 v_{2,xx} = A\omega^2 x \sin \omega t, & 0 < x < l, t > 0, \\ v_2(x, 0) = 0, v_{2,t}(x, 0) = 0, & 0 < x < l, \\ v_2(0, t) = 0, v_{2,x}(l, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_{tt}(x, t; \tau) - a^2 w_{xx}(x, t; \tau) = 0, & 0 < x < l, t > \tau, \\ w(x, \tau; \tau) = 0, w_t(x, \tau; \tau) = A\omega^2 x \sin \omega \tau, & 0 < x < l, \\ w(0, t; \tau) = 0, w_x(l, t; \tau) = 0, & t > \tau. \end{cases}$$

$w(x, t; \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(a\sqrt{\lambda_n}(t - \tau)) X_n(x), b_n = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \frac{\int_0^l f(x, \tau) X_n(x) dx}{\int_0^l X_n(x)^2 dx} \doteq \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} f_n(\tau).$

$f_n(\tau) \doteq \frac{\int_0^l A\omega^2 x \sin \omega \tau \sin \sqrt{\lambda_n} x dx}{\int_0^l \sin^2 \sqrt{\lambda_n} x dx} = (-1)^{n+1} \frac{2A\omega^2}{l\lambda_n} \sin \omega \tau$. 解为

$$v_2(x, t) = \int_0^t w(x, t; \tau) d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_n(\tau) \sin(a\sqrt{\lambda_n}(t - \tau)) d\tau X_n(x).$$

关键: 积化和差计算 $\int_0^t \sin \omega \tau \sin(a\sqrt{\lambda_n}(t - \tau)) d\tau = \begin{cases} -\frac{a\sqrt{\lambda_n}}{\omega^2 - \lambda_n a^2} \sin \omega t + \frac{\omega}{\omega^2 - \lambda_n a^2} \sin(at\sqrt{\lambda_n}), & \omega \neq \sqrt{\lambda_n} a, \\ \frac{1}{2\omega} \sin \omega t - \frac{1}{2} t \cos \omega t, & \omega = \sqrt{\lambda_n} a. \end{cases}$

非共振情形: $\omega \notin \{\sqrt{\lambda_n} a\}_{n=1}^{\infty}$. 此时 $v_2(x, t) = \frac{2A\omega^2}{al} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \lambda_n^{-\frac{3}{2}} \left(-\frac{\sqrt{\lambda_n} a}{\omega^2 - \lambda_n a^2} \sin \omega t + \frac{\omega}{\omega^2 - \lambda_n a^2} \sin(at\sqrt{\lambda_n}) \right) \sin \sqrt{\lambda_n} x$.

共振情形: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\omega = \sqrt{\lambda_{n_0}} a$. 此时 $v_2(x, t) = (-1)^{n_0+1} \frac{2A\omega^2}{al\lambda_{n_0}^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1}{2\omega} \sin \omega t - \frac{1}{2} t \cos \omega t \right) \sin \sqrt{\lambda_{n_0}} x +$

$$\frac{2A\omega^2}{l} \sum_{n \neq n_0, n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{\lambda_n(\omega^2 - \lambda_n a^2)} \sin \sqrt{\lambda_n} x \sin \omega t + \frac{2A\omega^2}{al} \sum_{n \neq n_0, n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{\lambda_n^{3/2}(\omega^2 - \lambda_n a^2)} \sin \sqrt{\lambda_n} x \sin \sqrt{\lambda_n} at.$$

矩形膜的振动

$$\bullet \text{ (A): } \begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), & 0 < x < l, 0 < y < h, t > 0; \\ u(x, y, 0) = 0, u_t(x, y, 0) = \psi(x, y), \\ u(x, 0, t) = u(x, h, t) = 0, u(0, y, t) = u(l, y, t) = 0. \end{cases}$$

物理意义: 边界固定的膜在初始冲击下的自由振动.

• 设 $u(x, y, t) = R(x, y)T(t)$. 特征值问题 ($\diamond$):

$$T'' + \lambda a^2 T = 0, T(0) = 0; \quad R_{xx} + R_{yy} + \lambda R = 0, \quad 0 < x < l, 0 < y < h; \\ R(x, 0) = R(x, h) = 0, R(0, y) = R(l, y) = 0.$$

• 继续用分离变量法: 设 $R(x, y) = X(x)Y(y)$.

