Brown 运动、Wiener 测度、路径积分、Feynman-Kac 公式和随机积分的数学理论导引

袁海荣 (华东师范大学 数学科学学院)

2023 年 2 月

……我们不禁要问: 随着数学知识的不断扩展, 单个的研究者想要了解这些知识的所有部门, 岂不是变得不可能了吗? 为了回答这个问题, 我想指出, 数学中每一步真正的进展都与更有力的工具和更简单的方法的发现密切联系着, 这些工具和方法同时会有助于理解已有的理论, 并把陈旧的、复杂的东西抛到一边. 数学科学发展的这种特点是根深蒂固的. 因此, 对于个别的数学工作者来说, 只要掌握了这些有力的工具和简单的方法, 他就有可能在数学的各个分支中比其他学科更容易地找到前进的道路.

—— *David Hilbert (1862 年 1 月 23 日 — 1943 年 2 月 14 日)*

传记: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hilbert/

Brown 运动

1827 年, 英国植物学家 Robert Brown (1773 年 12 月 21 日–1858 年 6 月 10 日) 在有花粉颗粒的水溶液中观察到了花粉不停顿的无规则的运动. 随着热力学和分子运动论的发展, 在十九世纪后半期, 物理学家意识到, Brown 运动是液体分子热运动的宏观表现: 1) 它们冲击小颗粒的随机涨落导致了微粒受到持续存在但强度很小的随机冲力, 所以微粒表现出连续但高度不规则的运动路径; 2) 不同花粉颗粒的运动是无关的; 即使同一颗粒, 在不同时间段的运动也无关. 1905 年, Einstein (1879–1955) 给出了用 Brown 运动的扩散速度测算分子的大小以及 Avogadro 常数的新方法. 1908 年, 法国物理学家 Jean Baptiste Perrin (1870 年 9 月 30 日–1942 年 4 月 17 日) 的实验验证了爱因斯坦的理论. 1923 年, N. Wiener 从数学上严格构造了 Brown 运动, 使之成为现代随机分析的基本内容, 其数学结果和思想方法对于偏微分方程理论和计算的新近发展也有着重要影响.

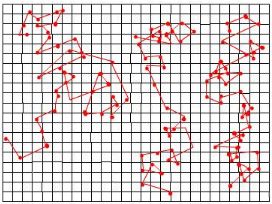

图 1: Brown 运动的三条样本轨道的离散采样 (图片来源: 网络).

微粒的扩散

- 微粒的一维扩散问题 – 试管: $x \in \mathbb{R}$, 时间 $t \geq 0$. 将大量微粉 (化学分子) 放入试管中, 用函数 $u(x,t)$ 代表在时刻 t, 在 x 点处微粒的线密度, 即在 t 时刻, 位于 x 点处长为 $\mathrm{d}x$ 的微元内的微粒数量 (或质量) 是 $u(x,t)\,\mathrm{d}x$. 设初始时刻微粒分布是 $u(x,0) = \phi(x)$, 求 $u(x,t)$.

  [另一种解释 (重要): 注意到 $u(x,t) \geq 0$, 将 $u(x,t)$ 视作概率密度函数 (要求 $\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,\mathrm{d}x = 1$), $\int_a^b u(x,t)\,\mathrm{d}x$ 可表示单个微粒在区间 $[a,b]$ 内的概率]

- 关键概念 — 概率转移函数: 经过时间 τ, 上述 t 时刻位于 x 点处微元 $\mathrm{d}x$ 内的微粒 $u(x,t)\,\mathrm{d}x$ 中有一部分跑到了包含 z 点, 长为 $\mathrm{d}z$ 的微元内. 我们将这个比例记为 $f(z,\tau \mid x)\,\mathrm{d}z$ (注意这个比例还和 $\mathrm{d}z$ 成正比, 所以可以这样写), 表示在微元 $\mathrm{d}z$ 内, 来自微元 $\mathrm{d}x$ 的微粒数量是 $(u(x,t)\,\mathrm{d}x)f(z,\tau \mid x)\mathrm{d}z$. 函数 $f(z,\tau \mid x)$ 称作概率转移函数. 这是刻画依赖于时间的随机现象 (随机过程) 的非常重要的概念.

- 基本假设 — 空间均匀性和各向同性 (与地点和方向无关): $f(z,\tau \mid x)$ 只依赖于 $y = z - x$ 和 τ (每个微元中的微粒扩散到别的微元的比例, 只和距离远近及所花的时间有关, 而与微粒所在的具体空间位置和运动方向无关)
  - 概率转移函数写作 $f(y,\tau)$
  - 假设 $\boxed{\int_{\mathbb{R}} f(y,\tau)\,\mathrm{d}y = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} yf(y,\tau)\,\mathrm{d}y = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} y^2 f(y,\tau)\,\mathrm{d}y = d\tau}$ ($d > 0$ 是常数)

- 概率转移函数: $f(y,\tau)$, 假设其满足 $\boxed{\int_{\mathbb{R}} f(y,\tau)\,\mathrm{d}y = 1,\quad \int_{\mathbb{R}} yf(y,\tau)\,\mathrm{d}y = 0,\quad \int_{\mathbb{R}} y^2 f(y,\tau)\,\mathrm{d}y = d\tau}$ ($d>0$ 是常数)
  - 微粒数守恒 (概率的规范条件): $u(x,t)\mathrm{d}x\, f(y,\tau)\mathrm{d}y$ 代表 t 时刻 x 点所在微元 $\mathrm{d}x$ 内的微粒用了 τ 时间跑到 $x+y$ 处长为 $\mathrm{d}y$ 的微元内的数量, 关于 $\mathrm{d}y$ 积分就表示把散落在各个微元 $\mathrm{d}y$ 的微粒加起来, 它应当等于原来的花粉量 $u(x,t)\mathrm{d}x$: $\int_{\mathbb{R}}(u(x,t)\mathrm{d}x\, f(y,\tau))\mathrm{d}y = u(x,t)\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} f(y,\tau)\,\mathrm{d}y = 1$.
  注意到按照定义, 概率转移函数是非负的, 所以可以把 $f(y,t)$ 看成是一个依赖于时间 t 的概率密度函数.
  - 概率转移函数对应的期望为零, 代表着扩散与方向无关.
  - 扩散的方差与时间成正比, 源于对 Brown 运动等物理现象观测所得的结果.
- u 满足的 PDE 的推导: 在 $t+\tau$ 时刻, 位于 x 处的微元 $\mathrm{d}x$ 内的微粒都是从 t 时刻位于其它处的微元 $\mathrm{d}y$ 扩散来的, 即关于 $\mathrm{d}y$ 积分, 应当有 $u(x,t+\tau)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} u(y,t)\,\mathrm{d}y\, f(x-y,\tau)\,\mathrm{d}x$. 约掉 $\mathrm{d}x$, 形式上作 Taylor 展开 注意区分微分算符 d 和参数 d:

$$u(x,t+\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(y,t)f(x-y,\tau)\,\mathrm{d}y \xrightarrow[\text{换元}]{=} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x-z,t)f(z,\tau)\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(u(x,t) - u_x(x,t)z + \frac{1}{2}u_{xx}(x,t)z^2 + \cdots\right)f(z,\tau)\,\mathrm{d}z$$

$$= u(x,t) + \frac{1}{2}u_{xx}(x,t)d\tau + \cdots \Rightarrow \frac{u(x,t+\tau)-u(x,t)}{\tau} = \frac{1}{2}du_{xx}(x,t) + \cdots \xrightarrow[\tau\to 0+]{\text{忽略其它项}} \boxed{\text{扩散方程}\quad u_t = \frac{1}{2}du_{xx}}.$$

- 基本解: 设一个微粒最初放在原点: $u(x,0)=\delta_0$ (在原点的 Dirac 测度), 扩散方程的测度初值问题

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{2}du_{xx}, & x\in\mathbb{R}, t>0, \\ u(x,0)=\delta_0 \end{cases}$$ 的解是 $$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi dt}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2dt}}}$$, 即微粒在细管中的线密度服从正态分布 $N(0,dt)$.

称 $\{X(t): t \geq 0\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的一个随机过程, 若对任意固定的 t, $X(t)$ 都是 Ω 上的随机变量. 对给定的 $\omega \in \Omega$, 曲线 $t \mapsto X(t, \omega)$ 叫做随机过程 $X(t)$ 的一个样本路径, 或者轨道. $X(t)$ 也常写作 X_t.

定义 (标准 Brown 运动)

一个实值的具有连续轨道的随机过程 $W(\cdot)$ 称为 (标准) Brown 运动, 如果

1) $W(0) = 0 \quad a.s.$;
2) $W(t) - W(s) \backsim N(0, t-s), \forall t \geq s \geq 0$;
3) $\forall 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ 独立.

概念复习: 设 $X_i: \Omega \to \mathbb{R}^n$ $(i = 1, 2, \ldots)$ 是一列随机变量, 称它们是独立的, 如果对于任意的 $B_{k_1}, \ldots, B_{k_m} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ($\mathbb{R}^n$ 的 Borel σ-代数), 成立

$$\boxed{\mathbb{P}(X_{k_1} \in B_{k_1}, \ldots, X_{k_m} \in B_{k_m}) = \mathbb{P}(X_{k_1} \in B_{k_1}) \cdots \mathbb{P}(X_{k_m} \in B_{k_m}).}$$

定理

$X_1, \cdots, X_m: \Omega \to \mathbb{R}^n$ 是独立的随机变量的充分必要条件是其联合概率分布函数具有分离变量的形式 $F_{X_1, \ldots, X_m}(x_1, \cdots, x_m) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_m}(x_m)$; 或者若各随机变量都存在概率密度函数, 则其联合概率密度函数满足 $f_{X_1, \ldots, X_m}(x_1, \cdots, x_m) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_m}(x_m)$.

Brown 运动的有限维分布

- 注意: 对任意 $0 < t_1 < \cdots < t_n$, $a_i < b_i$, $i = 1, \ldots, n$, 随机变量 $W(t_1), \ldots, W(t_n)$ 并不是独立的. 如何计算其联合概率密度函数?
- 方法: 通过计算概率 $\mathbb{P}(a_1 \le W(t_1) \le b_1, \ldots, a_n \le W(t_n) \le b_n)$ 得到, 也就是说, 计算 t_i 时刻在 $[a_i, b_i]$ 中 ($i = 1, \ldots, n$) 观察到花粉颗粒的可能性有多大? [Brown 运动的有限维分布]
- 由 Brown 运动的定义, 对 $n = 1$, $\mathbb{P}(a_1 \le W(t) \le b_1) = \int_{a_1}^{b_1} \frac{e^{-\frac{x_1^2}{2t_1}}}{\sqrt{2\pi t_1}}\, dx_1$.
- 现给定 $W(t_1) = x_1$ (相当于将上述标准 Brown 运动的定义中的 $W(t)$ 换作 $W(t) + x_1$), 其中 $a_1 \le x_1 \le b_1$, 则在 $[t_1, t_2]$ 时间段 Brown 运动应服从分布 $N(x_1, t_2 - t_1)$, 从而 $a_2 \le W(t_2) \le b_2$ 的概率为 $\int_{a_2}^{b_2} \frac{e^{-\frac{|x_2-x_1|^2}{2(t_2-t_1)}}}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}}\, dx_2$. 于是,

  $\mathbb{P}(a_1 \le W(t_1) \le b_1, a_2 \le W(t_2) \le b_2) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} g(x_1, t_1 | 0) g(x_2, t_2 - t_1 | x_1)\, dx_2 dx_1$, 其中概率转移函数 $\boxed{g(x, t | y) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}}$ 表示颗粒从 y 点出发经时间 t 达到 x 点的概率.
- 一般地, 容易看出:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(a_1 \le W(t_1) \le b_1, \cdots, a_n \le W(t_n) \le b_n) \\ = &\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} g(x_1, t_1 | 0) g(x_2, t_2 - t_1 | x_1) \cdots g(x_n, t_n - t_{n-1} | x_{n-1})\, dx_n \cdots dx_1. \end{aligned}$$

这里的被积函数就是 $W(t_1), \ldots, W(t_n)$ 的联合概率密度函数, 它给出了 $\mathbb{R}^n$ 上的一个概率测度, 称作 Brown 运动的有限维分布测度.

- 如果把随机过程的轨道看作样本点, 则在数学上证明 Brown 运动的存在性, 相当于要在原点值为零的连续函数组成的无限维线性空间 $\Omega \doteq C_{(0)}[0,\infty)$ 上构造一个测度 $\mathbb{P}$, 使得对任意 $0 < t_1 < \cdots < t_n$, $a_i < b_i$, $i = 1, \ldots, n$, 满足要求 $a_1 \le W(t_1) \le b_1, \ldots, a_n \le W(t_n) \le b_n$ 的所有曲线 $W(t)$ 组成的集合 $E \subset \Omega$ 关于 $\mathbb{P}$ 可测, 且 $\mathbb{P}(E) = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} g(x_1, t_1 | 0) g(x_2, t_2 - t_1 | x_1) \cdots g(x_n, t_n - t_{n-1} | x_{n-1})\, \mathrm{d}x_n \cdots \mathrm{d}x_1$. 上述形式的集合 E 叫做 柱形集. 显然, $\mathbb{P}$ 应当定义在所有柱形集生成的 σ-代数 $\mathcal{F}$ 上. 概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 就是 Brown 运动的数学模型.
- 构造测度的方法
  - Carathéodory 测度扩张 (特例: Kolmogorov 定理)
  - Riesz 表示定理: 设 X 是 σ-紧的局部紧 Hausdorff 空间, $I: C_c(X \to \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 是一个正线性泛函, 则存在 X 上唯一的 Radon 测度 μ, 使得 $I = I_\mu$. 此处 $I_\mu(f) \doteq \int_X f \mathrm{d}\mu$. (Radon 测度 μ: 紧集上有限的 Borel 正则测度, 即 μ 是 Borel σ-代数上的测度, 对任意紧集 $K \subset X$, $\mu(K) < +\infty$; 对任意 $A \subset X$, 存在 Borel 集 $B \supset A$ 使得 $\mu_*(A) = \mu(B)$. 这里 μ_* 是 μ 生成的外测度.)
  - Lebesgue-Radon-Nikodym 定理: 设 μ 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上 σ-有限的 (非负) 测度, ν 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上 σ-有限的符号测度. 那么存在唯一的符号测度 ν_a, ν_s, 使得 i) $\nu_a \ll \mu$, $\nu_s \perp \mu$; ii) $\nu = \nu_a + \nu_s$; iii) 存在 μ-可积函数 f, 使得 $\mathrm{d}\nu_a = f\mathrm{d}\mu$, 即: $\nu_a(E) = \int_E f(\omega)\, \mathrm{d}\mu(\omega)$, $\forall E \in \mathcal{F}$.
  - 紧性方法 (可分性, 完备性, 胎紧, Prokhorov 定理) Prokhorov 定理: 设 X 是 σ-紧的局部紧度量空间, $\{\mu_n\}$ 是一列 X 上的 Borel 概率测度. 设 $\{\mu_n\}$ 胎紧 (tight): $\forall \epsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset X$, 使得对任意 n, 都有 $\mu_n(X \setminus K) \le \epsilon$. 那么 $\{\mu_n\}$ 有子列淡收敛到一个 Borel 概率测度 μ. [淡收敛 (vague convergence): 称 Radon 测度列 $\{\mu_n\}$ 淡收敛到 μ, 若对任意 $f \in C_0(X \to \mathbb{R})$, 成立 $\lim_{n\to\infty} \int_X f \mathrm{d}\mu_n = \int_X f \mathrm{d}\mu$. 这里 $C_0(X \to \mathbb{R})$ 是 $C_c(X \to \mathbb{R})$ 在一致收敛拓扑下的完备化空间.]
  - 映射诱导: 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是测度空间, $f: X \to Y$ 是个映射, 定义 $f_\sharp \mathbb{P}(E) \doteq \mathbb{P}(f^{-1}(E))$, 可得到 Y 上的测度 $f_\sharp \mathbb{P}$.

Carathéodory 测度扩张方法

- 测度空间
  - σ-代数: 设 X 不是空集 (称作样本空间), $\mathcal{F}$ 是由 X 的子集组成的集合 (叫作集族), 若满足: 1) $\emptyset \in \mathcal{F}$; 2) 若 $E \in \mathcal{F}$, 则 $E^c = X \setminus E \in \mathcal{F}$; 3) 若 $E_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$, 则 $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$, 就称 $\mathcal{F}$ 是一个 σ-代数. $(X, \mathcal{F})$ 称作 可测空间.
  - 测度: $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ 称为 $(X, \mathcal{F})$ 上的一个 测度, 如果 1) $\mu(\emptyset) = 0$; 2) 若 $E_n \in \mathcal{F}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 两两互不相交, 则 $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$. $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 称作 测度空间.
- 准测度和外测度
  - Boole 代数: 设 $X \neq \emptyset$, $\mathcal{A}$ 是 X 的子集构成的集族, 称其为 Boole 代数, 如果: 1) $\emptyset \in \mathcal{A}$; 2) $E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A}$; 3) $E, F \in \mathcal{A} \Rightarrow E \cup F \in \mathcal{A}$. [布尔 (Boole) 代数关于补和有限交、有限并封闭]
  - 准测度 (pre-measure): 称 $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ 是 $(X, \mathcal{A})$ 上的一个 准测度, 如果 1) $\mu_0(\emptyset) = 0$; 2) 设 $E_n \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ 两两互不相交, 且 $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$, 则 $\mu_0\big(\cup_{k=1}^{\infty} E_k\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(E_k)$.
  - 外测度: 称 $\mu_* : 2^X \to [0, +\infty]$ 是 X 上的 外测度, 如果 1) (规范性) $\mu_*(\emptyset) = 0$; 2) (次可列可加性) $E_n \subset X$ $(n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \mu_*\big(\cup_{k=1}^{\infty} E_k\big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_*(E_k)$.