• $X''(x) + \mu X(x) = 0, 0 < x < l; X(0) = X(l) = 0; Y''(y) + (\lambda - \mu)Y(y) = 0, 0 < y < h; Y(0) = Y(h) = 0.$

• 特征值和特征函数: $\mu_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, X_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l}x, k = 1, 2, \dots;$

$\lambda_{km} - \mu_k = \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2, Y_m(x) = \sin \frac{m\pi}{h}y, m = 1, 2, \dots$

- 问题 (◇) 的解: $\lambda_{km} = \left[\left(\frac{k}{l} \right)^2 + \left(\frac{m}{h} \right)^2 \right] \pi^2$, $R_{km}(x, y) = \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \frac{m\pi}{h} y$,
 $k, m = 1, 2, \dots \Rightarrow T_{km}(t) = \sin at \sqrt{\lambda_{km}}$
- 形式解 (♡): $u(x, y, t) = \sum_{k,m=1}^{\infty} A_{km} \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \frac{m\pi}{h} y \sin at \sqrt{\lambda_{km}}$,
 $A_{km} \doteq \frac{4}{lha\sqrt{\lambda_{km}}} \int_0^l \int_0^h \psi(x, y) \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \frac{m\pi}{h} y \, dy dx.$
- 设 $\psi \in C^3([0, l] \times [0, h])$ 且满足相容性条件:
 $\forall x \in [0, l], \psi(x, 0) = \psi_{yy}(x, 0) = \psi(x, h) = \psi_{yy}(x, h) = 0; \quad \forall y \in [0, h],$
 $\psi(0, y) = \psi_{xx}(0, y) = \psi(l, y) = \psi_{xx}(l, y) = 0$, 则由 Bessel 不等式, 级数
 $\sum_{k,m=1}^{\infty} (|A_{km}| \lambda_{km}^2)^2 \leq C \|\mathbf{D}_{x,y}^3 \psi\|_{L^2}^2 < \infty \Rightarrow (\heartsuit)$ 是问题 (A) 的经典解. (事实上,
 $\sum |A_{km}| |\lambda_{km}| = \sum |A_{km}| |\lambda_{km}|^2 |\lambda_{km}|^{-1} \leq \left(\sum |A_{km}|^2 |\lambda_{km}|^4 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{km} |\lambda_{km}|^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$,
 从而形式解表达式逐项求导两次后仍一致收敛. 对多重级数的收敛性, 可用反常(重)积分是否收敛来判别.)

注意:(1) 相容性条件的推导中,需要对方程关于 t 再求导一次,并用 $\psi(x, 0) = 0$ 类型的相容条件 (对其关于切向 x 求导两次)

(2) 利用 $\lambda_{km} \sim k^2 + m^2$

(3) 对 x 求导三次,分部积分时用相容性条件,再用 Bessel 不等式;类似的考虑对 y 求导三次的式子,用 Bessel 不等式,再把所得结果加起来. 故 $C = C(l, h)$.

圆膜振动 (鼓)

- 膜振动问题:
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, & x^2 + y^2 < 1, & t > 0; \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y), & u_t(x, y, 0) = \psi(x, y), & x^2 + y^2 < 1; \\ u(x, y, t) = 0, & x^2 + y^2 = 1, & t > 0. \end{cases}$$
- 分离变量 (I): $u(x, y, t) = U(x, y)T(t) \Rightarrow \begin{cases} U_{xx} + U_{yy} + \lambda U = 0, & x^2 + y^2 < 1; \\ U(x, y) = 0, & x^2 + y^2 = 1; \\ T''(t) + \lambda T(t) = 0, & t \in [0, +\infty) \end{cases}$

- 分离变量 (II): 极坐标 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(r, \theta) + \lambda U(r, \theta) = 0, & 0 < r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi; \\ U(1, \theta) = 0, & 0 \leq \theta \leq 2\pi; \\ U(r, \theta) = U(r, \theta + 2\pi), & \theta \in \mathbb{R}; \\ \lim_{r \searrow 0} U(r, \theta) \text{ 有界,} & 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

- 设 $U(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \Rightarrow \frac{R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \lambda R(r)}{\frac{1}{r^2}R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \mu \Rightarrow \Theta''(\theta) + \mu\Theta(\theta) = 0, \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi) \Rightarrow \mu_k = k^2, \Theta_k(\theta) = a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta, k = 0, 1, 2, \dots$
 $\Rightarrow \begin{cases} R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \left(\lambda - \frac{k^2}{r^2}\right)R(r) = 0, & r \in (0, 1), \\ \lim_{r \searrow 0} R(r) \text{ 有界,} & R(1) = 0. \end{cases}$ (Bessel 方程) (幂级数解法; 复

平面上的 ODE 的解析解理论)

● Bessel 方程: $R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \left(\lambda - \frac{k^2}{r^2}\right)R(r) = 0, r \in (0, 1).$

● Bessel 函数: $J_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(ks - r \sin s) ds, k = 0, 1, 2, \dots$

● $J_k(r)$ 有正零点列 $\{\lambda_k^{(l)}\}_{l=1}^\infty$, 满足 (i) $\lambda_k^{(1)} < \lambda_k^{(2)} < +\dots$; (ii) $\lambda_k^{(l)} \rightarrow +\infty (l \rightarrow +\infty).$

● 函数列 $\{J_k(\lambda_k^{(l)} r)\}_{l=1}^\infty$ 是在区间 $[0, 1]$ 上关于权函数 $\varphi(r) = r$ 的正交函数系; 它们恰好是问

题 $\begin{cases} R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \left(\lambda - \frac{k^2}{r^2}\right)R(r) = 0, & r \in (0, 1), \\ \lim_{r \searrow 0} R(r) \text{ 有界,} & R(1) = 0 \end{cases}$ 的特征函数系, 相应特征值是 $\left\{ \left(\lambda_k^{(l)} \right)^2 \right\}_{l=1}^\infty$.

● 对应 $\lambda = (\lambda_k^{(l)})^2, T''(t) + \lambda T(t) = 0$ 的解是

$$T_{k,l}(t) = A_{k,l} \cos \lambda_k^{(l)} t + B_{k,l} \sin \lambda_k^{(l)} t, k = 0, 1, 2, \dots, l = 1, 2, \dots$$

- 膜振动问题形式解

$$u(r, \theta, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \left(A_{0,l} \cos \lambda_0^{(l)} t + B_{0,l} \sin \lambda_0^{(l)} t \right) J_0(\lambda_0^{(l)} r) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (A_{k,l} \cos k\theta + B_{k,l} \sin k\theta) \cos \lambda_k^{(l)} t J_k(\lambda_k^{(l)} r) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (C_{k,l} \cos k\theta + D_{k,l} \sin k\theta) \sin \lambda_k^{(l)} t J_k(\lambda_k^{(l)} r).$$

- 初值: $\varphi(r, \theta) = u(r, \theta, 0) =$

$$\sum_{l=1}^{\infty} A_{0,l} J_0(\lambda_0^{(l)} r) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (A_{k,l} \cos k\theta + B_{k,l} \sin k\theta) J_k(\lambda_k^{(l)} r);$$

$$\psi(r, \theta) = u_t(r, \theta, 0) =$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} B_{0,l} \lambda_0^{(l)} J_0(\lambda_0^{(l)} r) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_k^{(l)} (C_{k,l} \cos k\theta + D_{k,l} \sin k\theta) J_k(\lambda_k^{(l)} r). \text{ 利用公}$$

$$\text{式 } \boxed{\int_0^1 \left[J_k(\lambda_k^{(l)} r) \right]^2 r \mathrm{d}r = \frac{1}{2} \left[J'_k(\lambda_k^{(l)}) \right]^2}, \text{ 以及特征函数系正交性, 得到所有系数}$$

$A_{k,l}, B_{k,l}, C_{k,l}, D_{k,l}$. (特别注意: 弦音是乐音, 鼓声是噪声 (无基音和泛音的倍数关系)).

以下 $k, l = 1, 2, \dots$,

$$A_{0,l} = \frac{1}{\pi \left[J_0'(\lambda_0^{(l)}) \right]^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \varphi(r, \theta) J_0(\lambda_0^{(l)} r) r \, dr d\theta,$$

$$B_{0,l} = \frac{1}{\pi \lambda_0^{(l)} \left[J_0'(\lambda_0^{(l)}) \right]^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \psi(r, \theta) J_0(\lambda_0^{(l)} r) r \, dr d\theta,$$

$$A_{k,l} = \frac{2}{\pi \left[J_k'(\lambda_k^{(l)}) \right]^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \varphi(r, \theta) J_k(\lambda_k^{(l)} r) r \cos k\theta \, dr d\theta,$$

$$B_{k,l} = \frac{2}{\pi \left[J_k'(\lambda_k^{(l)}) \right]^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \varphi(r, \theta) J_k(\lambda_k^{(l)} r) r \sin k\theta \, dr d\theta,$$

$$C_{k,l} = \frac{2}{\pi \lambda_k^{(l)} \left[J_k'(\lambda_k^{(l)}) \right]^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \psi(r, \theta) J_k(\lambda_k^{(l)} r) r \cos k\theta \, dr d\theta,$$

$$D_{k,l} = \frac{2}{\pi \lambda_k^{(l)} \left[J_k'(\lambda_k^{(l)}) \right]^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \psi(r, \theta) J_k(\lambda_k^{(l)} r) r \sin k\theta \, dr d\theta.$$

阻尼与解的衰减

习题 1. 设 α 和 a 都是正的常数. 证明初边值问题
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} + 2\alpha u_t = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 < x < l, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$
 的解是

$$u(x, t) = e^{-\alpha t} \sum_{n < \frac{\alpha l}{a\pi}} (a_n e^{-\sqrt{\alpha^2 - \lambda_n a^2} t} + b_n e^{\sqrt{\alpha^2 - \lambda_n a^2} t}) \sin \frac{n\pi}{l} x + e^{-\alpha t} (a_{n_0} + t b_{n_0}) \sin \frac{n_0 \pi}{l} x \\ + e^{-\alpha t} \sum_{n > \frac{\alpha l}{a\pi}} (a_n \cos \sqrt{\lambda_n a^2 - \alpha^2} t + b_n \sin \sqrt{\lambda_n a^2 - \alpha^2} t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (n_0 \doteq \frac{\alpha l}{a\pi}, \text{ 如果 } \frac{\alpha l}{a\pi} \text{ 不是整数, 则蓝色项不出现}),$$