用准测度构造外测度

定理

设 μ_0 是定义在 X 上布尔代数 $\mathcal{A}$ 上的一个准测度. 对任意 $E \subset X$, 定义

$$\boxed{\mu_*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu_0(E_j) : E \subset \cup_{j=1}^{\infty}E_j, \forall E_j \in \mathcal{A}\right\}},$$

则 μ_* 是 X 上的一个外测度, 且 *i)* $\forall E \in \mathcal{A}$, $\mu_*(E) = \mu_0(E)$;

ii) 设 $E \in \mathcal{A}$, 则它是 *Carathéodory* 可测的, 即: $\boxed{\forall A \subset X,\ \mu_*(A) = \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A).}$

证明 1. 由定义, 不难验证 μ_* 是个外测度. 2. 证明 i). 设 $E \in \mathcal{A}$, 显然有 $\mu_*(E) \le \mu_0(E)$. 反之, 设 $E \subset \cup_{j=1}^{\infty}E_j$, $E_j \in \mathcal{A}$, 作 $E_k' = E \cap \left(E_k - \cup_{j=1}^{k-1}E_j\right)$, 则 $E_k' \in \mathcal{A}$, $E_k' \subset E_k$, 且 E_k' 两两互不相交, 成立 $E = \cup_{k=1}^{\infty}E_k'$. 由准测度的可列可加性, $\mu_0(E) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu_0(E_k') \le \sum_{k=1}^{\infty}\mu_0(E_k)$. 右边取下确界, 得到 $\mu_0(E) \le \mu_*(E)$.

3. 证明 ii). 给定 $E \in \mathcal{A}$. 对任意 $A \subset X$, 由外测度定义, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $E_k \in \mathcal{A}$ $(k \in \mathbb{N})$, 使得 $A \subset \cup_k E_k$, 且 $\sum_{k=1}^{\infty}\mu_0(E_k) \le \mu_*(A) + \varepsilon$. 另一方面, μ_0 在 $\mathcal{A}$ 上有限可加, 从而

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mu_0(E_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\Big(\mu_0(E_j \cap E) + \mu_0(E_j \cap E^c)\Big) = \sum_{j=1}^{\infty}\mu_0(E_j \cap E) + \sum_{j=1}^{\infty}\mu_0(E_j \cap E^c) \ge \mu_*(A \cap E) + \mu_*(A \cap E^c).$$

联合这两个不等式, 由 ε 的任意性, 得到 $\mu_*(A) \ge \mu_*(A \cap E) + \mu_*(A \cap E^c)$. 另由外测度的次可列可加性, 成立 $\mu_*(A) \le \mu_*(A \cap E) + \mu_*(A \cap E^c)$. 于是得到 $\mu_*(A) = \mu_*(A \cap E) + \mu_*(A \cap E^c)$. □

由外测度构造测度–Carathéodory 定理

定理

给定 X 上外测度 μ_*, 则所有 Carathéodory 可测集 (即对任意 $A\subset X$, 满足 $\mu_*(A)=\mu_*(E\cap A)+\mu_*(E^c\cap A)$ 的子集 E) 构成一个 σ-代数 $\mathcal{M}$, 且 μ_* 限制在 $\mathcal{M}$ 上是一个测度.

证明: 1. 证明 $\mathcal{M}$ 是个 Boole 代数. 显然 $\emptyset, X\in\mathcal{M}$. 由 Carathéodory 条件对补集的对称性, 显然若 $E\in\mathcal{M}$, 则 $E^c\in\mathcal{M}$. 再证关于有限并的封闭性. 设 $E_1,E_2\in\mathcal{M}$.

对任意 $A\subset X, E_2\in\mathcal{M}\Rightarrow \mu_*(A)=\mu_*(E_2\cap A)+\mu_*(E_2^c\cap A)\xrightarrow[E_1\in\mathcal{M}]{A\text{ 换作 }E_2\cap A\text{ 和 }E_2^c\cap A\text{ 用 Carathéodory 条件}}=$

$\mu_*(E_1\cap E_2\cap A)+\mu_*(E_1^c\cap E_2\cap A)+\mu_*(E_1\cap E_2^c\cap A)+\mu_*(E_1^c\cap E_2^c\cap A)\xrightarrow[E_1\cup E_2=(E_1\cap E_2)\cup(E_1^c\cap E_2)\cup(E_1\cap E_2^c)]{\mu_*\text{ 次可加性}}\geq \mu_*((E_1\cup E_2)\cap A)+\mu_*((E_1\cup E_2)^c\cap A)$.

这就证明了 $E_1\cup E_2\in\mathcal{M}$. 特别的, 如果 $E_1\cap E_2=\emptyset$, 就有 $\mu_*(E_1\cup E_2)=\mu_*((E_1\cup E_2)\cap E_1)+\mu_*((E_1\cup E_2)\cap E_1^c)=\mu_*(E_1)+\mu_*(E_2)$, 即 μ_* 在 $\mathcal{M}$ 上有限可加.

2. 证明 $\mathcal{M}$ 关于可列并封闭, 从而是个 σ-代数. 设 $E_k\in\mathcal{M}$ $(k\in\mathbb{N})$ 两两不相交, 定义 $G_n\doteq\cup_{j=1}^n E_j\in\mathcal{M}, G=\cup_{j=1}^\infty E_j$. 对任意的 $A\subset X$, 由于 $E_n\in\mathcal{M}$, $\mu_*(G_n\cap A)=\mu_*(E_n\cap G_n\cap A)+\mu_*(E_n^c\cap G_n\cap A)=\mu_*(E_n\cap A)+\mu_*(G_{n-1}\cap A)\xrightarrow[\text{对 }n\text{ 归纳}]{}=\sum_{k=1}^n\mu_*(E_k\cap A)$.

注意到 $G_n\subset G\Rightarrow G^c\subset G_n^c$, 利用 $G_n\in\mathcal{M}$, 有 $\mu_*(A)=\mu_*(G_n\cap A)+\mu_*(G_n^c\cap A)\geq\sum_{j=1}^n\mu_*(E_j\cap A)+\mu_*(G^c\cap A)$. 令 $n\to\infty$, 由外测度的次可列可加性, $\mu_*(A)\geq\sum_{k=1}^\infty\mu_*(E_j\cap A)+\mu_*(G^c\cap A)\geq\mu_*(G\cap A)+\mu_*(G^c\cap A)\geq\mu_*(A)\Rightarrow\mu_*(A)=\mu_*(G\cap A)+\mu_*(G^c\cap A)$, 于是 $G\in\mathcal{M}$, 即 $\mathcal{M}$ 是个 σ-代数.

3, 特别的, 在上面蓝色式子中取 $A=G$, 就有 $\mu_*(G)=\sum_{k=1}^\infty\mu_*(E_k\cap G)=\sum_{k=1}^\infty\mu_*(E_k)$, 即 μ_* 在 $\mathcal{M}$ 上具有可列可加性, 从而是个 $\mathcal{M}$ 上的测度. □

Boole 代数的准测度扩张为 σ-代数上的测度, 唯一性

定理

设 $\mathcal{A}$ 是样本空间 X 上的 Boole 代数, μ_0 是 $\mathcal{A}$ 上的准测度, 则它可以扩张为 $\mathcal{A}$ 生成的 σ-代数 $\sigma(\mathcal{A})$ 上的测度 μ. 进一步, 如果 μ 是 σ-有限的, 则它是 μ_0 在 $\sigma(\mathcal{A})$ 上唯一的扩张.

证明 1. 存在性: 首先由准测度 μ_0 构造出 X 上的外测度, 再根据 Carathéodory 定理, 将 μ_* 限制在 Carathéodory 可测集构成的 σ-代数 $\mathcal{M}$ 上得到测度 μ. 由于 $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$, 则 $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$, 就得到测度空间 $(X, \sigma(\mathcal{A}), \mu)$. 2. 唯一性. 设 μ 是 σ-有限的, ν 是 $\sigma(\mathcal{A})$ 上另一个测度, 使得 $\forall E \in \mathcal{A}, \nu(E) = \mu_0(E)$. 现在要证明 $\mu = \nu$: $\forall F \in \sigma(\mathcal{A}), \nu(F) = \mu(F)$. 3. 先考虑一个特殊情形. 若 $E = \cup E_j, E_j \in \mathcal{A}$, 则由测度的上连续性, $\nu(E) = \lim_{n\to\infty} \nu(\cup_{j=1}^n E_j) = \lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{j=1}^n E_j) = \mu(E)$. 4. 先设 $F \in \sigma(\mathcal{A})$ 使得 $\mu(F) < \infty$. 设 $F \subset \cup_j E_j$, $E_j \in \mathcal{A}$. 那么由可列可加性,$\nu(F) \le \sum_{j=1}^\infty \nu(E_j) = \sum_{j=1}^\infty \mu_0(E_j)$, 右端关于覆盖 F 的所有 $\{E_j\}$ 取下确界, 就得到$\nu(F) \le \mu_*(F) = \mu(F)$. 下面要多次用到这个结果. 5. 由于 $\mu(F) = \mu_*(F) < +\infty$, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $E_j \in \mathcal{A}, E = \cup_{j=1}^\infty E_j \in \sigma(\mathcal{A})$, 使得 $F \subset E$, 且 $\mu(E) \le \mu(F) + \epsilon$. 于是 $\mu(E - F) = \mu(E) - \mu(F) \le \epsilon$, 从而 $\mu(F) \le \mu(E) = \nu(E) = \nu(F) + \nu(E - F) \le \nu(F) + \mu(E - F) \le \nu(F) + \epsilon \le \mu(F) + \epsilon$. 由 ϵ 的任意性, 得到 $\mu(F) = \nu(F)$. 6. 由于 μ 是 σ-有限的, 则 $X = \cup E_j, E_j \in \sigma(\mathcal{A})$ 互不相交, 且 $\mu(E_j) < \infty$. 对任意 $F \in \sigma(\mathcal{A})$, 成立 $\mu(F) = \sum_{j=1}^\infty \mu(F \cap E_j) = \sum_{j=1}^\infty \nu(F \cap E_j) = \nu(F)$. □

用有限维概率分布构造概率空间: Kolmogorov 扩张定理

- 样本空间 $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$: 所有 $[0,\infty)$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数. 基本概念: 柱集和有限维概率分布.
- $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$ 中的 n 维柱集: 具有如下形式的子集 $\boxed{C \doteq \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} : (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_n)) \in A\}}$, 其中 $n \in \mathbb{N}$, $t_i \in [0,\infty), i = 1, 2, \cdots, n, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. (要求 t_i 互不相同.)
- Borel 代数 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$: $\mathbb{R}^n$ 中开集生成的 σ-代数.
- 柱集代数 $\mathcal{C}$: $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$ 中所有有限维柱集组成的集合, 它是一个 Boole 代数.

证明 1) 非空性. $\mathbb{R}^{[0,\infty)} = \{\omega : \omega(t) \in \mathbb{R}\}$ 是一个一维柱集. 2) 补封闭性. 设 $C = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} : (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_n)) \in A\}$, 则 $\mathbb{R}^{[0,\infty)} \setminus C = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} : (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_n)) \in \mathbb{R}^n \setminus A\}$ 仍然是一个 n 维柱集. 3) 有限并封闭性. 设 $C_1 = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} : (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_n)) \in A\}$, $C_2 = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} : (\omega(t_1'), \cdots, \omega(t_m')) \in B\}$. 如果 $m < n$, 可任取 $t_{m+1}', \cdots, t_n'$ 与 $t_1', \cdots, t_m'$ 不同, 将 C_2 写为 $\{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} : (\omega(t_1'), \cdots, \omega(t_m'), \cdots, \omega(t_n')) \in B \times \mathbb{R}^{n-m}\}$. 所以不妨设 $m = n$. 下面以 $m = n = 3$ 为例说明. 对一般的 m 是类似的. 情形 I: $t_1 = t_1', t_2 = t_2', t_3 = t_3'$, 则 $C_1 \cup C_2 = \{\omega : (\omega(t_1), \omega(t_2), \omega(t_3)) \in A \cup B\} \in \mathcal{C}$. 情形 II: t_i, t_i' 互不相同: 此时 $C_1 = \{\omega : (\omega(t_1), \omega(t_2), \omega(t_3), \omega(t_1'), \omega(t_2'), \omega(t_3')) \in A \times \mathbb{R}^3\}$, $C_2 = \{\omega : (\omega(t_1), \omega(t_2), \omega(t_3), \omega(t_1'), \omega(t_2'), \omega(t_3')) \in \mathbb{R}^3 \times B\}$, 从而转化为情形 I. 情形 III: $t_1 = t_1', t_2, t_3, t_2', t_3'$ 互不相同: 此时 $C_1 = \{(\omega(t_1), \omega(t_2), \omega(t_3), \omega(t_2'), \omega(t_3')) \in A \times \mathbb{R}^2\}$, $C_2 = \{(\omega(t_1), \omega(t_2), \omega(t_3), \omega(t_2'), \omega(t_3')) \in \tilde{B}\}$, 其中 $\tilde{B} = \{x = (x_1, \cdots, x_5) : x_2, x_3 \in \mathbb{R}, (x_1, x_4, x_5) \in B\}$. $\tilde{B}$ 是 $B \times \mathbb{R}^2$ 在一个可逆线性变换下的像集, 故 $\tilde{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^5)$. 转化到情形 I. 情形 IV: 其他情形可类似通过指标的扩充化到情形 I.

- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})$: 包含 $\mathcal{C}$ 的最小 σ-代数.

有限维概率分布及其相容性

- 指标集 $T = \{\underline{t} = (t_1, \cdots, t_n) : n \in \mathbb{N}, t_i \geq 0$ 且互不相同$\}$. 对 $\underline{t} = (t_1, \cdots, t_n)$, n 称作 $\underline{t}$ 的长度.
- 有限维概率分布 $\{Q_{\underline{t}}\}_{\underline{t} \in T}$: 设 $\underline{t}$ 的长度是 n, 则 $Q_{\underline{t}}$ 是 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ 上的概率测度.
- $\{Q_{\underline{t}}\}_{\underline{t} \in T}$ 的相容性
  - a) 设 $\underline{s} = (t_{i_1}, \cdots, t_{i_n})$ 是 $\underline{t} = (t_1, \cdots, t_n)$ 的一个置换, 则对任意的 $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i = 1, \cdots, n$, 有 $Q_{\underline{t}}(A_1 \times \cdots \times A_n) = Q_{\underline{s}}(A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_n})$;
  - b) 设 $n \geq 2$, $\underline{t} = (t_1, \cdots, t_n)$, $\underline{s} = (t_1, \cdots, t_{n-1})$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$, 则 $Q_{\underline{t}}(A \times \mathbb{R}) = Q_{\underline{s}}(A)$.
- 例: 设 $\mathbb{P}$ 是 $(\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)}))$ 上的概率测度, 可定义有限维概率分布 $\{Q_{\underline{t}}\}_{\underline{t} \in T}$ 如下:

$$Q_{\underline{t}}(A) = \mathbb{P}[\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} : (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_n)) \in A], \tag{1}$$

其中 $\underline{t} = (t_1, \cdots, t_n) \in T$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. 显然 $\{Q_{\underline{t}}\}$ 是相容的.

定理 (Kolmogorov 扩张定理)

设 $\{Q_{\underline{t}}\}_{\underline{t} \in T}$ 是相容的有限维概率分布, 则存在 $(\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)}))$ 上的概率测度 $\mathbb{P}$, 使得(1)对任意 $\underline{t} \in T$ 和 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 都成立.

Kolmogorov 定理的证明

由 Carathéodory 扩张定理, 只需在柱集布尔代数上构造出如下准测度 Q: 设 $C = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} : (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_n)) \in A\}$, 其中 $\underline{t} = (t_1, \cdots, t_n) \in T, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 定义 $\boxed{Q(C) \doteq Q_{\underline{t}}(A)}$.

为了证明 Q 是 $\mathcal{C}$ 上的准测度, 需要以下步骤:

- Q 的定义合理: $Q(C)$ 不依赖于 C 的具体表达式;
- Q 是有限可加的;
- $Q(\mathbb{R}^{[0,\infty)}) = 1$;
- Q 在 $\mathcal{C}$ 上可列可加, 从而是准测度. (要用到 Borel 概率测度是 Radon 测度, 具有内正则性, 从而可使用紧性.)

设 Q 在 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})$ 上扩张为概率测度 $\mathbb{P}$, 那么对任意 $C = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} : (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_n)) \in A\} \in \mathcal{C}$, 就有 $\mathbb{P}(C) = Q(C) = Q_{\underline{t}}(A)$.

Q 定义的合理性: 设对指标 $\underline{t}=(t_1,\cdots,t_n)$, $\underline{s}=(s_1,\cdots,s_m)$, 其中 $m,n\geq 1$, 以及 $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, 使得 C 有两种表示: $C=\{\omega\in\mathbb{R}^{[0,\infty)}:(\omega(t_1),\cdots,\omega(t_n))\in A\}$, $C=\{\omega\in\mathbb{R}^{[0,\infty)}:(\omega(s_1),\cdots,\omega(s_m))\in B\}$, 需要借助相容性证明: $Q_{\underline{t}}(A)=Q_{\underline{s}}(B)$.