其中 $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $\tilde{a}_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$, $\tilde{b}_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$, 而
$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2} \left(\tilde{a}_n - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \lambda_n a^2}} (\tilde{a}_n + \tilde{b}_n) \right), \\ b_n = \frac{1}{2} \left(\tilde{a}_n + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \lambda_n a^2}} (\tilde{a}_n + \tilde{b}_n) \right), \end{cases} \quad \text{如果 } n < \frac{\alpha l}{a\pi};$$

$$\begin{cases} a_n = \tilde{a}_n, \\ b_n = \alpha \tilde{a}_n + \tilde{b}_n, \end{cases} \quad \text{如果 } n = \frac{\alpha l}{a\pi}; \quad \begin{cases} a_n = \tilde{a}_n, \\ b_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n a^2 - \alpha^2}} (\alpha \tilde{a}_n + \tilde{b}_n), \end{cases} \quad \text{如果 } n > \frac{\alpha l}{a\pi}.$$

注意: 阻尼导致出现负特征值, 从而时间趋于无穷大时, 解依指数速率衰减到零.

习题 2. 请用分离变量法研究区间 $0 < x < \pi$ 上的一维波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 的初边值问题, 其中边界条件是 $u(0, t) = 0, \alpha u_x(\pi, t) - u(\pi, t) = 0$. 请特别注意 $\alpha > \pi$ 和 $\alpha \leq \pi$ 时解的不同形态.

阅读任务和作业

- 必读 — 郇中丹, 黄海洋: 偏微分方程 (第二版), 高等教育出版社, 2013. [pp. 80–93; pp. 146–157]
- 作业 — p.151: 3, 4, 5; p.157: 2, 3, 4.
- 参考文献
 - 季孝达, 薛兴恒, 陆英, 宋立功: 数学物理方程 (第二版), 科学出版社, 2009. [第 3 章, 特殊函数]
 - 陈恕行, 秦铁虎, 周忆: 数学物理方程. 复旦大学出版社, 2005.
 - 谷超豪, 李大潜, 陈恕行, 郑宋穆, 谭永基: 数学物理方程 (第三版). 高等教育出版社, 2012.
 - Feynman, R. P.; Leighton, R.B.; Sands, M.: The Feynman lectures on physics, vol. 1. 中译本: 郑永令, 华宏鸣, 吴子仪等译, 费恩曼物理学讲义 (第 1 卷), 上海科学技术出版社, 2013 年. [47-51 章]

最后更新: 2023-1-5

偏微分方程

第二十讲 波动方程的能量积分方法

袁海荣 (华东师范大学 数学科学学院)

2022 年 12 月 27 日

通过对这一模型 (超音速绕流问题) 的分析, 谷超豪老师对偏微分方程今后的发展趋向有了一个宏观的预测, 这就是——从方程到方程组; 从线性到非线性 (拟线性); 从给定边界到自由边界; 从定型到变型; 从局部到整体; 从低维到高维, 等等. 这些都为偏微分方程后来的发展所证实了, 也一直指导着我们复旦大学偏微分方程的研究工作.

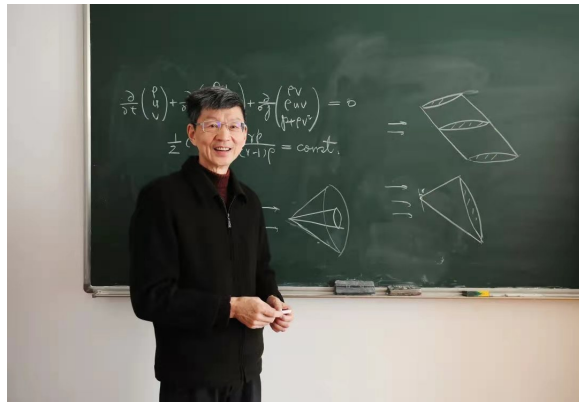
这样一个物理模型, 所涉及的数学问题既多又难, 是不可能一下子就解决的. 研究工作应该由简到繁, 由浅入深, 逐步深入, 关键是如何选择最初的突破口. 当时, 谷超豪老师带领我们着手主攻的问题限于超音速尖头物体平面、无旋、等熵绕流的局部解. ……我们所选的这一个突破口在当时应该是处于前沿的位置的. ……在这个方向上的成果, 一开始是由模型问题驱动的, 但一旦有了突破, 就要从个别到一般, 从具体到抽象, 在认识上不断深化, 这是数学思维的特点. 另一方面, 应用中还有其他一些重要问题也引导到各种不同类型的边值问题及自由边界问题的求解, 需要有一个统一的理论. 后来, 我们对一般的二自变数拟线性双曲组的各种边值问题及自由边界问题建立了迄今为止最完善的局部解理论, 可应用于出现激波、接触间断及中心波等重要情况, 所用的方法也不再依靠具体模型的具体特点, 而是具有一般性的意义. ……到了 1985 年才在美国 *Duke* 大学数学丛中用英文出版了有关的专著, 现已成为这一领域中的一个基本的文献.

— 李大潜 《积微集——漫谈关于偏微分方程的研究》(2008 年)



摄于苏步青老师九十五岁华诞之时(自右至左:胡和生,苏步青,谷超豪,李大潜)

陈恕行院士、洪家兴院士



学习要点

- 熟练掌握波动方程初边值问题和初值问题的能量积分方法
- 理解能量估计对于解决适定性的意义和 Sobolev 空间研究框架的起源
- 掌握常用的不等式及估计方法
- 体会波的有限传播速度等定性性质对于定量分析的意义

- 典型问题: 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界光滑区域, ν 是 $\partial\Omega$ 上外单位法向; b, c 是不同时为零的非负常数, 波速 $a > 0$,
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \Omega, \\ b \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) + cu(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \geq 0. \end{cases}$$
- 能量泛函: 设 $u(x, t)$ 是经典解, 定义 $E_0(t) \doteq \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx$,
 $E_1(t) \doteq \int_{\Omega} (|u_t(x, t)|^2 + a^2 |Du(x, t)|^2) dx$, $e(t) \doteq$
$$\begin{cases} \frac{a^2 c}{b} \int_{\partial\Omega} |u(x, t)|^2 d\sigma_x, & b > 0, \\ 0, & b = 0, \end{cases} \quad \boxed{E(t) \doteq E_0(t) + E_1(t) + e(t).} \quad (\text{注意: } b, c \text{ 非负保证了 } e(t) \geq 0.)$$

• L^2 估计:

$$E'_0(t) = 2 \int_{\Omega} u_t(x, t) u(x, t) \, dx \leq \int_{\Omega} |u_t(x, t)|^2 \, dx + \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 \, dx \leq E_0(t) + E_1(t).$$

• H^1 估计: $E'_1(t) = 2 \int_{\Omega} (u_t u_{tt} + a^2 \mathbf{D}u \cdot \mathbf{D}u_t) \, dx \xrightarrow[\text{Du} \cdot \mathbf{D}u_t = \text{div}(u_t \mathbf{D}u) - u_t \Delta u]{\text{散度定理, 分部积分}} =$

$$2 \int_{\Omega} u_t \underbrace{(u_{tt} - a^2 \Delta u)}_{=f(x,t)} \, dx + \underbrace{2a^2 \int_{\partial\Omega} u_t \mathbf{D}u \cdot \nu \, d\sigma_x}_{\text{边界项}} \leq E_1(t) + \int_{\Omega} |f(x, t)|^2 \, dx - e'(t)$$

- 边界项的估计: $2a^2 \int_{\partial\Omega} u_t \mathbf{Du} \cdot \nu \, d\sigma_x = -e'(t)$
- Dirichlet 条件 — $b = 0$ 时边界条件为
$$u(x, t) = 0, x \in \partial\Omega, t \geq 0 \Rightarrow u_t(x, t) = 0 \Rightarrow \int_{\partial\Omega} u_t \mathbf{Du} \cdot \nu \, d\sigma_x \equiv 0;$$
- Neumann 条件 ($b \neq 0, c = 0$) — 此时边界条件是
$$\mathbf{Du} \cdot \nu(x, t) = 0, x \in \partial\Omega, t \geq 0 \Rightarrow \int_{\partial\Omega} u_t \mathbf{Du} \cdot \nu \, d\sigma_x \equiv 0;$$
- Robin 条件 ($b > 0, c > 0$) — $e'(t) = \frac{2a^2}{b} \int_{\partial\Omega} (cu(x, t))u_t(x, t) \, d\sigma_x = 2a^2 \int_{\partial\Omega} -\frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t)u_t(x, t) \, d\sigma_x = -2a^2 \int_{\partial\Omega} u_t \mathbf{Du} \cdot \nu \, d\sigma_x.$

- 总的能量估计: $E'(t) = E'_0(t) + E'_1(t) + e'(t) \leq E_0(t) + 2E_1(t) + \int_{\Omega} |f(x, t)|^2 dx \leq 2E(t) + \int_{\Omega} |f(x, t)|^2 dx$ $\xrightarrow[\text{或 Gronwall 不等式}]{\text{积分因子 } e^{-2t}}$

$$\begin{aligned} E(t) &\leq E(0)e^{2t} + \int_0^t \int_{\Omega} |f(x, s)|^2 e^{2(t-s)} dx ds \\ &\leq e^{2T} \left(E(0) + \int_0^T \int_{\Omega} |f(x, s)|^2 dx ds \right), \forall 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