- 情形 1: $m=n$, 且有 $(1,2,\cdots,n)$ 的置换 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 使得 $s_j=t_{i_j}, 1\leq j\leq n$. 于是, $A=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n:(x_{i_1},\cdots,x_{i_n})\in B\}$. 注意到 $Q_{\underline{t}}$ 和 $Q_{\underline{s}}$ 都是 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 上的测度, 由于 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)=\sigma(\underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R})\times\cdots\times\mathcal{B}(\mathbb{R})}_{n\text{ 个}})$ (习题), 根据 σ-有限测度延拓的唯一性 (这里 $Q_{\underline{t}}, Q_{\underline{s}}$ 都是概率测度), 只需对 $A=A_1\times\cdots\times A_n$ (其中 $A_i\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$) 的情形证明 $Q_{\underline{t}}(A)=Q_{\underline{s}}(B)$, 而此时 $B=A_{i_1}\times\cdots\times A_{i_n}$. 所以根据相容性条件 a) 就得到结论.
- 情形 2: $m>n$, 且 $\{t_1,\cdots,t_n\}\subset\{s_1,\cdots,s_m\}$. 用情形 1 结论, 不失一般性, 可设 $s_j=t_j, j=1,\cdots,n$. 此时 $B=A\times\mathbb{R}^{m-n}$. 于是由相容性条件 b) 得到 $Q_{\underline{t}}(A)=Q_{\underline{s}}(B)$.
- 其余情形: 基本思想–利用相容性扩充指标. 记 $\{q_1,\cdots,q_l\}=\{t_1,\cdots,t_n\}\cup\{s_1,\cdots,s_m\}$, 其中 $m\vee n<l\leq m+n$, 置 $\underline{q}=(q_1,\cdots,q_l)\in T$, 则 C 可以表为 $C=\{\omega\in\mathbb{R}^{[0,\infty)}:(\omega(q_1),\cdots,\omega(q_l))\in E\}$, 其中 $E\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^l)$. 具体来讲, 可以设 $q_j=t_j, j=1,\cdots,n$, 那么 $E=A\times\mathbb{R}^{l-n}$. 由情形 2 的结论, $Q_{\underline{t}}(A)=Q_{\underline{q}}(E)$.
  类似的, 通过置换 $\underline{q}$ 得到指标 $\underline{p}=(p_1,\cdots,p_l)$, 使得 $p_1=s_1,\cdots,p_m=s_m$. 此时 $C=\{\omega\in\mathbb{R}^{[0,\infty)}:(\omega(p_1),\cdots,\omega(p_l))=E'\}$, 其中 $E'=B\times\mathbb{R}^{l-m}$, 它是通过对 E 做坐标重新排序得到的. 根据相容性条件 a), $Q_{\underline{q}}(E)=Q_{\underline{p}}(E')$. 另外, 根据相容性条件 b), 也有 $Q_{\underline{p}}(E')=Q_{\underline{s}}(B)$.
  结合上述结论, 就得到 $Q_{\underline{t}}(A)=Q_{\underline{s}}(B)$.

Q 的有限可加性: 设 $\{C_j\}_{j=1}^m\subset\mathcal{C}$, 由上述论证, 存在自然数 n 以及指标 $\underline{t}=(t_1,\cdots,t_n)\in T$, 使得 $C_j=\{\omega\in\mathbb{R}^{[0,\infty)}:(\omega(t_1),\cdots,\omega(t_n))\in A_j\}$, 其中 $A_j\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. 则 C_j 互不相交<u>当且仅当</u>A_j 互不相交. 于是 $\cup_{j=1}^m C_j=\{\omega\in\mathbb{R}^{[0,\infty)}:(\omega(t_1),\cdots,\omega(t_n))\in\cup_{j=1}^m A_j\}$, 从而 $Q(\cup_{j=1}^m C_j)=Q_{\underline{t}}(\cup_{j=1}^m A_j)=\sum_{j=1}^m Q_{\underline{t}}(A_j)=\sum_{j=1}^m Q(C_j)$.

$Q(\mathbb{R}^{[0,\infty)})=1$: $\mathbb{R}^{[0,\infty)}=\{\omega:\ \omega(t)\in\mathbb{R}\}$, 于是 $Q(\mathbb{R}^{[0,\infty)})=Q_t(\mathbb{R})=1$. 注意 Q_t 是 $\mathbb{R}$ 上的概率测度.

Q 的可列可加性: 设 $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathcal{C}$, 互不相交, 且 $B=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\in\mathcal{C}$ (仍是柱集), 要证明 $Q(B)=\sum_{k=1}^{\infty}Q(B_k)$.

- 记 $C_m=B-\sum_{k=1}^{m}B_k\in\mathcal{C}$, 则 $B=C_m+\sum_{k=1}^{m}B_k$. 利用 Q 的有限可加性, $Q(B)=Q(C_m)+\sum_{k=1}^{m}Q(B_k)$. 所以只需证明 $\lim_{m\to\infty}Q(C_m)=0$. 注意到 $C_m=C_{m+1}+B_m$, 所以 $\{Q(C_m)\}$ 是非负的单调递减序列, 从而必有极限. 以下用反证法, 设 $\lim_{m\to\infty}Q(C_m)=\varepsilon>0$. 另一方面, 注意 B_k 互不相交 $\Rightarrow\cap_{m=1}^{\infty}C_m=\emptyset$. 我们由此要导出矛盾.
- 柱集列 $\{C_m\}$ 的规范化. 由 $\{C_m\}_{m=1}^{\infty}$ 构造 $\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$, 使得
  - i) $D_1\supset D_2\supset\cdots,\cap_{m=1}^{\infty}D_m=\emptyset$, $\lim_{m\to\infty}Q(D_m)=\varepsilon>0$;
  - ii) $D_m=\{\omega\in\mathbb{R}^{[0,\infty)}:(\omega(t_1),\cdots,\omega(t_m))\in B_m\}$, 这里 $B_m\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, $\underline{t}_m=(t_1,\cdots,t_m)\in T$, 且 $\underline{t}_m$ 是 $\underline{t}_{m-1}$ 的延申, 即 $\underline{t}_{m-1}=(t_1,\cdots,t_{m-1})$.

  $\{D_m\}$ 的构造:

  - 由于 $C_k\in\mathcal{C}$, 具有形式 $C_k=\{\omega\in\mathbb{R}^{[0,\infty)}:(\omega(t_1),\cdots,\omega(t_{m_k}))\in A_{m_k}\}$, 其中 $A_{m_k}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m_k})$, $\underline{t}_{m_k}=(t_1,\cdots,t_{m_k})\in T$. 由于 $C_k\supset C_{k+1}$, 可取 $\underline{t}_{m_{k+1}}$ 是 $\underline{t}_{m_k}$ 的延申, 且 $A_{m_{k+1}}\subset A_{m_k}\times\mathbb{R}^{m_{k+1}-m_k}$.
  - 定义 $D_1\doteq\{\omega:\omega(t_1)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^{[0,\infty)},\cdots,D_{m-1}\doteq\{\omega:(\omega(t_1),\cdots,\omega(t_{m_1-1}))\in\mathbb{R}^{m_1-1}\}$; $\quad D_{m_1}\doteq C_1$, $D_{m_1+1}\doteq\{\omega:(\omega(t_1),\cdots,\omega(t_{m_1}),\omega(t_{m_1+1}))\in A_{m_1}\times\mathbb{R}\},\cdots,D_{m_2-1}\doteq\{\omega:(\omega(t_1),\cdots,\omega(t_{m_1}),\omega(t_{m_1+1}),\cdots,\omega(t_{m_2-1}))\in A_{m_1}\times\mathbb{R}^{m_2-m_1-1}\}$, $D_{m_2}\doteq C_2,\cdots$. 由此可确定 B_m.
  - 注意 $\cap_{m=1}^{\infty}D_m\subset\cap_{m=1}^{\infty}C_m=\emptyset$. 容易验证要求 i) 和 ii) 都成立.

Borel 集的正则性

定理

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 中的每个子集 A 都是 正则 的: 对于 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ 上任意给定的有限测度 μ, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在闭集 F 和开集 G, 使得 $F \subset A \subset G$, 且 $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.

证明 这里基于结构的证明方法是非常典型而且重要的: 证明正则集包含闭集, 而且正则集全体 $\mathcal{M}$ 构成一个 σ-代数, 那么这个 σ-代数就包含 Borel 代数 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 从而 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 必正则.

1. 设 F 是闭集, 证明 $F \in \mathcal{M}$. 对任意 $k \in \mathbb{N}$, 作开集 $G_k = \cup_{y \in F} B(y; \frac{1}{k})$, 显然 $G_1 \supset G_2 \supset \cdots$, 且 $\cap_{k=1}^{\infty} G_k = F$. 由于 μ 是有限测度, $\mu(G_1) \leq \mu(\mathbb{R}^n) < +\infty$, 从而根据测度的下连续性, $\lim_{k \to \infty} \mu(G_k) = \mu(F)$. 于是存在 m 使得 $\mu(G_m \setminus F) = \mu(G_m) - \mu(F) < \varepsilon$. 所以由 $F \subset F \subset G_m$, 知 F 是正则的. 特别的, 由于 $\mathbb{R}^n$ 既开又闭, 故 $\mathbb{R}^n \in \mathcal{M}$.

2. 设 $A \in \mathcal{M}$, 则由 $F \subset A \subset G \Rightarrow G^c_{\text{闭}} \subset A^c \subset F^c_{\text{开}}$, 且 $\mu(F^c \setminus G^c) = \mu(G \setminus F) < \varepsilon$. 所以 A^c 也正则.

3. 设 $A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k, A_k \in \mathcal{M}$. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 闭集 F_k, 开集 G_k, 使得 $F_k \subset A_k \subset G_k$, 且 $\mu(G_k \setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. 置 $G \doteq \cup_{k=1}^{\infty} G_k$, 它是包含 A 的开集. 又对待定的 m, 作闭集 $F_{(m)} \doteq \cup_{k=1}^{m} F_k$, 则 $F_{(m)} \subset A \subset G$. 记 $\tilde{F} \doteq \cup_{k=1}^{\infty} F_k$, 注意 $\cup_{m=1}^{\infty} F_{(m)} = \tilde{F}$. 因为$G \setminus F_{(m)} = (G \setminus \tilde{F}) \cup (\tilde{F} \setminus F_{(m)})$, $\mu(G \setminus \tilde{F}) = \mu(\cup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus \tilde{F}) \leq \mu(\cup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus F_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(G_k \setminus F_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \frac{\varepsilon}{2}$; 而由测度的上连续性, $\lim_{m \to +\infty} \mu(F_{(m)}) = \mu(\tilde{F})$, 故 $\mu(\tilde{F} \setminus F_{(m)}) = \mu(\tilde{F}) - \mu(F_{(m)}) \to 0$, 于是存在 m 使得$\mu(\tilde{F} \setminus F_{(m)}) < \frac{\varepsilon}{2}$. 这就证明了 $\mu(G \setminus F_{(m)}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. 于是 $A \in \mathcal{M}$. 这就证明了 $\mathcal{M}$ 是个 σ-代数. □

柱集列 $\{D_m\}$ 的紧化:

- i) $D_1 \supset D_2 \supset \cdots$, $\cap_{m=1}^{\infty} D_m = \emptyset$, $\lim_{m\to\infty} Q(D_m) = \varepsilon > 0$;
- ii) $D_m = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} : (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_m)) \in A_m\}$, 这里 $A_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

第一步: 由 A_m 的正则性, 存在闭集 $F_m \subset A_m$, 使得 $Q_{\underline{t}_m}(A_m \setminus F_m) \le \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{2^m}$. 又 $\cup_{R>0} F_m \cap \overline{B(0;R)} = F_m$, 由测度的上连续性, R 充分大时 $Q_{\underline{t}_m}(F_m \setminus (F_m \cap \overline{B(0;R)})) < \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{2^m}$. 令 $K_m \doteq F_m \cap \overline{B(0;R)}$), 它是紧集. 那么 $Q_{\underline{t}_m}((A_m \setminus F_m) \cup (F_m \setminus K_m)) < \frac{\varepsilon}{2^m}$. 置柱集 $E_m \doteq \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} : (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_m)) \in K_m\}$, 则 $E_m \subset D_m$, 且 $Q(D_m \setminus E_m) = Q_{\underline{t}_m}(A_m \setminus K_m) \le \frac{\varepsilon}{2^m}$.

第二步: 由于 $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$ 未必是递减的柱集序列, 置 $\tilde{E}_m \doteq \cap_{k=1}^m E_k$, 则 $\tilde{E}_m = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} : (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_m)) \in \tilde{K}_m\}$, 其中 $\tilde{K}_m = (K_1 \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap (K_2 \times \mathbb{R}^{m-2}) \cap \cdots \cap (K_{m-1} \times \mathbb{R}) \cap K_m$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的紧集. 此外, 由于 $\tilde{E}_m \subset E_m \subset D_m$, 故成立 $\cap_{m=1}^{\infty} \tilde{E}_m = \emptyset$.

第三步: 通过测度的估计得到 $\cap_{m=1}^{\infty} \tilde{E}_m \ne \emptyset$, 从而导致矛盾.

[$D_m \setminus \tilde{E}_m = D_m \cap \tilde{E}_m^c = D_m \cap (\cap_{k=1}^m E_k)^c = D_m \cap (\cup_{k=1}^m E_k^c) = \cup_{k=1}^m (D_m \cap E_k^c) = \cup_{k=1}^m (D_m \setminus E_k)$.]

首先证明对任意 m, $\tilde{K}_m$ 非空. 事实上, $Q_{\underline{t}_m}(\tilde{K}_m) = Q(\tilde{E}_m) = Q(D_m) - Q(D_m \setminus \tilde{E}_m) = Q(D_m) - Q(\cup_{k=1}^m (D_m \setminus E_k)) \xrightarrow[k<m\text{ 时 } D_m \subset D_k]{} \ge Q(D_m) - Q(\cup_{k=1}^m (D_k \setminus E_k)) \ge \varepsilon - \sum_{k=1}^m Q(D_k \setminus E_k) = \varepsilon - \sum_{k=1}^m \frac{\varepsilon}{2^k} > 0, \forall m$. 于是 $\tilde{K}_m \ne \emptyset$.

于是, 对任意 $m \in \mathbb{N}$, 存在 $(x_1^{(m)}, \cdots, x_m^{(m)}) \in \tilde{K}_m$. 特别的, $\{x_1^{(m)}\} \subset K_1$. 由于 K_1 紧, 有收敛子列 $x_1^{(m_k)} \to x_1 \in K_1 = \tilde{K_1}$. 对点列 $\{(x_1^{(m_k)}, x_2^{(m_k)})\} \subset \tilde{K}_2 = (K_1 \times \mathbb{R}) \cap K_2 \subset \tilde{K}_2$, 可找到子列收敛到 $(x_1, x_2) \in \tilde{K}_2$. 依次归纳得到点列 $(x_1, x_2, x_3, \cdots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, 使得对任意的 m, $(x_1, \cdots, x_m) \in \tilde{K}_m$. 于是柱集 $S = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} : \omega(t_i) = x_i, i = 1, 2, \cdots\} \subset \tilde{E}_m, \forall m$, 从而 $\cap_{m=1}^{\infty} \tilde{E}_m \ne \emptyset$, 矛盾! Kolmogorov 定理证毕!

定理

存在 $(\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)}))$ 上的概率测度 $\mathbb{P}$, 使得坐标映射过程 $\boxed{W_t(\omega) \doteq \omega(t), \omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}, t \geq 0}$ 具有如下性质: *1)* $W_t - W_s \backsim N(0, t-s), \forall t > s \geq 0$; *2)* $\forall 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n, W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ 独立.

证明 用 Kolmogorov 定理, 给出相容的有限维概率分布族. 任意给定 $\underline{t} = (t_1, \cdots, t_n) \in T$ $(t_i > 0$, 互不相同, 但未必递增). 将 t_i 置换, 使得 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, 定义 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ 上的概率测度 $Q_{\underline{t}}$, 其概率密度函数是 $f(x_1, \cdots, x_n) = g(x_1, t_1 | 0) g(x_2, t_2 - t_1 | x_1) \cdots g(x_n, t_n - t_{n-1} | x_{n-1})$, 而 $g(x, t | y) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}$ 是概率转移函数, 它关于 x 的积分是 1. 由此不难知道如此构造的有限维概率分布 $\{Q_{\underline{t}}\}$ 满足两个相容条件. 由 Kolmogorov 定理, 得到 Wiener 测度 $\mathbb{P}$. 由联合概率密度函数 f, 通过多重积分换元公式, 容易验证性质 1) 和 2). 证毕.

注意 1: $W_t(\omega)$ 关于 t 未必连续, 所以后续需要修正, 使得 $\mathbb{P}$-几乎所有的轨道关于 t 连续. 特别的, 此时, 由 $\mathbb{E}[W_t^2] = t$, 利用 Fatou 引理和 Cauchy 不等式知道 $\int_{\mathbb{R}^{[0,\infty)}} \lim_{t\to 0} |W_t(\omega)| \, d\mathbb{P}(\omega) \leq \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^{[0,\infty)}} |W_t(\omega)| \, d\mathbb{P}(\omega) \leq \lim_{t\to 0} t^{\frac{1}{2}} = 0$, 即以 $\mathbb{P}$-概率 1, 可定义使得 $W_0 = 0$.

注意 2: 设 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})$ 且 $B \subset C([0,\infty))$, 则 $B = \emptyset$. 证明: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})$ 中元素都有如下形式 (习题): $B = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} : (\omega(t_1), \omega(t_2), \cdots) \in A\}$, 其中 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots)$. 设 $\omega \in B$ 是个连续函数. 任取 $\bar{t} \notin \{t_1, t_2, \cdots\}$, 定义函数 $\bar{\omega}$ 使得当 $t \neq \bar{t}$ 时 $\bar{\omega}(t) = \omega(t)$, 但 $\bar{\omega}(\bar{t}) = \omega(\bar{t}) + 1$. 显然 $\bar{\omega} \in B$ 但不连续. 故 $B = \emptyset$. 证毕.

意义: 相对于样本空间 $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$, σ-代数 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})$ 太小 (粗, 即其中的单个的事件集过大, 或者说可测集个数太少, 使得测度 $\mathbb{P}$ 在" 小集"$C([0,\infty))$ 上无定义, 或者说 $C([0,\infty)) \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})$). 这是用 Kolmogorov 定理构造无限维空间上测度时常会出现的一个不足, (如构造双曲守恒律方程组的统计解等), 需要根据具体问题的特点修正 (研究其支集). □

随机过程的 Kolmogrov 连续化修正定理

定理

设概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上随机过程 $X(t)$ $(0 \leq t \leq T)$ 满足如下条件: 存在 $\alpha,\ \beta > 0,\ C > 0$, 使得 $\boxed{\mathbb{E}[|X(t) - X(s)|^{\alpha}] \leq C|t-s|^{1+\beta}, \quad \forall\, T \geq t,\ s \geq 0.}$ 那么存在 $X(t)$ 的一个修正 $\tilde{X}(t)$, 使得对任意 $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$, 存在常数 $\delta = \delta(\gamma)$ 和正值随机变量 $h(\omega)$, 使得 $\boxed{\mathbb{P}\left[\omega : \sup_{s,t\in[0,T],0<|t-s|<h(\omega)} \frac{|\tilde{X}(t,\omega) - \tilde{X}(s,\omega)|}{|t-s|^{\gamma}} \leq \delta\right] = 1.}$

概念: (刻画两个随机过程的相近程度) a) 称随机过程 X, Y不可区分, 如果他们几乎所有的轨道都相同: $\mathbb{P}[\omega \in \Omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega), \forall t \geq 0] = 1$. b) 称随机过程 Y 是 X 的修正(modification), 如果对任意给定的 $t \geq 0$, 都成立 $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$. c) 称 X 和 Y有相同的有限维分布, 如果对任意的 $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$ 和 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 都有 $\mathbb{P}[(X(t_1), \cdots, X(t_n)) \in A] = \mathbb{P}[(Y(t_1), \cdots, Y(t_n)) \in A]$. 显然, a)⇒b)⇒c).