- 推论: 初边值问题解的唯一性和稳定性; 定义恰当的 Sobolev 空间, 迹定理, 非特征边界等

- 典型问题: 波速 $a > 0$,
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$
- 注意 — 直接应用能量积分方法的困难: 设 $u(x, t)$ 是经典解, 不能保证它在全空间 $\mathbb{R}^n$ 上 L^2 可积, 从而能量泛函无定义. 克服此难点的关键: 利用波的有限传播速度性质, 考虑初始空间的一个紧集的决定区域, 将问题局部化.
- 对任意的数 $R > 0$, 定义锥
$$K_R \doteq \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ : |x| \leq R - at, 0 \leq t \leq \frac{R}{a}\},$$
 它是初始时刻的闭球 $\overline{B(0; R)}$ 的决定区域.
- 定义 K_R 在时刻 t 的截面 $\Omega_t \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R - at\}.$
- 能量泛函: $E_0(t) \doteq \int_{\Omega_t} |u(x, t)|^2 dx, E_1(t) \doteq \int_{\Omega_t} (|u_t(x, t)|^2 + a^2 |Du(x, t)|^2) dx,$

$E(t) \doteq E_0(t) + E_1(t).$

- L^2 估计: 难点 — 积分区域随时间变化, 多元的变积分限含参积分求导法则.
(此处用球坐标化为一元情形: $E_0(t) \doteq \int_0^{R-at} \left(\int_{S(0,1)} |u(r\omega, t)|^2 d\sigma_\omega \right) r^{n-1} dr$.)

$$\begin{aligned} E'_0(t) &= -a(R-at)^{n-1} \int_{S(0,1)} |u((R-at)\omega, t)|^2 d\sigma_\omega \\ &\quad + 2 \int_0^{R-at} \left(\int_{S(0,1)} u(r\omega, t) u_t(r\omega, t) d\sigma_\omega \right) r^{n-1} dr \\ &= -a \int_{S(0, R-at)} |u(x, t)|^2 d\sigma_x + 2 \int_{\Omega_t} u(x, t) u_t(x, t) dx \\ &\leq \int_{\Omega_t} |u(x, t)|^2 dx + \int_{\Omega_t} |u_t(x, t)|^2 dx - a \int_{\partial\Omega_t} |u(x, t)|^2 d\sigma_x \leq E_0(t) + E_1(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [E_0(t)e^{-t}]' \leq E_1(t)e^{-t} \Rightarrow E_0(t) \leq E_0(0)e^t + \int_0^t E_1(s)e^{t-s} ds.$$

● H^1 估计 (利用了内积是几何量, 数值不依赖于球坐标或直角坐标)

$$\begin{aligned}
 E_1'(t) &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^{R-at} \left[\int_{S(0,1)} (|u_t(r\omega, t)|^2 + a^2 |Du(r\omega, t)|^2) d\sigma_\omega \right] r^{n-1} dr \right\} \\
 &= -a(R-at)^{n-1} \int_{S(0,1)} (|u_t((R-at)\omega, t)|^2 + a^2 |Du((R-at)\omega, t)|^2) d\sigma_\omega \quad (= -a \int_{S(0, R-at)} (|u_t(x, t)|^2 + a^2 |Du(x, t)|^2) d\sigma_x) \\
 &\quad + 2 \int_0^{R-at} \left[\int_{S(0,1)} (u_t(r\omega, t) u_{tt}(r\omega, t) + a^2 Du(r\omega, t) \cdot Du_t(r\omega, t)) d\sigma_\omega \right] r^{n-1} dr \quad (= 2 \int_{\Omega_t} (u_t u_{tt} + a^2 Du \cdot Du_t)(x, t) dx) \\
 &= -a \int_{\partial\Omega_t} (|u_t(x, t)|^2 + a^2 |Du(x, t)|^2) d\sigma_x + 2 \int_{\Omega_t} u_t(u_{tt} - a^2 \Delta u)(x, t) dx + 2a^2 \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(u_t Du)(x, t) dx \quad (Du \cdot Du_t = \operatorname{div}(u_t Du) - u_t \Delta u) \\
 &= -a \int_{\partial\Omega_t} (|u_t(x, t)|^2 + a^2 |Du(x, t)|^2) d\sigma_x + 2 \int_{\Omega_t} (u_t f)(x, t) dx + 2a^2 \int_{\partial\Omega_t} u_t Du \cdot \nu(x, t) d\sigma_x \quad (\text{散度定理} \uparrow, \text{基本不等式} \downarrow) \\
 &\leq \underbrace{-a \int_{\partial\Omega_t} (|u_t(x, t)|^2 + a^2 |Du(x, t)|^2) d\sigma_x + \int_{\Omega_t} |u_t(x, t)|^2 dx + \int_{\Omega_t} |f(x, t)|^2 dx}_{\substack{\leq E_1(t) \\ \text{散度定理} \uparrow, \text{基本不等式} \downarrow}} + \underbrace{a \int_{\partial\Omega_t} (|u_t(x, t)|^2 + a^2 |Du(x, t)|^2) d\sigma_x}_{\substack{\leq E_1(t) \\ \text{散度定理} \uparrow, \text{基本不等式} \downarrow}} \\
 &= \int_{\Omega_t} |u_t(x, t)|^2 dx + \int_{\Omega_t} |f(x, t)|^2 dx \\
 &\leq E_1(t) + \int_{\Omega_t} |f(x, t)|^2 dx \Rightarrow \frac{d}{dt} (E_1(t) e^{-t}) \leq e^{-t} \int_{\Omega_t} |f(x, t)|^2 dx \Rightarrow \boxed{E_1(t) \leq E_1(0) e^t + \int_0^t \int_{\Omega_s} |f(x, s)|^2 e^{t-s} dx ds.}
 \end{aligned}$$

● 封闭 L^2 估计:

$$E_0(t) \leq E_0(0) e^t + \int_0^t E_1(s) e^{t-s} ds \leq E_0(0) e^t + \int_0^t \left(E_1(0) e^s + \int_0^s \int_{\Omega_\tau} |f(x, \tau)|^2 e^{s-\tau} dx d\tau \right) e^{t-s} ds$$

● 封闭 L^2 估计:

$$\begin{aligned} E_0(t) &\leq E_0(0)e^t + \int_0^t E_1(s)e^{t-s} ds \leq E_0(0)e^t + \int_0^t \left(E_1(0)e^s + \int_0^s \int_{\Omega_\tau} |f(x, \tau)|^2 e^{s-\tau} dx d\tau \right) e^{t-s} ds \\ &= (E_0(0) + tE_1(0))e^t + e^t \int_0^t \left(\int_0^s \left(\int_{\Omega_\tau} |f(x, \tau)|^2 dx \right) e^{-\tau} d\tau \right) ds \quad (\text{分部积分}) \\ &= (E_0(0) + tE_1(0))e^t + e^t \left\{ s \left(\int_0^s \left(\int_{\Omega_\tau} |f(x, \tau)|^2 dx \right) e^{-\tau} d\tau \right) \Big|_{s=0}^{s=t} - \int_0^t s \left(\int_{\Omega_s} |f(x, s)|^2 dx \right) e^{-s} ds \right\} \\ &= (E_0(0) + tE_1(0))e^t + e^t \left\{ t \int_0^t \left(\int_{\Omega_\tau} |f(x, \tau)|^2 dx \right) e^{-\tau} d\tau - \int_0^t s \left(\int_{\Omega_s} |f(x, s)|^2 dx \right) e^{-s} ds \right\} \\ &= (E_0(0) + tE_1(0))e^t + e^t \left\{ t \int_0^t \left(\int_{\Omega_s} |f(x, s)|^2 dx \right) e^{-s} ds - \int_0^t s \left(\int_{\Omega_s} |f(x, s)|^2 dx \right) e^{-s} ds \right\} \\ &= (E_0(0) + tE_1(0))e^t + e^t \left\{ \int_0^t (t-s) \left(\int_{\Omega_s} |f(x, s)|^2 dx \right) e^{-s} ds \right\} \\ &= (E_0(0) + tE_1(0))e^t + \int_0^t \int_{\Omega_s} (t-s) e^{t-s} |f(x, s)|^2 dx ds. \end{aligned}$$

注意:也可利用前述计算得到 $E'(t) = E'_0(t) + E'_1(t) \leq 2E(t) + \int_{\Omega_t} |f(x, t)|^2 dx$, 从而证明 $E(t)$ 的估计:

$$E(t) \leq E(0)e^{2t} + \int_0^t e^{2(t-s)} \int_{\Omega_s} |f(x, s)|^2 dx ds.$$

Cauchy 问题解的唯一性和稳定性

- 典型问题: 波速 $a > 0$,
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$
- 经典解的能量泛函: $K_R \doteq \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ : |x| \leq R - at, 0 \leq t \leq \frac{R}{a}\}$, $\Omega_t \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R - at\}$. 能量泛函:
$$E_0(t) \doteq \int_{\Omega_t} |u(x, t)|^2 dx, E_1(t) \doteq \int_{\Omega_t} (|u_t(x, t)|^2 + a^2 |Du(x, t)|^2) dx,$$

$$E(t) = E_0(t) + E_1(t).$$
- 能量估计:
$$E_1(t) \leq E_1(0)e^t + \int_0^t \int_{\Omega_s} |f(x, s)|^2 e^{t-s} dx ds;$$
$$E_0(t) \leq (E_0(0) + tE_1(0))e^t + \int_0^t \int_{\Omega_s} (t-s)e^{t-s} |f(x, s)|^2 dx ds.$$