Chebyshev 不等式: 设 X 是给定概率空间 $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ 上的随机变量, $1 \leq p < +\infty$, 则对任意 $\lambda > 0$, 成立 $\mathbb{P}(|X| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p}\mathbb{E}[|X|^p]$. □

Borel-Cantelli 定理

设 $A_1, A_2, \ldots$ 是概率空间 Ω 中可列无限个事件, 则事件 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega \in \Omega: \text{存在无限个 } i, \text{ 使得 } \omega \in A_i\}$ 表示使得事件族 $\{A_n\}$ 无限次发生的样本点的集合, 记作 $A_n - \text{i.o.}$ (infinite often). 显然,
$\Omega \setminus (A_n - \text{i.o.}) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}(\Omega \setminus A_k) = \{\omega \in \Omega: \text{存在 } n, \text{ 使得当 } k \geq n \text{ 时}, \omega \notin A_k\}$.

定理

设 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, 则 $\mathbb{P}(A_n - \text{i.o.}) = 0$.

证明: 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 成立

$$0 \leq \mathbb{P}(A_n - \text{i.o.}) \leq \mathbb{P}(\cup_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ 收敛的 Cauchy 原理, 上式右端当 $n \to \infty$ 时趋于零, 根据夹挤收敛定理就得结论. □

Kolmogorov 连续化修正定理的证明

不妨取 $T=1$. 注意随机过程 $X(t,\omega)$ 也常简写为 X_t.

- 由上面的 Chebyshev 不等式, $\forall\epsilon>0$, 有 $\mathbb{P}[|X_t-X_s|\geq\epsilon]\leq\frac{\mathbb{E}[|X_t-X_s|^\alpha]}{\epsilon^\alpha}\leq C\epsilon^{-\alpha}|t-s|^{1+\beta}$ $(*)$. 于是, 当 $s\to t$ 时 X_s 依概率收敛到 X_t. 特别的, X_s 几乎处处收敛到 X_t.
- 在上面的不等式 $(*)$ 中取 $t=\frac{k}{2^n}, s=\frac{k-1}{2^n}, \epsilon=2^{-\gamma n}$, 其中 $0<\gamma<\beta/\alpha$, 就得到 $\mathbb{P}[|X(\frac{k}{2^n})-X(\frac{k-1}{2^n})|\geq 2^{-\gamma n}]\leq C2^{-n(1+\beta-\alpha\gamma)}$. 于是, $\mathbb{P}\left[\max_{1\leq k\leq 2^n}|X(\frac{k}{2^n})-X(\frac{k-1}{2^n})|\geq 2^{-\gamma n}\right]\leq$ $\mathbb{P}\left[\cup_{k=1}^{2^n}\left\{|X(\frac{k}{2^n})-X(\frac{k-1}{2^n})|\geq 2^{-\gamma n}\right\}\right]\leq C2^n2^{-n(1+\beta-\alpha\gamma)}=C2^{-n\underbrace{(\beta-\alpha\gamma)}_{>0}}$. 由于 $\sum_{n=1}^\infty C2^{-n(\beta-\alpha\gamma)}<+\infty$, Borel-Cantelli 定理告诉我们: 存在 $\Omega^*\in\mathcal{F}, \mathbb{P}(\Omega^*)=1$, 使得对任意 $\omega\in\Omega^*$, 存在正的整数值随机变量 $n^*(\omega)$, 当 $n\geq n^*(\omega)$ 时, $\max_{1\leq k\leq 2^n}|X(\frac{k}{2^n},\omega)-X(\frac{k-1}{2^n},\omega)|<2^{-\gamma n}$ $(\clubsuit)$.
- 现在将上述结论推广到任意二进有理数. 置 $D_n\doteq\{\frac{k}{2^n}:k=0,1,\cdots,2^n\}, D\doteq\cup_{n=1}^\infty D_n$. 取 (很接近的)$t_1,t_2\in D$, $0<t_2-t_1<1$, 使得对 $t\doteq t_2-t_1$, 不等式 $2^{-n}\leq t<2^{-(n-1)}$ 对某个 $n\geq n^*(\omega)$ 成立. 那么存在自然数 i,j 使得 $t_1\leq\frac{i}{2^n}\leq\frac{j}{2^n}\leq t_2$. 于是 $\frac{j-i}{2^n}\leq t<\frac{1}{2^{n-1}}$, 从而 $j=i$ 或 $j=i+1$. 此外, t_1, t_2 可表示为 $t_1=\frac{i}{2^n}-\frac{1}{2^{p_1}}-\cdots-\frac{1}{2^{p_k}}$ $(n<p_1<\cdots<p_k), t_2=\frac{j}{2^n}+\frac{1}{2^{q_1}}+\cdots+\frac{1}{2^{q_l}}$ $(n<q_1<\cdots<q_l)$.

下面不断利用 (♣): 当 $n \geq n^*(\omega)$ 时, $\max_{1\leq k\leq 2^n} |X(\frac{k}{2^n},\omega) - X(\frac{k-1}{2^n},\omega)| < 2^{-\gamma n}$. 首先, 由于 $2^{-n} \leq t < 2^{-(n-1)}$,

$$\left|X\left(\frac{j}{2^n},\omega\right) - X\left(\frac{i}{2^n},\omega\right)\right| \leq \frac{j-i}{2^{n\gamma}} \leq t^\gamma. \tag{2}$$

其次, 对 $r = 1, \ldots, k$, 成立

$$\left|X\left(\frac{i}{2^n} - \frac{1}{2^{p_1}} - \cdots - \frac{1}{2^{p_r}},\omega\right) - X\left(\frac{i}{2^n} - \frac{1}{2^{p_1}} - \cdots - \frac{1}{2^{p_{r-1}}},\omega\right)\right| \leq \left|\frac{1}{2^{p_r}}\right|^\gamma,$$

从而, 由于 $p_r > n$ 意味着 $p_r \geq n + r$, 就有

$$\left|X(t_1,\omega) - X\left(\frac{i}{2^n},\omega\right)\right| \leq \sum_{r=1}^{k}\left|\frac{1}{2^{p_r}}\right|^\gamma \leq \frac{1}{2^{n\gamma}}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2^{r\gamma}} = \frac{c}{2^{n\gamma}} \leq ct^\gamma. \quad (c \doteq \frac{1}{2^\gamma - 1}) \tag{3}$$

类似可得

$$\left|X(t_2,\omega) - X(\frac{j}{2^n},\omega)\right| \leq ct^\gamma. \tag{4}$$

利用三角不等式以及 (2)-(4), 就得到: 只要 $|t_1 - t_2| < h(\omega) = 2^{1-n^*(\omega)}$, 且 $t_1, t_2 \in D$, 就有

$$\boxed{|X(t_2,\omega) - X(t_1,\omega)| \leq \delta|t_1 - t_2|^\gamma, \quad \delta = 2c + 1.} \tag{5}$$

这证明了对固定的 $\omega \in \Omega^*$, 轨道 $X_t(\omega)$ 关于变量 t 在 D 上的一致连续性.

现在定义 $\tilde{X}$:

- 对 $\omega \notin \Omega^*$, 定义 $\tilde{X}_t(\omega) \doteq 0, \forall t \in [0,1]$. 注意 $\Omega \setminus \Omega^*$ 是一个 $\mathbb{P}$-零测集.
- 对 $\omega \in \Omega^*$ 和 $t \in D$, 定义 $\tilde{X}_t(\omega) \doteq X_t(\omega)$.
- 对 $\omega \in \Omega^*$ 和 $t \in [0,1] \setminus D$, 利用极限定义 $\tilde{X}_t(\omega)$: 由 D 的稠密性, 取一列 $\{s_n\} \subset D$ 收敛到 t. (5)表明 $\{X(s_n, \omega)\}$ 是个 Cauchy 列, 从而定义 $\tilde{X}(t,\omega) \doteq \lim_{n\to\infty} X(s_n, \omega)$. 注意(5)也表明该极限与 $\{s_n\}$ 的取法无关, 所以定义合理.

由此, $\tilde{X}(t,\omega)$ 关于 t 连续, 而且(5)对 $\tilde{X}$ 也成立.

最后说明 $\tilde{X}$ 是 X 的修正. i) 对 $t \in D$, 有 $X_t = \tilde{X}_t$ a.e. $\omega \in \Omega$. ii) 对 $t \in D^c$, 一方面对 $\omega \in \Omega^*$, $\tilde{X}_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} X(s_n, \omega)$; 又 $X(s_n)$ 依测度收敛到 $X(t)$, 从而几乎处处收敛. 由点态收敛极限唯一性, 也就是说, X_t 几乎处处与 $\tilde{X}_t$ 相同. 结论: 故 $\forall 1 \geq t \geq 0$, 都成立 $\mathbb{P}(\tilde{X}_t = X_t) = 1$. 特别的, $\tilde{X}$ 与 X 有相同的有限维概率分布. $\square$

Brown 运动的存在性

定理 (Brown 运动的存在性)

存在 $(\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)}))$ 上的概率测度 $\mathbb{P}$ 以及随机过程 B_t $(t \geq 0)$, 使得关于 $\mathbb{P}$, B_t 是个 Brown 运动. 进一步, 对任意 $\gamma \in (0, 1/2)$, 几乎所有的轨道都是 C^γ 的.　　$\mathbb{P}$ 称作 Wiener 测度, 也记作 $\mathbb{W}$.

证明 对由 Kolmogorov 扩张定理构造的随机过程 $W(t)$, 设 $t > s$, $r \doteq t - s$, 利用 $W(t) - W(s) \sim N(0, r)$, 不难算得, 对任意自然数 m, $\mathbb{E}\left[|W(t) - W(s)|^{2m}\right] = \frac{1}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} |x|^{2m} e^{-\frac{|x|^2}{2r}}\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} r^m \int_{\mathbb{R}} |y|^{2m} e^{-\frac{|y|^2}{2}}\, dy = Cr^m = C|t - s|^m$.
取 $\beta = 2m$, $\alpha = m - 1$, 用 Kolmogorov 连续化修正定理, 由 $W(t)$ 得到它的修正 $B^T(t, \omega) \in C^\gamma([0, T])$, 其中只要选取 m 充分大使得 $0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta} = \frac{m-1}{2m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}$ 成立即可. 注意 W_t 和 B_t^T 有相同的有限维分布, 所以 B_t^T 仍具有平稳独立增量性质, 且增量服从正态分布. 记 $\Omega_T \doteq \{\omega : B^T(t, \omega) = W(t, \omega), \forall t \in \mathbb{Q} \cap [0, T]\}$, 其中 $T = 1, 2 \cdots$. 则 $\mathbb{P}(\Omega_T) = 1$. 置 $\tilde{\Omega} \doteq \cap_{T=1}^{\infty} \Omega_T$, 注意到 $\Omega_T \supset \Omega_{T+1}$, 由测度的下连续性, 有 $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) = 1$. 对 $\omega \in \tilde{\Omega}$ 和任意的 $T_1, T_2 \in \mathbb{N}$, $B^{T_1}(t, \omega) = B^{T_2}(t, \omega) = W(t, \omega)$ 对任意的 $t \in \mathbb{Q} \cap [0, T_1 \wedge T_2]$ 都成立, 从而由连续性, $B^{T_1}(t, \omega) = B^{T_2}(t, \omega), \forall t \in [0, T_1 \wedge T_2]$. 这就对 $\omega \in \tilde{\Omega}$ 定义出了 $B(t, \omega), \forall t \geq 0$. 对 $\omega \notin \tilde{\Omega}$, 置 $B(t, \omega) \equiv 0, \forall t \geq 0$. Brown 运动 B_t 的构造完毕. $\square$

Wiener 测度的直观理解: 设 A 是一族曲线的集合, $\mathbb{W}(A)$ 即从原点出发的一颗花粉的运动路径在 A 中的概率.

连续曲线空间上直接构造 Brown 运动

- 样本空间 $\Omega \doteq C_{(0)}([0,T]) = \{x \in C([0,T]) : x(0) = 0\}$; $C_{(\xi)}([0,T]) = \{x \in C([0,T]) : x(0) = \xi\}$. 给定一致收敛拓扑: $\|x\| \doteq \max_{0 \le t \le T} |x(t)|$, 对应的 Borel 代数: $\mathcal{B}$. 注意 $C_{(0)}([0,T])$ 是可分的度量空间, 从而是第二可数空间 (拥有可数的拓扑基, 从而任意开集可表示为可列个开球的并). [参考—袁海荣编: 点集拓扑学讲义, 第八讲 (60 页定理 5, 以及第 6 页, 定理 1). http://math.ecnu.edu.cn/ hryuan/preprint/tp.pdf]
- $C_{(0)}([0,T])$ 上柱集构成的 Boole 代数: $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ 生成的 σ-代数为 $\sigma(\mathcal{C})$.

  $C_{(0)}([0,T])$ 中的 n 维柱集: 具有如下形式的子集 $\boxed{C = \{\omega \in C_{(0)}([0,T]) : (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_n)) \in A\}}$, 其中 $n \in \mathbb{N}, t_i \in [0,T], i = 1, 2, \cdots, n$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. (要求 t_i 互不相同.)
- 用 Kolmogorov 扩张定理直接在 $C_{(0)}([0,T])$ 上构造 Brown 运动 — 只需要证明 $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$, 其它步骤完全相同.

  [意义: 拓扑与测度结构的结合, 保证了连续函数关于任意 Borel 测度的可积性.]

  证明 1. 对上述柱形集 C, 做映射 $\Phi : C_{(0)}([0,T]) \to \mathbb{R}^n; \omega \mapsto (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_n))$. 显然这是个连续映射 (第二可数空间必是第一可数空间, 第一可数空间上映射连续性可用序列收敛刻画. 同上参考文献). 故 $C = \Phi^{-1}(A) \in \mathcal{B}$. 于是 $\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}$.

  2. 对任意 $r > 0$, 由于 $\{\omega \in C_{(0)}([0,T]) : \|\omega\| \le r\} = \cap_{n=1}^{\infty} \{\omega \in C_{(0)}([0,T]) : |\omega(\frac{k}{2^n})| \le r, k = 1, \cdots, [2^n T]\}$, 即任意闭球都在 $\sigma(\mathcal{C})$ 中. 由于任意开球可表为可列闭球的并: $\{\omega \in C_{(0)}([0,T]) : \|\omega\| < r\} = \cup_{m=1}^{\infty} \{\omega \in C_{(0)}([0,T]) : \|\omega\| \le r - \frac{1}{m}\}$, 故开球都在 $\sigma(\mathcal{C})$ 中; 由于任意开集可表为可列个开球的并, 故 $C_{(0)}([0,T])$ 中任意开集都在 $\sigma(\mathcal{C})$ 中. $\mathcal{B}$ 作为开集生成的最小 σ-代数, 就有 $\mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{C})$. □
- 记 $C_{(0)}([0,T])$ 上 Wiener 测度为 $\mathbb{W}$, 做映射 $\tau_\xi : C_{(0)}([0,T]) \to C_{(\xi)}([0,T]), \omega(t) \mapsto \omega(t) + \xi$, 诱导出 $C_{(\xi)}([0,T])$ 上 Wiener 测度 $\mathbb{W}_\xi \doteq (\tau_\xi)_\sharp(\mathbb{W})$. 由于 $C_{(0)}([0,T]) \subset C([0,T])$, 也诱导出 $C([0,T])$ 上 Wiener 测度 $\mathbb{W}$ (其支集在 $C_{(0)}([0,T])$ 上).

Brown 运动几乎所有路径变差处处无限

定理

设 $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ 是标准 *Brown* 运动, 那么

1) 对任意 $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1]$, *a.e.* ω, $t \mapsto W(t, \omega)$ 处处都不是 C^γ 连续的;

2) 对 *a.e.* ω, $t \mapsto W(t, \omega)$ 处处不可微, 且在任何区间上变差都是无界的.

证明 结论 2) 是结论 1) 的推论. 事实上, 如果 $t \mapsto W(t, \omega)$ 在某点可微, 则它在该点满足 $\gamma = 1$ 的 Hölder 连续性条件, 与 1) 矛盾; 若 $t \mapsto W(t, \omega)$ 在某区间上变差有界, 则因有界变差函数几乎处处可导, 从而 $t \mapsto W(t, \omega)$ 在某点可导, 与前一结论矛盾. 下面证明 1). 基本思想还是构造恰当的集合并巧妙地估计其测度大小.

1 只需考虑一维 Brown 运动 $W(t)$, $t \in [0, 1]$, $T = 1$. 由于假设 $\gamma > \frac{1}{2}$, 可取定充分大的 N, 使得

$$N \cdot \left(\gamma - \frac{1}{2}\right) > 1. \tag{6}$$

假设样本点 ω 使得函数 $W(t, \omega)$ 在 $s \in (0, 1)$ 点满足 γ-阶 Hölder 连续性, 即存在常数 $K > 0$, 使得

$$|W(t, \omega) - W(s, \omega)| \leq K|t - s|^\gamma, \quad \forall t \in [0, 1]. \tag{7}$$

注意这里的 s 以及 K 等都与 ω 有关. 我们要看所有这样的 ω 落在什么样的集合中, 并估计这个集合的测度为零.

2 为此, 对 n 充分大 (依赖于 s 和 N, 从而和 ω 有关), 记 $i \doteq [ns]+1$, 则对 $j=i,\ i+1,\ \ldots,\ i+N-1$ 这 N 个指标, 由于 $s<1$, 都成立 $i\leq n$, 以及 $\frac{j+1}{n}\leq\frac{i+N}{n}<s+\frac{1+N}{n}<1$. 于是

$$\begin{aligned}\left|W\left(\frac{j+1}{n},\omega\right)-W\left(\frac{j}{n},\omega\right)\right| &\leq \left|W\left(\frac{j}{n},\omega\right)-W(s,\omega)\right|+\left|W(s,\omega)-W\left(\frac{j+1}{n},\omega\right)\right| \\ &\leq K\left(\left|s-\frac{j}{n}\right|^{\gamma}+\left|s-\frac{j+1}{n}\right|^{\gamma}\right)=\frac{K}{n^{\gamma}}\left(|sn-j|^{\gamma}+|sn-j-1|^{\gamma}\right)\leq\frac{M}{n^{\gamma}}.\end{aligned}$$

这里利用 $i-1=[ns]\leq ns$, 从而 $|sn-j|\leq|i-1-(i+N-1)|\leq N$, 可取 $M=2K(N+1)^{\gamma}$. 于是我们得到, 若 ω 满足 (7), 则存在常数 $M>0$, 对所有充分大的 n, 对某个 $1\leq i\leq n$, 成立

$$\omega\in A^{i}_{M,n}\doteq\left\{\left|W\left(\frac{j+1}{n},\omega\right)-W\left(\frac{j}{n},\omega\right)\right|\leq\frac{M}{n^{\gamma}},\ \forall j=i,\ \ldots,\ i+N-1\right\}.$$

3 由此, 我们看到满足 (7) 的所有样本点 ω 必然包含在如下集合中:

$$\bigcup_{M=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{n}A^{i}_{M,n}. \tag{8}$$

这里第一个并 $\cup_{M=1}^{\infty}$ 表示 "存在常数 $M>0$", $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}$ 表示 "对所有充分大的 n", $\bigcup\limits_{i=1}^{n}$ 表示 "对某个 $1\leq i\leq n$".

(注: 关于有界变差函数, 可参考任意一本实变函数教材. 例如 [Stein, Elias M.; Shakarchi, Rami.: Real analysis. Measure theory, integration, and Hilbert spaces. Princeton Lectures in Analysis, 3. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005] 或 [那汤松 (著), 徐瑞云 (译), 陈建功 (校): 实变函数论 (第五版), 高等教育出版社, 2010 年].)

4 下面说明上述集合的测度为零. 首先估计 $A^i_{M,n}$ 的测度. 注意到 $W(\frac{j+1}{n})-W(\frac{j}{n})$ $(j=i,\ldots,i+N-1)$ 的独立性, 且均服从正态分布 $N(0,\frac{1}{n})$, 则

$$\mathbb{P}(A^i_{M,n})=\prod_{j=i}^{i+N-1}\mathbb{P}\left(\left|W\left(\frac{j+1}{n}\right)-W\left(\frac{j}{n}\right)\right|\le\frac{M}{n^\gamma}\right)=\mathbb{P}\left(\left|W\left(\frac{1}{n}\right)\right|\le\frac{M}{n^\gamma}\right)^N.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|W\left(\frac{1}{n}\right)\right|\le\frac{M}{n^\gamma}\right) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}}\int_{-\frac{M}{n^\gamma}}^{\frac{M}{n^\gamma}}\mathrm{e}^{-\frac{nx^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\ (\text{利用被积函数绝对值}\le 1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-Mn^{\frac12-\gamma}}^{Mn^{\frac12-\gamma}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y\le\frac{2M}{\sqrt{2\pi}}n^{\frac12-\gamma}=Cn^{\frac12-\gamma}.\end{aligned} \tag{9}$$

所以 (注意 N 起到了放大衰减的作用, 它带来的额外衰减抵消了下一式中 n 个项求和且 $n\to\infty$ 带来的困难) $\mathbb{P}(A^i_{M,n})\le C^Nn^{N(\frac12-\gamma)}$. 现在对任意固定的 k, M, 我们有 (第一个不等号: 对任意 $n\ge k$, 都有 $\mathbb{P}(\cap_{l=k}^{\infty}B_l)\le\mathbb{P}(B_n)$. 两边取 $n\to\infty$ 时的下极限.)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{n}A^i_{M,n}\right) &\le \liminf_{n\to\infty}\mathbb{P}(\cup_{i=1}^nA^i_{M,n})\le\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\mathbb{P}(A^i_{M,n})\le\liminf_{n\to\infty}nC^Nn^{N(\frac12-\gamma)} \\ &= C^N\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n^{N(\gamma-\frac12)-1}}=0.\end{aligned}$$

最后的等号用到了 (6) 式. 由于上式对任意 k, M 均成立, 不难得到 $\mathbb{P}\left(\bigcup_{M=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{n}A^i_{M,n}\right)=0$. 这就证明了结论 1). □

量子力学中的路径积分

- Schrödinger 方程 — Hamilton 函数 (总能量 = 动能 + 势能): $H = \frac{1}{2m}p^2 + V(x,t)$; 量子化: 动量算符 $p \to -\mathrm{i}\hbar\nabla$, 能量算符 $H \to \mathrm{i}\hbar\partial_t$

  $\Rightarrow \boxed{\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x,t)\psi.}$ (ψ — (复值) 波函数, $|\psi(x,t)|^2$ 是 t 时刻量子在空间 x 点附近出现的概率密度函数.)
- 对比热方程 — $\frac{\partial\psi}{\partial t} = a^2\Delta\psi + V(x,t)\psi$. (与 Schrödinger 方程的联系: 将系数解析开拓到复平面.)
- 矩阵力学 — Hilbert 空间上自伴算子理论. (泛函分析、算子代数)
- Lagrange 经典力学 — 经典轨道 (曲线集) $C^1_{a,b} \doteq \{x(t) \in C^1([t_a,t_b]) : x(t_a) = x_a, x(t_b) = x_b\}$, 其中 $t_a < t_b, x_a, x_b \in \mathbb{R}^3$ 给定. 给定函数 $L = L(p,x,t)$(称为 Lagrange 密度函数), 定义作用量泛函 $S[x] = \int_{t_a}^{t_b} L(\dot{x}(t), x(t), t)\,\mathrm{d}t$. 该泛函在 $C^1_{a,b}$ 上的临界点由 Euler-Lagrange 方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ 确定.
- 例: 若 $L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x,t)$ (动能 − 势能), 则临界点 $x = x(t)$ 就是质量为 m 的质点在势场 $V(x,t)$ 中运动的曲线, 满足约束 $x(t_a) = x_a, x(t_b) = x_b$.
- 利用路径积分实现量子化的方法: 假定量子在时刻 t_a 位于 x_a 点, 在时刻 t_b 跃迁到 x_b 点的概率 $P(b,a) \doteq |K(b,a)|^2$, 其中 $K(b,a) \doteq \text{const}\sum\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S[x(t)]\right)$, 求和是对 $C^1_{a,b}$ 中所有曲线进行的. Feynman 路径积分 $\boxed{K(b,a) = \int_{C^1_{a,b}} \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S[x(t)]\right)\mathcal{D}(x(t)).}$
- 难点: 如何定义 $C^1_{a,b}$ 上的测度使得上述积分有意义? [量子场论的基本困难之一.]

参考 — R. P. 费曼, A. R. 希布斯 [著], 张邦固 [译]: 量子力学与路径积分, 高等教育出版社, 2015 年. (第二章)
Brian C. Hall: Quantum Theory for Mathematicians. Graduate Texts in Mathematics, 267. Springer, 2013. (第 20 章)

Wiener 积分

定理

对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$, 对任意的正数 T, 存在定义于 $C_{(x_0)}([0,T])$ 的 Borel 代数上的唯一的概率测度 $\mathbb{W}_{x_0}$, 使得如下性质成立: 对任意的采样序列 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N \le T$, 以及 $\mathbb{R}^N$ 上非负可测函数 (或连续函数)G, 有

$$\int_{C_{(x_0)}([0,T])} G(\omega(t_1),\omega(t_2),\cdots,\omega(t_N))\,\mathrm{d}\mathbb{W}_{x_0}(\omega) = C_N \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^N \frac{|x_j - x_{j-1}|^2}{t_j - t_{j-1}}\right\} G(x_1,x_2,\cdots,x_N)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_N,$$

其中 $C_N \doteq \prod_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}}$.

证明: 唯一性由 Carathéodory 扩张的唯一性保证 (概率测度是有限测度). 对上述确定的指标 $\underline{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_N)$, 做映射 $\Phi : C_{(x_0)}([0,T]) \to \mathbb{R}^N; \omega \mapsto x = (\omega(t_1), \omega(t_2), \cdots, \omega(t_N))$, 对任意的 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, 由 Wiener 测度 (Brown 运动) 的构造, 成立 $\mathbb{W}_{x_0}(\Phi^{-1}(B)) = Q_{\underline{t}}(B)$, 其中 $Q_{\underline{t}}(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^N$ 上的概率测度, 其概率密度函数是$f(x_1,\cdots,x_N) = g(x_1, t_1 | x_0)g(x_2, t_2 - t_1 | x_1)\cdots g(x_N, t_N - t_{N-1} | x_{N-1})$, 而 $g(x, t | y) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}$ 是概率转移函数. 故 $f(x_1,\cdots,x_N) = C_N \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^N \frac{|x_j - x_{j-1}|^2}{t_j - t_{j-1}}\right\}$, 而 $Q_{\underline{t}} = \Phi_\sharp \mathbb{W}_{x_0}$. 由积分换元公式, 上式左边积分 $= \int_{C_{(x_0)}([0,T])} G(\Phi(\omega))\,\mathrm{d}\mathbb{W}_{x_0}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^N} G(x)\,\mathrm{d}\Phi_\sharp(\mathbb{W}_{x_0})(x) =$ 右边. □ 记号: $\mathbb{E}^{\mathbb{W}_{x_0}}[G] \doteq \int_{C_{(x_0)}([0,T])} G(\omega)\,\mathrm{d}\mathbb{W}_{x_0}(\omega)$. 如果 $x_0 = 0$, 则上述记号中略去 x_0.

例: Brown 运动的基本性质

以下均假设随机过程 $x(t)=x(t,\omega)\doteq\omega(t)\in C_{(0)}([0,T])$ 是 Brown 运动.

例 1 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数, 固定 $t>0$, 则 $\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[f(x(t))]=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2t}}\,\mathrm{d}u$. 特别的, 取 $f=\chi_{[a,b]}$ 是区间 $[a,b]$ 的特征函数, 就得到 $\mathbb{W}(\{a\le x(t)\le b\})=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_a^b\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2t}}\,\mathrm{d}u$, 即 Brown 运动 $x(t)$ 服从正态分布 $N(0,t)$.

例 2 设 $0<s<t\le T, E\doteq\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: a\le y-x\le b\}$, 计算 $\mathbb{W}(\{x:(x(s),x(t))\in E\})=\mathbb{W}(\{x|a\le x(t)-x(s)\le b\})=\frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}}\iint_E\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{s}+\frac{(u-v)^2}{t-s}\right)\right\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\xrightarrow[\text{换元}]{u-v=\tau_1,v=\tau_2}=$
$\frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau_2\int_a^b\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau_2^2}{s}+\frac{\tau_1^2}{t-s}\right)\right\}\mathrm{d}\tau_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_a^b\exp\left\{-\frac{\tau^2}{2(t-s)}\right\}\mathrm{d}\tau$. 意义: $C_{(0)}([0,T])$ 上有界线性泛函 $f(x)\doteq x(t)-x(s)$ 服从正态分布 $N(0,t-s)$. 由此,
$\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[|x(t)-x(s)|^2]=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{-\infty}^{\infty}u^2\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2(t-s)}}\,\mathrm{d}u=|t-s|$.

例 3 由于 $\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[x(t)^2]=t,\forall t>0$, 而 $|t-s|=\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[|x(t)-x(s)|^2]=\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[x(t)^2]+\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[x(s)^2]-2\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[x(t)x(s)]=t+s-2\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[x(t)x(s)]\Rightarrow\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[x(t)x(s)]=\frac{1}{2}(t+s-|t-s|)=\min\{t,s\}=t\wedge s$.

例 4 设 $\theta\in\mathbb{R}$, 则 $\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x(t)}]=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t\theta^2}$. (相当于计算正态分布 $N(0,t)$ 的特征函数 — Fourier 逆变换.)

Donsker 泛函: Wiener 测度的局部化

- 固定 $t \in [0,T]$, 赋值映射 $e_t : C([0,T]) \to \mathbb{R}; \omega \mapsto \omega(t)$ 诱导了 $\mathbb{R}$ 上的测度 $(e_t)_\sharp(\mathbb{W})$:

$$(e_t)_\sharp(\mathbb{W})(B) = \mathbb{W}((e_t)^{-1}(B)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_B e^{-\frac{\xi^2}{2t}}\, d\xi.$$

意义: i) 0 时刻在原点释放单位质量化学物质, 在 t 时刻, 位于 Borel 集 B 内的物质质量; ii) 0 时刻在原点释放一颗花粉, 在 t 时刻它位于 Borel 集 B 内的概率.

- 测度 $(e_t)_\sharp(\mathbb{W})$ 的另一种记号: $\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{\omega(t)}(B)] \doteq \int_{\{\omega\in C[0,T]:\omega(t)\in B\}} d\mathbb{W}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_B e^{-\frac{\xi^2}{2t}}\, d\xi$. 显然它关于 Lebesgue 测度绝对连续. 记其 Radon-Nikodym 导数为 $\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{t,\xi}(\omega)] \doteq \frac{d}{d\xi}\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{\omega(t)}(d\xi)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{\xi^2}{2t}}$. $\quad (\P)$ 意义: 这是热方程 $u_t = \frac{1}{2}u_{xx}$ 的基本解. 目标: 对带源项的热方程 $u_t = \frac{1}{2}u_{xx} - V(x)u$ 的 Cauchy 问题得到类似的解的概率表达式.

- 设 $0 \le s < t \le T$, f 是 $\mathbb{R}$ 上有界的 Borel 可测函数,

则 $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{\omega(t)-\omega(s)}(d\xi)] = \mathbb{E}^{\mathbb{W}}[f(\omega(t)-\omega(s))] = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}e^{-\frac{\xi^2}{2(t-s)}}f(\xi)\, d\xi. \qquad (\spadesuit)$$

证明: 1) 取 $f(\xi) = \chi_B(\xi)$, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_B(\xi)\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{\omega(t)-\omega(s)}(d\xi)] = \int_B \mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{\omega(t)-\omega(s)}(d\xi)] \doteq \mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{\omega(t)-\omega(s)}(B)] = \mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\omega(t)-\omega(s)\in B] = \mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\chi_B(\omega(t)-\omega(s))] \xrightarrow[\text{例 2}]{}= \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}e^{-\frac{\xi^2}{2(t-s)}}\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}e^{-\frac{\xi^2}{2(t-s)}}\chi_B(\xi)\, d\xi$. 2) 结论对简单函数成立. 3) 取极限, 对一般有界 Borel 可测函数成立. □

- 记号: $$\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{t-s,\xi}(\omega)] \doteq \frac{d}{d\xi}\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{\omega(t)-\omega(s)}(d\xi)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}e^{-\frac{\xi^2}{2(t-s)}}. \qquad (\maltese)$$ (请与 (¶) 对比!)

引理

设 $0 < t \leq T$, $G(\omega)$ 是 $C([0,T])$ 上 *Wiener* 可积的泛函. 则 $\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[G(\omega)\delta_{\omega(t)}(\mathrm{d}\xi)]$ 是 $\mathbb{R}$ 上关于 *Lebesgue* 测度绝对连续的全有限广义测度, 且对 $\mathbb{R}$ 上任意的 *Borel* 可测函数 f, 等式 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[G(\omega)\delta_{\omega(t)}(\mathrm{d}\xi)] = \mathbb{E}^{\mathbb{W}}[G(\omega)f(\omega(t))] \quad (\clubsuit)$ 在下述意义下相等: 如果上式中两个积分其中之一存在, 则另一个也存在, 而且两者取值相同.

1) $\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[G(\omega)\delta_{\omega(t)}(\mathrm{d}\xi)]$ 的定义: 设 B 是 $\mathbb{R}$ 上 Borel 集,

$$\int_B \mathbb{E}^{\mathbb{W}}[G(\omega)\delta_{\omega(t)}(\mathrm{d}\xi)] = \mathbb{E}^{\mathbb{W}}[G(\omega)\delta_{\omega(t)}(B)] \doteq \int_{\{\omega\in C([0,T]):\omega(t)\in B\}} G(\omega)\,\mathrm{d}\mathbb{W}(\omega). \quad (1)$$

i) 显然 $|\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[G(\omega)\delta_{\omega(t)}(B)]| \leq \mathbb{E}^{\mathbb{W}}[|G(\omega)|] < +\infty$, 所以该式有意义, 同时也表明 $\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[G(\omega)\delta_{\omega(t)}(\mathbb{R})] < +\infty$; ii) 显然 $\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[G(\omega)\delta_{\omega(t)}(\emptyset)] = 0$; iii) 容易验证可列可加性: $\{B_j\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上两两不相交的 Borel 集, 则柱基 $\{\omega \in C([0,T]) : \omega(t) \in B_j\}$ 也两两不相交; 再用积分的可列可加性; iv) B 是 Lebesgue 零测集 $\Rightarrow$ 柱集 $\{\omega : \omega(t) \in B\}$ 是 $\mathbb{W}$-零测集 $\Rightarrow \mathbb{E}^{\mathbb{W}}[G(\omega)\delta_{\omega(t)}(\mathrm{d}\xi)]$ 关于 Lebesgue 测度 $\mathrm{d}\xi$ 绝对连续. 所以 $\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[G(\omega)\delta_{\omega(t)}(\mathrm{d}\xi)]$ 是 $\mathbb{R}$ 上全有限的广义测度 (注意 G 未必非负).