- 唯一性: 对任意的 (x_0, t_0) , (其中 $t_0 > 0$), 取 $R > |x_0| + at_0$, 则 $x_0 \in \Omega_{t_0}$, $(x_0, t_0) \in K_R$. 对于 $f \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$, $\psi \equiv 0 \Rightarrow E_0(0) = E_1(0) = f = 0 \Rightarrow E_0(t) \equiv 0, \forall t \in [0, R/a] \Rightarrow E(t_0) = 0 \Rightarrow u(x_0, t_0) = 0$.
- 稳定性: 对任意的 $T > 0, R_0 > 0$, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得若初值和自由项满足 $\left[\int_{B(0, R_0 + aT)} (|\varphi(x)|^2 + |\psi(x)|^2 + a^2 |\mathbf{D}\varphi(x)|^2) dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq \delta$, $\left[\int_0^T \int_{B(0, R_0 + a(T-s))} |f(x, s)|^2 dx ds \right]^{\frac{1}{2}} \leq \delta$, 则 $\left[\int_{B(0, R_0)} (|u(x, T)|^2 + |u_t(x, T)|^2 + a^2 |\mathbf{D}u(x, T)|^2) dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$.
- 请画图, 通过依赖区域和决定区域的概念理解上述积分的范围!

- 证明: 关键点 — 取 $R = R_0 + aT$, 考虑对应的时空锥体 K_R 及其截面 Ω_T . 前面已有能量估计 $E_1(t) \leq E_1(0)e^t + \int_0^t \int_{\Omega_s} |f(x, s)|^2 e^{t-s} dx ds$; $E_0(t) \leq (E_0(0) + tE_1(0))e^t + \int_0^t \int_{\Omega_s} (t-s)e^{t-s} |f(x, s)|^2 dx ds$. 注意现在 $\Omega_s = \{|x| \leq R_0 + a(T-s)\}$, 要证明 $[E_0(T) + E_1(T)]^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$.
注意到 $E_1(T) \leq E_1(0)e^T + \int_0^T \int_{B(0, R_0+a(T-s))} |f(x, s)|^2 e^T dx ds$;
 $E_0(T) \leq (E_0(0) + TE_1(0))e^T + \int_0^T \int_{B(0, R_0+a(T-s))} Te^T |f(x, s)|^2 dx ds. \Rightarrow$
 $E_0(T) + E_1(T) \leq (1+T)e^T \left(E_0(0) + E_1(0) + \int_0^T \int_{B(0, R_0+a(T-s))} |f(x, s)|^2 dx ds \right) \leq$
 $(1+T)e^T(2\delta^2).$
于是, 为了 $E_0(T) + E_1(T) \leq \varepsilon^2$, 只要 $\delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2(1+T)e^T}}$ 即可. □

- 推论: 设 $\varphi, \psi, |\mathbf{D}\varphi| \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n \times [0, T])$, 则对任意的 $t \in [0, T]$, 有 $u(x, t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 且 $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|u_t(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + a \|\mathbf{D}u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \sqrt{3(1+T)}e^{\frac{T}{2}} \left(\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + a \|\mathbf{D}\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n \times [0, T])} \right).$

证明: 适当运用上述蓝色估计式.

习题 1. 考虑带阻尼的三维波动方程的初值问题
$$\begin{cases} \rho_{tt} = \Delta \rho - \frac{\mu}{(1+t)^\lambda} \rho_t, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ \rho(x, 0) = \rho_0(|x|), \rho_t(x, 0) = V(|x|), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$
 设 $\rho_0(0) = 0$.

(1) 请写出该问题的球对称的经典解满足的定解问题.

(2) 证明: 函数 $v(x) \doteq \frac{1}{|x|} e^{-|x|}$ 是 $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ 上特征值问题 $\Delta v = v$ 的解.

(3) 定义泛函 $F(t) \doteq \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x, t) v(|x|) dx$. 找到 $F(t)$ 满足的常微分方程.

(4) (选作) 考虑带阻尼的二维波动方程的初值问题
$$\begin{cases} \rho_{tt} = \Delta \rho - \frac{\mu}{(1+t)^\lambda} \rho_t, & x \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ \rho(x, 0) = \rho_0(|x|), \rho_t(x, 0) = V(|x|), & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$
 那么上述函

数 $v(x)$ 应当如何选取? 对应泛函 $F(t)$ 满足怎样的常微分方程? (提示: 考虑修正 Bessel 函数 $\int_0^\infty e^{-r \cosh t} dt$.)

来源: 证明非线性波动方程经典解爆破的基本方法和技巧.

习题 2. 求解圆周 $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上一维波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 的初值问题. (即初值都是 2π 周期函数, 解给定 2π 周期条件.)

(1) 计算分离变量各项 (驻波) 的动能和势能;

(2) 证明经典解的唯一性和稳定性.

阅读任务和作业

- 必读 — 郇中丹, 黄海洋: 偏微分方程 (第二版), 高等教育出版社, 2013. [pp. 138-143; pp. 158-160]
- 作业 — p.144: 2, 3, 4; p.160: 1, 2, 3.

最后更新: 2023-1-6