2) 证明等式 $(\clubsuit)$. 由积分的线性, 不妨设 $G(\omega) \geq 0$. 取 $f(\xi) = \chi_B(\xi)$ 是 Borel 集 $B \subset \mathbb{R}$ 的特征函数, 则由定义式 (1),

$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_B(\xi)\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[G(\omega)\delta_{\omega(t)}(\mathrm{d}\xi)] = \int_B \mathbb{E}^{\mathbb{W}}[G(\omega)\delta_{\omega(t)}(\mathrm{d}\xi)] = \mathbb{E}^{\mathbb{W}}[G(\omega)\delta_{\omega(t)}(B)] \doteq \int_{\omega\in C([0,T]):\omega(t)\in B} G(\omega)\,\mathrm{d}\mathbb{W}(\omega) = \mathbb{E}^{\mathbb{W}}[G(\omega)\chi_B(\omega(t))]$. 由此 $(\clubsuit)$ 对简单函数成立; 进一步通过取极限, 对一般的 f 也成立. □

- 定义密度函数: $\boxed{\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[G(\omega)\delta_{t,\xi}(\omega)] \doteq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[G(\omega)\delta_{\omega(t)}(\mathrm{d}\xi)].}$ 于是 $(\clubsuit)$ 可写作 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[G(\omega)\delta_{t,\xi}(\omega)]\,\mathrm{d}\xi = \mathbb{E}^{\mathbb{W}}[G(\omega)f(\omega(t))] \quad (\heartsuit)$. 特别的, 取 $G \equiv 1$(注意 $\mathbb{W}$ 是概率测度, 所以 1 是 Wiener 可积的), 就有 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{t,\xi}(\omega)]\,\mathrm{d}\xi = \mathbb{E}^{\mathbb{W}}[f(\omega(t))]$. (Wiener 积分定理一个特殊情形的另一种写法.)

半群性质

引理

设 $0 \le s < t \le T$, $G(\omega)$ 是 *Wiener* 可积泛函, 且 $G(\omega)$ 只依赖于函数 ω 在 $[0,s]$ 上的值, 则

$$\boxed{\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{t,\xi}(\omega)G(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{t-s,\xi-\eta}(\omega)]\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{s,\eta}(\omega)G(\omega)]\,\mathrm{d}\eta.}$$

证明: 对 $\mathbb{R}$ 上任意的有界 Borel 可测函数 $f(\xi)$, 上式左端乘以 $f(\xi)$, 关于 ξ 在 $\mathbb{R}$ 上积分, 得到

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{t,\xi}(\omega)G(\omega)]\,\mathrm{d}\xi \xrightarrow[\text{上页 }(\heartsuit)\text{ 式}]{=} \mathbb{E}^{\mathbb{W}}[f(\omega(t))G(\omega)]$, $\quad(\dagger)$. 右端用 Fubini 定理

$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{t-s,\xi-\eta}(\omega)]f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{s,\eta}(\omega)G(\omega)]\,\mathrm{d}\eta \xrightarrow[\zeta=\xi-\eta]{=}$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{t-s,\zeta}(\omega)]f(\zeta+\eta)\,\mathrm{d}\zeta\right)\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{s,\eta}(\omega)G(\omega)]\,\mathrm{d}\eta \xrightarrow[\text{前页 }(\maltese)\text{ 式}:\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{t-s,\xi}(\omega)]\doteq\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{\omega(t)-\omega(s)}(\mathrm{d}\xi)]]{=}$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(\zeta+\eta)\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{\omega(t)-\omega(s)}(\mathrm{d}\zeta)]\right)\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{s,\eta}(\omega)G(\omega)]\,\mathrm{d}\eta \xrightarrow[(\,\cdot\,)\text{ 内式子用前页 }(\spadesuit)\text{ 式}]{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[f(\omega(t)-\omega(s)+\eta)]\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{s,\eta}(\omega)G(\omega)]\,\mathrm{d}\eta =$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[f(\omega(t)-\omega(s)+\eta)]\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[G(\omega)\delta_{\omega(s)}(\mathrm{d}\eta)] \xrightarrow[\text{在测度 }\mathbb{W}\text{ 下}]{\omega(t)-\omega(s)\text{ 与 }\omega(s)\text{ 以及 }G(\omega)\text{ 独立}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[f(\omega(t)-\omega(s)+\eta)G(\omega)\delta_{\omega(s)}(\mathrm{d}\eta)] =$

$\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[G(\omega)\int_{-\infty}^{+\infty}f(\omega(t)-\omega(s)+\eta)\delta_{\omega(s)}(\mathrm{d}\eta)] = \mathbb{E}^{\mathbb{W}}[f(\omega(t))G(\omega)]$. (注意这里最后三个等号成立并未严格证明, 需要推广上页引理到 $G(\omega,\xi)$ 的情形.) 结合式 $(\dagger)$, 由 f 的任意性即得结论. □

Donsker-Lions 定理: 基本解的路径积分表示

定理

设 $V(\xi)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的下有界实值可积函数, 则 $u(t,\xi)=\mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[\delta_{t,\xi}(\omega)\mathrm{e}^{-\int_0^t V(\omega(s))\,\mathrm{d}s}\right]$ $(\natural)$ 是下述定解问题 $(\sharp)$ 在积分方程 $(\diamondsuit)$ 意义下的解: $\frac{\partial u(t,\xi)}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,\xi)}{\partial \xi^2}-V(\xi)u(t,\xi)$, $\quad u(0,\xi)=\delta_0(\xi)$, $\quad \lim_{\xi\to\pm\infty}u(t,\xi)=0$.

- 复习: 由热核和齐次化原理, 得到非齐次热方程初值问题 $\begin{cases} u_t(x,t)=a^2\Delta u(x,t)+f(x,t), & x\in\mathbb{R}^n, t\geq 0,\\ u(x,0)=\phi(x), & x\in\mathbb{R}^n\end{cases}$ 的解具有形式

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}}\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}}\phi(y)\,\mathrm{d}y+\int_0^t\frac{1}{(4\pi a^2(t-s))^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-s)}}f(y,s)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s.$$

特别的, $(\sharp)$ 的解具有如下形式 (取 $n=1, a^2=\frac{1}{2}$, 注意 $\delta_0(\xi)$ 是支在原点的 Dirac 测度):

$$(\diamondsuit)\quad u(t,\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2t}}-\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{-\infty}^{+\infty}V(\eta)u(\tau,\eta)\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-\frac{|\xi-\eta|^2}{2(t-\tau)}}\,\mathrm{d}\eta.$$

1) 用分部积分或两边求导, 容易验证恒等式 $\mathrm{e}^{-\int_0^t V(\omega(s))\,\mathrm{d}s}=1-\int_0^t V(\omega(\tau))\mathrm{e}^{-\int_0^\tau V(\omega(s))\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}\tau$. 代入 $(\natural)$, 得到 $u(t,\xi)=\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{t,\xi}(\omega)]-\int_0^t\mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[V(\omega(\tau))\mathrm{e}^{-\int_0^\tau V(\omega(s))\,\mathrm{d}s}\delta_{t,\xi}(\omega)\right]\mathrm{d}\tau$.

由前页 Donsker 泛函的 (¶) 式, 成立 $\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{t,\xi}(\omega)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2t}}$. 下面计算第二项.

$$\mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[\underbrace{V(\omega(\tau))\mathrm{e}^{-\int_0^\tau V(\omega(s))\,\mathrm{d}s}}_{\doteq G(\omega)}\delta_{t,\xi}(\omega)\right] \xrightarrow[\text{前页半群性质引理:}\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{t,\xi}(\omega)G(\omega)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{t-s,\xi-\eta}(\omega)]\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{s,\eta}(\omega)G(\omega)]\,\mathrm{d}\eta]{s\text{ 取为 }\tau\in[0,t]} =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{t-\tau,\xi-\eta}(\omega)]}_{\text{前页 }(\maltese)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-\frac{|\xi-\eta|^2}{2(t-\tau)}}\doteq f(\eta)} \mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{\tau,\eta}(\omega)\underbrace{V(\omega(\tau))\mathrm{e}^{-\int_0^\tau V(\omega(s))\,\mathrm{d}s}}_{\doteq G(\omega)}]\,\mathrm{d}\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta)\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{\tau,\eta}(\omega)G(\omega)]\,\mathrm{d}\eta \xrightarrow[\text{前页 }(\clubsuit)\text{ 式}]{=}$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[f(\omega(\tau)G(\omega))] = \mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-\frac{|\xi-\omega(\tau)|^2}{2(t-\tau)}}V(\omega(\tau))}_{\text{看作新的 }f(\omega(\tau))}\underbrace{\mathrm{e}^{-\int_0^\tau V(\omega(s))\,\mathrm{d}s}}_{\text{看作新的 }G(\omega)}\right] \xrightarrow[\text{反向使用 }(\clubsuit)\text{ 式}]{=}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-\frac{|\xi-\eta|^2}{2(t-\tau)}}V(\eta)\underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{\tau,\eta}(\omega)\mathrm{e}^{-\int_0^\tau V(\omega(s))\,\mathrm{d}s}]}_{\text{按照定义}=u(\tau,\eta)}\,\mathrm{d}\eta.$$ 这就证明了

$$\mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[V(\omega(\tau))\mathrm{e}^{-\int_0^\tau V(\omega(s))\,\mathrm{d}s}\delta_{t,\xi}(\omega)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-\frac{|\xi-\eta|^2}{2(t-\tau)}}V(\eta)u(\tau,\eta)\,\mathrm{d}\eta,$$ 所以第二项

$$\int_0^t\mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[V(\omega(\tau))\mathrm{e}^{-\int_0^\tau V(\omega(s))\,\mathrm{d}s}\delta_{t,\xi}(\omega)\right]\mathrm{d}\tau = \int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-\frac{|\xi-\eta|^2}{2(t-\tau)}}V(\eta)u(\tau,\eta)\,\mathrm{d}\eta,$$ 即上页 ($\diamondsuit$) 式子第二项. 故在此积分方程意义下路径积分 ($\natural$) 给出了 Cauchy 问题 ($\sharp$) 的解. □

Kolmogorov 前向方程; Green 函数

定理 (Kolmogorov 前向方程)

$p(t,\xi,\eta) \doteq \mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[\delta_{t,\xi-\eta}(\omega)\mathrm{e}^{-\int_0^t V(\eta+\omega(s))\,\mathrm{d}s}\right]$ 是如下问题的解 (其中 $\delta_\eta(\xi)$ 是 ξ-直线上支在 η 点的 *Dirac* 测度):
$\frac{\partial}{\partial t}p(t,\xi,\eta) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}p(t,\xi,\eta) - V(\xi)p(t,\xi,\eta),\ \ p(0,\xi,\eta) = \delta_\eta(\xi),\ \ \lim_{\xi\to\pm\infty} p(t,\xi,\eta) = 0.$

证明: 用平移, 考虑势函数为 $V(\eta+\cdot)$ 的问题 ($\sharp$) 的解 $u(t,\xi) = \mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{t,\xi}(\omega)\mathrm{e}^{-\int_0^t V(\eta+\omega(s))\,\mathrm{d}s}]$, 则 $p(t,\xi,\eta) = u(t,\xi-\eta)$ 就是上述 Kolmogorov 前向方程的解.

引理 (Green 函数的对称性)

$p(t,\xi,\eta) = p(t,\eta,\xi)$.

(待证.)

Feynman-Kac 公式

定理 (Feynman-Kac 公式)

设 $V(\xi)$ 是下有界可积函数, $f(\xi)$ 是一维有界可测函数, 则 $u(t,\xi)=\mathbb{E}^{\mathbb{W}_\xi}[f(\omega(t))\mathrm{e}^{-\int_0^t V(\omega(s))\,\mathrm{d}s}]$ 是 Cauchy 问题 $u_t=\frac{1}{2}u_{\xi\xi}-V(\xi)u,\ \ u(0,\xi)=f(\xi)$ 的解.

- 复习: $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\eta)\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[G(\omega)\delta_{t,\eta}(\omega)]\,\mathrm{d}\eta=\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[G(\omega)h(\omega(t))] \qquad (\heartsuit)$
- Green 函数: $p(t,\xi,\eta)=\mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[\delta_{t,\xi-\eta}(\omega)\mathrm{e}^{-\int_0^t V(\eta+\omega(s))\,\mathrm{d}s}\right]=p(t,\eta,\xi)=\mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[\delta_{t,\eta-\xi}(\omega)\mathrm{e}^{-\int_0^t V(\xi+\omega(s))\,\mathrm{d}s}\right]$.
- 回忆 Wiener 测度 $\mathbb{W}_\xi$ 的定义, 对 $C([0,T])$ 上的泛函 F, 等式 $\mathbb{E}^{\mathbb{W}_\xi}[F(\omega)]=\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[F(\omega+\xi)]$ 在下述意义下成立: 其中任意一个存在, 另一个就存在且取值相同.

于是 $u(t,\xi)=\mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[\underbrace{f(\omega(t)+\xi)}_{h(\omega(t))}\underbrace{\mathrm{e}^{-\int_0^t V(\xi+\omega(s))\,\mathrm{d}s}}_{G(\omega)}\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\eta)\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[G(\omega)\delta_{t,\eta}(\omega)]\,\mathrm{d}\eta=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta+\xi)\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[G(\omega)\delta_{t,\eta}(\omega)]\,\mathrm{d}\eta=$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta')\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[G(\omega)\delta_{t,\eta'-\xi}(\omega)]\,\mathrm{d}\eta' \xrightarrow[=]{\text{用 Green 函数的定义式}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta)p(t,\eta,\xi)\,\mathrm{d}\eta \xrightarrow[=]{\text{用 Green 函数的对称性}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta)p(t,\xi,\eta)\,\mathrm{d}\eta$. 注意 $p(t,\xi,\eta)$ 是 Green 函数, 关于 (t,ξ) 满足方程, 从而它给出了定理中 Cauhcy 问题的解. □

Green 函数对称性的证明

目标 $p(t,\xi,\eta)=\mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[\delta_{t,\xi-\eta}(\omega)\mathrm{e}^{-\int_0^t V(\eta+\omega(s))\,\mathrm{d}s}\right]=p(t,\eta,\xi)=\mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[\delta_{t,\eta-\xi}(\omega)\mathrm{e}^{-\int_0^t V(\xi+\omega(s))\,\mathrm{d}s}\right].$

1) 先证明 $\boxed{p(t,\xi,\eta)=\mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[\delta_{t,\xi-\eta}(\omega)\mathrm{e}^{-\int_0^t V(\omega(t-\tau)-\omega(t)+\xi)\,\mathrm{d}\tau}\right].}$

对 $\mathbb{R}$ 上任意有界可测函数 $f(\cdot)$, $\int_{-\infty}^{+\infty}f(\eta)p(t,\xi,\eta)\,\mathrm{d}\eta\xrightarrow[\text{按定义}]{=}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\eta)\mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[\delta_{t,\xi-\eta}(\omega)\mathrm{e}^{-\int_0^t V(\eta+\omega(s))\,\mathrm{d}s}\right]\mathrm{d}\eta\xrightarrow[\text{目的: 把 } V \text{ 中 } \eta \text{ 搬到期望外}]{\text{换元}}=$
$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi-\eta)\mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[\delta_{t,\eta}(\omega)\mathrm{e}^{-\int_0^t V(\xi-\eta+\omega(s))\,\mathrm{d}s}\right]\mathrm{d}\eta\xrightarrow[\text{定义 (前页 (♣) 式)}]{=}$
$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi-\eta)\mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V(\xi-\eta+\omega(s))\,\mathrm{d}s}\delta_{\omega(t)}(\mathrm{d}\eta)\right]\xrightarrow[\text{前页 (♣) 式, 类比 Fubini 定理}]{\text{注意 } G(\cdot) \text{ 中有被积变量 } \eta}=\mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[f(\xi-\omega(t))\mathrm{e}^{-\int_0^t V(\xi-\omega(t)+\omega(s))\,\mathrm{d}s}\right]\xrightarrow[\text{用前页 (♣) 式}]{=}$
$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi-\eta)\mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V(\xi-\omega(t)+\omega(s))\,\mathrm{d}s}\delta_{t,\eta}(\omega)\right]\mathrm{d}\eta\xrightarrow[\text{换元}]{=}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\eta)\mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V(\xi-\omega(t)+\omega(s))\,\mathrm{d}s}\delta_{t,\xi-\eta}(\omega)\right]\mathrm{d}\eta$. 于是
$p(t,\xi,\eta)=\mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V(\xi-\omega(t)+\omega(s))\,\mathrm{d}s}\delta_{t,\xi-\eta}(\omega)\right]\xrightarrow[\text{换元}]{s=t-\tau}=\mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V(\omega(t-\tau)-\omega(t)+\xi)\,\mathrm{d}\tau}\delta_{t,\xi-\eta}(\omega)\right].$

2) 再证明 $\boxed{\mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[\delta_{t,\xi-\eta}(\omega)\mathrm{e}^{-\int_0^t V(\omega(t-\tau)-\omega(t)+\xi)\,\mathrm{d}\tau}\right]=\mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[\delta_{t,\eta-\xi}(\omega)\mathrm{e}^{-\int_0^t V(\xi+\omega(s))\,\mathrm{d}s}\right].}$ 注意该式右端即 $p(t,\eta,\xi)$, 结合第一步, 就得到 Green 函数的对称性.

- 要证明: $\boxed{\mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[\delta_{t,\xi-\eta}(\omega)e^{-\int_0^t V(\omega(t-\tau)-\omega(t)+\xi)\,d\tau}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[\delta_{t,\eta-\xi}(\omega)e^{-\int_0^t V(\xi+\omega(s))\,ds}\right].}$

- $C_{(0)}([0,t])$ 上的保测映射. 上式两端积分只和函数 ω 在 $[0,t]$ 上取值有关, 故考虑空间 $C_{(0)}([0,t])$ 及其上的 Wiener 测度 $\mathbb{W}$. 定义线性映射 $\mathtt{T}: x(s) \mapsto y(s) \doteq x(t-s) - x(t)$. 它将曲线定向改变并平移终点到原点.

$\mathtt{T}$ 的保测性: 考虑 $C_{(0)}([0,t])$ 中的柱集 $I = \{\omega : a_i \le y(\tau_i) \le b_i,\ i = 1,\cdots,n\}$, 其中 $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n = t$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, 则

$\mathtt{T}^{-1}(I) = \{x : a_i + x(t) \le x(\nu_i) \le b_i + x(t),\ i = 1,\cdots,n-1;\ -b_n \le x(t) \le -a_n\}$, 其中 $\nu_i = t - \tau_i$,

$i = 1,\cdots,n-1$; $0 = \nu_n < \nu_{n-1} < \cdots < \nu_1 < \nu_0 = t$. 注意成立$\nu_i - \nu_{i+1} = \tau_{i+1} - \tau_i$, $i = 1,\cdots,n-1$. 按 Wiener 测度的有限维分布,

$\mathbb{W}(\mathtt{T}^{-1}I) = \left[(2\pi)^n \nu_{n-1}(\nu_{n-2}-\nu_{n-1})\cdots(t-\nu_1)\right]^{-1/2} \int_{-b_n}^{-a_n} du_0 \int_{a_1+u_0}^{b_1+u_0} du_1 \cdots \int_{a_{n-1}+u_0}^{b_{n-1}+u_0} du_{n-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{u_{n-1}^2}{\nu_{n-1}} + \frac{(u_{n-2}-u_{n-1})^2}{\nu_{n-2}-\nu_{n-1}} + \cdots + \frac{(u_0-u_1)^2}{t-\nu_1}\right]\right\} \xrightarrow[\text{换元, Jacobi 行列式绝对值为 1}]{v_0 \doteq -u_0;\, v_i = u_i - u_0,\, i=1,\cdots,n-1} = \left[(2\pi)^n (t-\tau_{n-1})(\tau_{n-1}-\tau_{n-2})\cdots(\tau_2-\tau_1)\tau_1\right]^{-1/2} \int_{a_n}^{b_n} dv_0 \int_{a_1}^{b_1} dv_1 \cdots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} dv_{n-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(v_0-v_{n-1})^2}{t-\tau_{n-1}} + \frac{(v_{n-1}-v_{n-2})^2}{\tau_{n-1}-\tau_{n-2}} + \cdots + \frac{v_1^2}{\tau_1}\right]\right\} \xrightarrow[v_0 \text{ 改作 } v_n]{} = \left[(2\pi)^n (t-\tau_{n-1})(\tau_{n-1}-\tau_{n-2})\cdots(\tau_2-\tau_1)\tau_1\right]^{-1/2} \int_{a_n}^{b_n}\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\cdots\int_{a_1}^{b_1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(v_n-v_{n-1})^2}{t-\tau_{n-1}} + \frac{(v_{n-1}-v_{n-2})^2}{\tau_{n-1}-\tau_{n-2}} + \cdots + \frac{v_1^2}{\tau_1}\right]\right\} dv_1\cdots dv_{n-1}dv_n = \mathbb{W}(I)$. 这就证明了 $\mathbb{W}(\mathtt{T}^{-1}(I)) = \mathbb{W}(I)$.

- 所以左边 (将积分变量 τ 写作 s)$= \mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{t,\xi-\eta}(\omega)e^{-\int_0^t V(\omega(t-s)-\omega(t)+\xi)\,ds}] \xrightarrow[\text{注意}\delta_{t,\xi}(\omega) = \delta_{t,-\xi}(\mathtt{T}\omega)\text{(习题)}]{=}$ $\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{t,\eta-\xi}(\mathtt{T}\omega)e^{-\int_0^t V((\mathtt{T}\omega)(s)+\xi)\,ds}] \xrightarrow[\mathtt{T}\text{ 是保测映射}]{=} \mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\delta_{t,\eta-\xi}(\omega)e^{-\int_0^t V(\omega(s)+\xi)\,ds}] =$ 右边. [习题提示: 利用 $(\mathtt{T}\omega)(t) = -\omega(t)$.] □

随机变量的特征函数

- 设 $X:\ \Omega\to\mathbb{R}^n$ 是个随机变量, 定义 $\mathbb{R}^n$ 上函数 $\phi_X(\lambda)\doteq\mathbb{E}[e^{i\lambda\cdot X}]=\int_\Omega e^{i\lambda\cdot X(\omega)}\,d\mathbb{P}(\omega)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{i\lambda\cdot x}f_X(x)\,dx$ 为 X 的特征函数. 这里 $i=\sqrt{-1}$, $\lambda\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\cdot x$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上内积. 在实分析中, X 的特征函数就是其概率密度函数 $f_X(x)$ 的 Fourier 逆变换.
- 命题: 设 $X\backsim N(m,\sigma^2)$, 则 $\phi_X(\lambda)=e^{im\lambda-\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2}$.

证明: 以 $m=0$, $\sigma=1$ 为例, 用复变函数理论中的 Cauchy 积分定理, 就有 $\phi_X(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{i\lambda x-\frac{1}{2}x^2}\,dx=\frac{e^{-\lambda^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{(x-i\lambda)^2}{2}}\,dx=e^{-\lambda^2/2}$. □

- 特征函数的性质:
  1) 设 $X_1,\ \dots,\ X_m$ 是独立的随机变量. 则对任意 $\lambda\in\mathbb{R}^n$, $\phi_{X_1+\cdots+X_m}(\lambda)=\phi_{X_1}(\lambda)\cdots\phi_{X_m}(\lambda)$.
  2) 设 $X:\ \Omega\to\mathbb{R}^n$, 则对 $k=0,\ 1,\ 2,\ \dots$, $\phi^{(k)}(0)=i^k\mathbb{E}[X^k]$.
  3) 对随机变量 X, Y, 若 $\phi_X(\lambda)=\phi_Y(\lambda)$ 对几乎所有 λ 成立, 则 X, Y 服从相同分布: 对几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^n$, 成立 $F_X(x)=F_Y(x)$ (相同的概率分布函数).

证明: 1. 置 $X=(X_1,\ \cdots,\ X_m)$, 函数 $g(X)=X_1+\cdots+X_m$. 由概率分布函数的性质以及独立性,

$\phi_{X_1+\cdots+X_m}(\lambda)=\int_\Omega e^{i\lambda\cdot g(X(\omega))}\,d\mathbb{P}(\omega)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{i(x_1+\cdots+x_m)\cdot\lambda}\,dF_{X_1,\cdots,X_m}(x_1,\cdots,x_m)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{i(x_1\cdot\lambda+\cdots+x_m\cdot\lambda)}\,dF_{X_1}(x_1)\cdots dF_{X_m}(x_m)=$ $\int_{\mathbb{R}}e^{ix_1\cdot\lambda}\,dF_{X_1}(x_1)\cdots\int_{\mathbb{R}}e^{ix_m\cdot\lambda}dF_{X_m}(x_m)=\phi_{X_1}(\lambda)\cdots\phi_{X_m}(\lambda)$. 2. 利用积分号下对参数求导, 得到 $\phi'(\lambda)=i\mathbb{E}[Xe^{i\lambda\cdot X}]$, 令 $\lambda=0$ 即可. 对一般的 k, 可通过类似地求 k 阶导数得到结论. 3. 这是 Fourier 变换基本定理. □

- 推论: 设 $X\backsim N(m_1,\sigma_1^2)$ 和 $Y\backsim N(m_2,\sigma_2^2)$ 独立, 则 $X+Y\backsim N(m_1+m_2,\ \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

稠定有界线性算子的保范延拓

定理

设 X, Y 是实 *Banach* 空间, S 是 X 的稠密的线性子空间. 又设 $T\colon S \to Y$ 是有界线性算子, 即 T 是线性算子, 且成立 $C \doteq \sup_{x\in S, x\neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} < \infty$, 则存在有界线性算子 $\bar{T}\colon X \to Y$, 使得 $\bar{T}|_S = T$, 且 $C = \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{\|\bar{T}x\|_Y}{\|x\|_X}$.
称 $\bar{T}$ 是 T 在 X 上的保范线性延拓.

证明: 1. 对任意 $x \in X$, 由稠密性的定义, 存在 $\{x_n\} \subset S$, 使得 $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_X = 0$; 特别地, $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列.
2. 由 C 的定义, 以及 S 是线性子空间, 成立 $\|Tx_n - Tx_m\|_Y = \|T(x_n - x_m)\|_Y \leq C\|x_n - x_m\|_X$. 所以 $\{Tx_n\}$ 是 Y 中 Cauchy 列. 由于 Y 是 Banach 空间, 它是完备的, 即存在 $y \in Y$ 使得 $\lim_{n\to\infty} Tx_n = y$. 我们定义 $\bar{T}x \doteq y$.
3. 下面说明上述定义的合理性, 即 y 唯一地由 x 确定, 而与 $\{x_n\}$ 的选取无关.
设 $\{x_n'\}$ 是 S 中收敛到 x 的另一个点列, 与之对应 Tx_n' 在 Y 中收敛到 y'. 我们需要证明 $y = y'$.
为此, 考虑点列 $\{z_n\} \doteq \{x_1, x_1', x_2, x_2', \ldots, x_n, x_n', \ldots\}$, 则 z_n 也收敛到 x, 从而 Tz_n 在 Y 中有唯一的极限 z. 但 $\{Tx_n\}$, $\{Tx_n'\}$ 都是 $\{Tz_n\}$ 的子列, 从而由极限的唯一性, $y = z = y'$.
4. $\bar{T}$ 是 T 的延拓, 即当 $x \in S$ 时, $\bar{T}x = Tx$. 事实上, 此时取 $x_n = x$ 即可.
5. $\bar{T}\colon X \to Y$ 是线性的. 事实上, 设 $\{x_n\} \subset S$ 且 $x_n \to x$, 则对任意的 $k \in \mathbb{R}$, $kx_n \to kx$, 从而 $\bar{T}(kx) = \lim_{n\to\infty} T(kx_n) = k\lim_{n\to\infty} T(x_n) = k\bar{T}(x)$. 另一方面, 设 $\{y_n\} \subset S$ 且 $y_n \to y$, 则 $x_n + y_n \to x + y$, 于是 $\bar{T}(x+y) = \lim_{n\to\infty} T(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} Tx_n + \lim_{n\to\infty} Ty_n = \bar{T}x + \bar{T}y$.
6. 保范性. 记 $C_1 \doteq \sup_{x\in X,\, x\neq 0} \frac{\|\bar{T}x\|_Y}{\|x\|_X}$. 由于 $\bar{T}$ 是 T 的延拓, 自然地有 $C_1 \geq C$. 另一方面, $\|\bar{T}x\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\|_Y \leq C\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_X = C\|x\|_X$, 我们得到, 对任意 $x \in X$, $\frac{\|\bar{T}x\|_Y}{\|x\|_X} \leq C$. 从而由上确界的定义, $C_1 \leq C$. 这证明了 $C_1 = C$. □

Wiener 随机积分

- 简单函数关于 Brown 运动轨道的积分: 给定 $t > 0$, 设 g 是 $[0, t]$ 上的简单函数: $g(s) \doteq \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{[t_j, t_{j+1})}(s)$, 其中 $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1} \le t$, 定义 $C([0, t])$ 上线性泛函: $\theta_g(\omega) \doteq \int_0^t g(s)\, \mathrm{d}\omega(s) \doteq \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot (\omega(t_{j+1}) - \omega(t_j))$. 显然 $\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\theta_g(\omega)] = 0$.
- Itô 等距和 L^2 函数的随机积分: 回忆 Brown 运动 $\{\omega(t_{j+1}) - \omega(t_j)\}_{j=1}^{n}$ 互相独立, 且服从 Gauss 分布 $N(0, t_{j+1} - t_j)$. 由随机变量特征函数的性质 1), $\mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\cdot\theta_g(\omega)}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\exp\left\{\mathrm{i}\lambda \sum_{j=1}^{n} a_j(\omega(t_{j+1}) - \omega(t_j))\right\}] = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\exp\{\mathrm{i}\lambda a_j(\omega(t_{j+1}) - \omega(t_j))\}] = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda^2 a_j^2 (t_{j+1}-t_j)} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda^2 \sum_{j=1}^{n} a_j^2 (t_{j+1} - t_j)\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda^2 \int_0^t g(s)^2\, \mathrm{d}s\right\}$. 由服从正态分布随机变量的特征函数的形式及性质 3), 可知 $\theta_g(\omega)$ 是概率空间 $(C([0, T]), \mathcal{B}, \mathbb{W})$ 上的服从正态分布 $N(0, \int_0^t g(s)^2\, \mathrm{d}s)$ 的随机变量. 特别的, 成立 Itô 等距: $\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[|\theta_g(\omega)|^2] = \int_0^t |g(s)|^2\, \mathrm{d}s$. 这就是说, $\theta : g \mapsto \theta_g$ 是 $L^2([0, t])$ 到 $L^2(C([0, t]), \mathbb{W})$ 的稠定线性等距算子, 从而可唯一的延拓为 $L^2([0, t])$ 到 $L^2(C([0, t]), \mathbb{W})$ 的线性等距算子, 记为

  $$\boxed{\theta_g(\omega) = \int_0^t g(s)\, \mathrm{d}\omega(s)}$$

  , 称为 (Wiener) 随机积分.
- 意义: (1) 随机积分关于 $\mathbb{W}$-a.e. 的轨道 $\omega(s)$ 都有定义; (2) 经典的 Lebesgue-Stieltjes 积分 $\int_0^t f(s)\, \mathrm{d}g(s)$ 中, 当 f 连续时要求 $g(s)$ 是有界变差函数才有定义;(若 f, g 中一个连续但另一个变差无界, L-S 积分可能都无定义; 注意 Brown 运动的几乎所有轨道都是变差无界的.) 所以随机积分极大地扩展了积分的定义和应用范围.
- 定理: 对任意 $g \in L^2([0, T])$, $\theta_g(\omega)$ 是 $(C([0, T]), \mathbb{W})$ 上的 Gauss 随机变量, 期望为零, 方差是 $\int_0^t |g(s)|^2\, \mathrm{d}s$.

  证明: 取一列简单函数 $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$, 在 $L^2([0, T])$ 中收敛到 g, 那么依 Itô 等距, $\{\theta_{g_j}\}_{j=1}^{\infty}$ 在 $L^2(C([0, T]), \mathbb{W})$ 中收敛到 θ_g, 于是它存在子列在 $\mathbb{W}$ 测度意义下几乎处处收敛. 不妨设这个子列就是 $\{\theta_{g_j}\}_{j=1}^{\infty}$, 由 Lebesgue 控制收敛定理 (控制函数就是 1),

  $\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\theta_g(\omega)}] = \lim_{j\to\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\theta_{g_j}(\omega)}] = \lim_{j\to\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda^2 \int_0^t |g_j(s)|^2\, \mathrm{d}s} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda^2 \int_0^t |g(s)|^2\, \mathrm{d}s}$, 所以 $\theta_g(\cdot) \sim N(0, \int_0^t |g(s)|^2\, \mathrm{d}s)$. □

Stieltjes 积分及其分部积分公式

- Stieltjes 积分: 设 $f(t), g(t)$ 是在区间 $[a,b]$ 上的两个有限函数. 对 $[a,b]$ 的划分 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, 又任取 $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, 置 $\sigma \doteq \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\big(g(x_{k+1}) - g(x_k)\big)$. 如果当 $\lambda \doteq \max_k\{x_{k+1} - x_k\} \to 0$ 时, 不论如何划分区间 $[a,b]$, 也不论点 ξ_k 的取法如何, σ 都趋于有限的极限 I, 则称 I 为 f 关于 g 的 Stieltjes 积分, 记作 $I = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}g(t)$.
- 分部积分 — 设 $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}g(t)$ 和 $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}f(t)$ 中有一个存在, 则另一个也存在, 且成立如下等式:

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}g(t) + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}f(t) = [f(t)g(t)]\big|_a^b\,.}$$

证明: 假设 $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}f(t)$ 存在. 在 $[a,b]$ 中插入分点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 设 $x_k \le \xi_k \le x_{k+1}$, 置 $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)]$. 那么 $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)g(x_{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)g(x_k) = -\sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)[f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})] + f(\xi_{n-1})g(x_n) - f(\xi_0)g(x_0) = [f(t)g(t)]\big|_a^b - \Big\{g(a)[f(\xi_0) - f(a)] + \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)[f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})] + g(b)[f(b) - f(\xi_{n-1})]\Big\}$. 注意 $\{\cdot\}$ 中的项是对应积分 $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}f(t)$ 的和, 其对应划分是 $a \le \xi_0 \le \xi_1 \le \xi_2 \le \cdots \le \xi_{n-1} \le b$, 而 $a, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, b$ 依次是 $[a,\xi_0], [\xi_0,\xi_1], \cdots, [\xi_{n-1}, b]$ 中的点. 当 $\lambda = \max_k\{x_{k+1} - x_k\} \to 0$ 时, 显然 $\max_k\{\xi_{k+1} - \xi_k\} \to 0$, 于是 $\{\cdot\}$ 项收敛到 $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}f(t)$, 从而按照定义, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}g(t)$ 存在, 且上述分部积分公式成立. □

有界变差函数和 Stieltjes 积分

- 有界变差函数 — 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上定义的函数, 对 $[a,b]$ 的划分 $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, 置 $V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$. 定义 $V_a^b(f)$ 为跑遍所有划分时上述 V 的上确界. 如果 $V_a^b(f) < \infty$, 就称 f 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数.
- 有界变差函数必有界.
- 定理: 函数 f 有界变差的充分必要条件是 f 可以表示为两个单调递增函数的差.

  证明: 作 $\pi(x) = V_a^x(f)$, $v(x) = \pi(x) - f(x)$, 它们都是递增函数, 且 $f = \pi - v$. □
- 定理: 如果 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $g(t)$ 在 $[a,b]$ 上是有界变差的, 则 $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}g(t)$ 存在.

  证明: 不妨设 g 是单调递增函数. 做划分 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, 又记 m_k 和 M_k 分别是 f 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的最小值和最大值, 置 $s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k[g(x_{k+1}) - g(x_k)]$, $S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k[g(x_{k+1}) - g(x_k)]$. 显然, 当分点加细时, s 不减, S 不增, 且任意的 s 都不超过 S. 事实上, 设对于 $[a,b]$ 的两个划分 I 和 II, 记对应于 I 的和为 s_1, S_1, 对应于 II 的和为 s_2, S_2, 将 I 和 II 的分点合并, 得到划分 III, 对应的和为 s_3, S_3, 那么 $s_1 \le s_3 \le S_3 \le S_2$, 于是 $s_1 \le S_2$. 由此, 所有 s 的上确界 $I = \sup\{s\}$ 有限. 由于 $s \le I \le S$, 又注意 Stieltjes 积分的和 σ 满足 $s \le \sigma \le S$, 那么 $|\sigma - I| \le S - s$. 由 f 在 $[a,b]$ 的一致连续性, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 必有 $\delta > 0$, 使得当 $|x' - x''| < \delta$ 时, $|f(x') - f(x'')| \le \varepsilon$, 从而对任意 $k = 0, 1, \cdots, n-1$, 有 $M_k - m_k \le \varepsilon$, 那么 $S - s \le \varepsilon(g(b) - g(a))$. 总之, 当 $\lambda < \delta$ 时, 就有 $|\sigma - I| \le \varepsilon(g(b) - g(a))$. 这就证明了 $\lim_{\lambda\to 0} \sigma = I$. 于是 $I = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}g(t)$. □

参考 — 那汤松 (著), 徐瑞云 (译), 陈建功 (校): 实变函数论 (第五版), 高等教育出版社, 2010 年. [第八章第 6 节, 第九章第 7 节]

对 Itô 随机积分和随机微分方程理论的介绍, 可参考: 刘见礼、袁海荣 (编), 随机微分方程基础及应用讲义, 2021.

Stieltjes 积分的计算

- 定理: 设在 $[a,b]$ 中 f 是连续的, 而 $g(x)$ 绝对连续, 则 $(S)\ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}g(t) = (L)\ \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$.

证明: 在上述条件下 $g(t)$ 是有界变差函数 (变差被 $\int_a^b |g'(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$ 控制), 所以左边的 Stieltjes 积分存在. 右边 Lebesgue 积分的存在性是显然的. 余下证明两积分相等. 设 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 作和 $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)]$, 注意 $g(x_{k+1}) - g(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} g'(x)\,\mathrm{d}x$. 那么 $\left|\sigma - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}[f(\xi_k) - f(x)]g'(x)\,\mathrm{d}x\right| \xrightarrow[\text{设} f(x)\text{ 在 } [x_k,x_{k+1}] \text{ 上的振幅为 } \omega_k]{\le} \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\int_{x_k}^{x_{k+1}}|g'(x)|\,\mathrm{d}x \le \alpha\int_a^b |g'(x)|\,\mathrm{d}x$, 其中 $\alpha = \max\{\omega_k\}$. 由 f 在 $[a,b]$ 上的一致连续性, 当 $\max_k\{x_{k+1} - x_k\} \to 0$ 时 $\alpha \to 0$. 由极限的唯一性, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \lim\sigma = \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$. □

- 定理: 设在 $[a,b]$ 上 f 是有界变差函数, 而 $g(x)$ 绝对连续, 则 $(S)\ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}g(t) = (L)\ \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$.

证明: 只需修改估计如下: $\left|\sigma - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \sum_{k=0}^{n-1} v_k\int_{x_k}^{x_{k+1}}|g'(x)|\,\mathrm{d}x \le \beta V_a^b(f)$, 这里 $\beta = \max_k\{\int_{x_k}^{x_{k+1}}|g'(x)|\,\mathrm{d}x\}$, v_k 是 f 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的全变差. 注意当 $\max_k\{x_{k+1} - x_k\} \to 0$ 时 $\beta \to 0$. □

引理

对任意的 $f \in L^2([0,t])$, 定义 $C_{(0)}([0,t])$ 上线性泛函 $\Phi_f : \omega \mapsto \int_0^t \omega(s)f(s)\,\mathrm{d}s$. 那么 $\Phi_f(\cdot)$ 是服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$ 的随机变量, 其中 $\sigma^2 = \mathbb{E}^{\mathrm{W}}[\Phi_f(\omega)^2] = \int_0^t\int_0^t \min\{s,\tau\}f(s)f(\tau)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau$.

证明: 1. 令 $g(s) \doteq \int_s^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, 则 $g(t) = 0$ 且 $g'(s) = -f(s)$. 用 Stieltjes 积分的分部积分公式 (注意 $g \in H^1([0,t])$, 从而绝对连续, 于是变差有界), $\Phi_f(\omega) = -\int_0^t \omega(s)\,\mathrm{d}g(s) = \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}\omega(s)$, 故 $\Phi_f(\omega)$ 是 Gauss 随机变量. 由 Fubini 定理, $\mathbb{E}^{\mathrm{W}}[\Phi_f(\omega)] = \int_0^t f(s)\mathbb{E}^{\mathrm{W}}[\omega(s)]\,\mathrm{d}s = 0$; 回忆对 Brown 运动, $\mathbb{E}^{\mathrm{W}}[\omega(s)\omega(\tau)] = s \wedge \tau$, 故 $\mathbb{E}^{\mathrm{W}}[\Phi_f(\omega)^2] = \mathbb{E}^{\mathrm{W}}\left[\int_0^t\int_0^t f(s)\omega(s)f(\tau)\omega(\tau)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\right] = \int_0^t\int_0^t \min\{s,\tau\}f(s)f(\tau)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau$. □

不能通过 Stieltjes 积分定义关于 Brown 运动轨道的积分

- 共鸣定理 (一致有界原理): 设 X 是 Banach 空间, Y 是赋范线性空间,$\{T_\alpha\}$ 是一族 X 到 Y 的有界线性算子. 如果对任意的 $x \in X$, $\{T_\alpha x\}$ 在 Y 中有界, 则 $\{\|T_\alpha\|\}$ 有界.
- 对 $n = 1, 2, \cdots$, 设 $\pi_n = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} < \cdots < t_n = 1\}$ 是区间 $[0, 1]$ 的划分, 定义 $|\pi_n| \doteq \max_{0\le k\le n-1} |t_{k+1} - t_k|$. 又设 π_{n+1} 是 π_n 的加细, 即 $\pi_{n+1} \subset \pi_n$, 且 $\lim_{n\to\infty} |\pi_n| = 0$. 对 $[0, 1]$ 上右连续函数 $x(t)$, 以及函数 h, 定义 $S_n \doteq \sum_{t_k,t_{k+1}\in\pi_n} h(t_k)\big(x(t_{k+1}) - x(t_k)\big)$.
- 定理: 若对于任意的 $[0, 1]$ 上的连续函数 h, 上述 S_n 当 $n \to \infty$ 时都收敛, 那么 $x(\cdot)$ 必定是有界变差函数.

证明: 取 $X = C([0, 1])$ (给最大模范数, 即一致收敛拓扑), $Y = \mathbb{R}$, 对任意固定的 n, 定义 $T_n(h) \doteq S_n = \sum_{t_k,t_{k+1}\in\pi_n} h(t_k)\big(x(t_{k+1}) - x(t_k)\big)$, 容易验证这是一个有界线性算子. 由于假设对任意 $h \in X$, $\lim_n T_n(h)$ 存在, 特别的就知道 $\sup_n\{|T_n(h)|\} < +\infty$, 根据共鸣定理, $\sup_n \|T_n\| < +\infty$.

另一方面, 对固定的 n, 容易构造连续函数 h, 使得在点 t_k, $h(t_k) = \mathrm{sign}\big(x(t_{k+1}) - x(t_k)\big)$, 且 $\|h\|_X = 1$. 那么就有

$\|T_n\| \ge |T_n(h)| = \sum_{t_k,t_{k+1}\in\pi_n} |x(t_{k+1}) - x(t_k)|$. 两边对 n 取上确界, 就知道 $\mathrm{V}_0^1(x(\cdot)) \le \sup_n \|T_n\| < +\infty$, 即 x 是有界变差函数. □

- 注意: (1) 注意区分, Wiener 积分是连续曲线空间上泛函关于 Wiener 测度的积分, 是个数; 随机积分是依赖于时间的函数关于 Wiener 测度意义下几乎所有 Brown 运动轨道的一类定积分, 是随机变量. (2) 随机积分与该定理不矛盾, 因为随机积分是将上述黎曼和通过对样本点作积分的均方收敛得到的 (相当于给定 h, 考虑使得黎曼和收敛的那些 x), 对于不同的被积函数 h, 即使它连续, 使得随机积分有意义的样本点的集合也不同. 上述定理是固定 x, 考虑使得黎曼和收敛的所有的 h.

Feynman-Kac 公式的应用、路径积分的算例

- 定理: $\{t \geq 0, \xi \in \mathbb{R}\}$ 上 Cauchy 问题 $u_t = \frac{1}{2}u_{\xi\xi} - a\xi^2 u, u(0,\xi) = 1$ 的解是
$$u(t,\xi) = \mathbb{E}^{\mathbb{W}_\xi}[\mathrm{e}^{-a\int_0^t \omega(s)^2\,\mathrm{d}s}] = \frac{1}{\sqrt{\cosh\sqrt{2a}t}}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2a}}{2}\xi^2\tanh\sqrt{2a}t}.$$
- 证明

1) 设 $\{e_n\}$ 是 $L^2([0,t])$ 中的归一正交基. 由于 $C([0,t]) \subset L^2[0,t], \forall \omega \in C([0,t])$, 成立$(**)$ $\omega(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\Phi_{e_n}(\omega)e_n(s)$, $\int_0^t \omega(s)^2\,\mathrm{d}s = \sum_{n=1}^{\infty}(\omega, e_n)^2$. 这里 $\Phi_{e_n}(\omega) = \int_0^t e_n(s)\omega(s)\,\mathrm{d}s = (\omega, e_n)$. 置 $\beta_n = \int_0^t e_n(s)\,\mathrm{d}s$, 那么
$$\mathbb{E}^{\mathbb{W}_\xi}[\mathrm{e}^{-a\int_0^t\omega(s)^2\,\mathrm{d}s}] = \mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\mathrm{e}^{-a\int_0^t(\omega(s)+\xi)^2\,\mathrm{d}s}] = \mathrm{e}^{-a\xi^2 t}\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\mathrm{e}^{-a[\int_0^t\omega(s)^2\,\mathrm{d}s+2\xi\int_0^t\omega(s)\,\mathrm{d}s]}] \xrightarrow[(**)]{=}$$
$$\mathrm{e}^{-a\xi^2 t}\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\mathrm{e}^{-a[\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_{e_n}(\omega)^2+2\xi\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\Phi_{e_n}(\omega)]}] = \mathrm{e}^{-a\xi^2 t}\mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[\prod_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-a[\Phi_{e_n}(\omega)^2+2\xi\beta_n\Phi_{e_n}(\omega)]}\right]. \quad (***)$$

2) 定义 $L^2([0,t])$ 上线性算子 S: $(Sf)(s) = \int_0^t \min\{s,\tau\}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. 注意积分核 $K(s,\tau) = s\wedge\tau = K(\tau,s)$ 是 $[0,t]\times[0,t]$ 上的连续函数 (从而平方可积), 故这是一个自共轭的紧算子. [参考: 夏道行, 吴卓人, 严绍宗, 舒五昌: 实变函数论与泛函分析, 下册 (第二版修订版), 高等教育出版社, 2010. 6.9 节, p. 342; p. 180, p. 205 (紧算子谱的 Riesz-Schauder 理论.] 由 Hilbert 空间上自共轭的紧算子的谱理论, S 的特征值 λ_n 都是实数, 对应的归一特征函数组 $\{e_n\}$ 就是 $L^2([0,t])$ 上的归一正交基. 注意对任意的 $f, g \in L^2([0,t])$, 有
$\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\Phi_f\Phi_g] = \mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\int_0^t\int_0^t f(s)g(\tau)\omega(s)\omega(\tau)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau] = \int_0^t\int_0^t f(s)g(\tau)\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\omega(s)\omega(\tau)]\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau = \int_0^t\left(\int_0^t f(s)\min\{s,\tau\}\,\mathrm{d}s\right)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau = (Sf, g)$. 于是
$\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\Phi_{e_n}\Phi_{e_m}] = (Se_n, e_m) = \lambda_n\delta_{nm}$. 取 $m = n$, 由上页引理, 可知 $\Phi_{e_n} \sim N(0,\lambda_n)$; 此外, 当 $m \neq n$ 时, $\mathbb{E}^{\mathbb{W}}[\Phi_{e_n}\Phi_{e_m}] = 0 \Leftrightarrow \Phi_{e_n}$ 和 Φ_{e_n} 线性无关 $\Leftrightarrow \Phi_{e_n}$ 和 Φ_{e_n} 独立.

复习 Gauss 随机变量 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 互相独立当且仅当它们两两线性无关. 例如, 对二元正态分布
$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$, 其中 r 是相关系数, (a_1, a_2) 是期望, $\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2\\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$ 是协方差矩阵. 显然 $r = 0 \Leftrightarrow p(x,y) = p_1(x)p_2(y)$, 其中 $p_1(x)$ 是 $N(a_1,\sigma_1^2)$, $p_2(y)$ 是 $N(a_2,\sigma_2^2)$.

3) 下面利用 $\Phi_{e_n}(\omega) \sim N(0,\lambda_n)$ 以及它们的独立性计算 $(***)$:
$\mathbb{E}^{\mathbb{W}}\xi\left[\mathrm{e}^{-a\int_0^t \omega(s)^2\,\mathrm{d}s}\right] = \mathrm{e}^{-a\xi^2 t}\mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[\prod_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-a[\Phi_{e_n}(\omega)^2+2\xi\beta_n\Phi_{e_n}(\omega)]}\right] = \mathrm{e}^{-a\xi^2 t}\prod_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{W}}\left[\exp\left\{-a[\Phi_{e_n}(\omega)^2+2\xi\beta_n\Phi_{e_n}(\omega)]\right\}\right] =$
$\mathrm{e}^{-a\xi^2 t}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_n}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a[y^2+2\beta_n\xi y]}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\lambda_n}}\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-a\xi^2 t}\left(\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+2a\lambda_n}}\right)\left(\exp\left\{2a^2\xi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n\beta_n^2}{1+2a\lambda_n}\right\}\right).$

4) 计算无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+2a\lambda_n)$. 为此计算 λ_n. 由于 $(Sf)(s) = \int_0^t (s\wedge\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^s \tau f(\tau)\,\mathrm{d}\tau + s\int_s^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. 设 $Sf = \lambda f$, $\lambda \neq 0$, 则 $f \in L^2([0,t]) \Rightarrow Sf$ 连续 $\Rightarrow f = \frac{1}{\lambda}Sf$ 连续 $\Rightarrow f$ 可微. 于是两端可对 s 求导, 得到 $\lambda f'(s) = sf(s) + \int_s^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau - sf(s) = \int_s^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$; 再对 s 求导, 得到 $\lambda f''(s) = -f(s)$. 另外注意到 $f(0) = Sf(0) = 0, f'(t) = \frac{1}{\lambda}\int_t^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0$. 于是特征函数 f 满足如下 ODE 问题: $\lambda f''(s) + f(s) = 0, 0 < s < t; f(0) = f'(t) = 0$. 由此就知道 $\lambda_n = \left(\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{t^2}\right)^{-1}$, $e_n(s) = c_n\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi s}{t}, n = 1,2,\cdots$. 于是 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\lambda_n) = \cosh t$, 从而 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+2a\lambda_n) = \cosh\sqrt{2a}t$.

[《数学手册》, 高等教育出版社, 1979. p.192]

4) 计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n\beta_n^2}{1+2a\lambda_n}$. 积分方程 $g(s) = f(s) + \mu\int_0^t K(s,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ (其中 $\mu > 0$) 的解 f 可由下式给出: $f(s) = g(s) - \mu\int_0^t R(s,\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, 函数 $R(s,\tau) = R(s,\tau;\mu)$ 称为预解核. 可验证, 当 $K(s,\tau) = \min\{s,\tau\}$ 时 $R(s,\tau;\mu) = \begin{cases}\frac{\cosh\sqrt{\mu}(t-\tau)\sinh\sqrt{\mu}s}{\sqrt{\mu}\cosh\sqrt{\mu}t}, & s\le\tau,\\ \frac{\cosh\sqrt{\mu}(t-s)\sinh\sqrt{\mu}\tau}{\sqrt{\mu}\cosh\sqrt{\mu}t}, & \tau\le s.\end{cases}$ 引入 $L^2[0,t]$ 上算子 $(R_\mu g)(s) = \int_0^t R(s,\tau;\mu)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, 则 $g = (I+\mu S)f$, $f = (I-\mu R_\mu)g$, 于是 $R_\mu = \frac{1}{\mu}(I-(I+\mu S)^{-1}) = S(I+\mu S)^{-1}$, $\mu > 0$. R_μ 仍然是自共轭紧算子, e_n 仍旧是它的特征函数, 对应特征值为 $\frac{\lambda_n}{1+\mu\lambda_n}$. 于是 $R(s,\tau;\mu) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{1+\mu\lambda_n}e_n(s)e_n(\tau)$, 从而

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n\beta_n^2}{1+2a\lambda_n} = \int_0^t\int_0^t R(s,\tau;2a)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau = \frac{t}{2a} - \frac{1}{(2a)^{\frac{3}{2}}}\tanh\sqrt{2a}t.$ □

参考文献

- Stein, Elias M.; Shakarchi, Rami.: Real analysis. Measure theory, integration, and Hilbert spaces. Princeton Lectures in Analysis, 3. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005.
- Karatzas, Ioannis; Shreve, Steven E.: Brownian motion and stochastic calculus. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 113. Springer-Verlag, New York, 1991.
- 张恭庆, 郭懋正: 泛函分析讲义 (下册). 北京大学出版社, 1990 年.

最后更新: 2021-10-10; 2023-2-12.