数学分析 第六章
微分中值定理及其应用

*§7 方程的近似解

在本节中，我们主要讨论方程 $f(x)=0$ 的数值解(近似解). 求方程解的方法主要有两种：解析法与数值法. 一般来说，解析法是优先考虑的，其原因是所得的解是精确的. 问题在于不是所有的方程都能用解析法的.

法国数学家伽罗瓦(Galois)在19世纪就证明了形如

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \ \ (a_0 \neq 0)$$

的代数方程，当 $n \geq 5$ 时不存在一般的求解公式．因此对于一般的方程，我们必须寻求其它的求解方法，下面介绍一种数值解法——牛顿切线法．

数值解法的详细研究，将由专门课程"数值分析"或"计算方法"去完成．

这里所要考虑的函数满足:

(i) 在 $[a,b]$ 上二阶可导;

(ii) $f'(x) \cdot f''(x) \neq 0$，$f(a)f(b) < 0$.

基本思想是：构造一收敛点列$\{x_n\}$，使得$\xi=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$恰为$f(x)$的零点，故当$n$充分大时，$x_n$可以近似地替代$\xi$.

因为 $f'(x)\neq 0$，$f'(x)$在$[a,b]$上连续，所以

$$m=\min_{x\in[a,b]}|f'(x)|>0$$

下面分四种情形进行讨论.

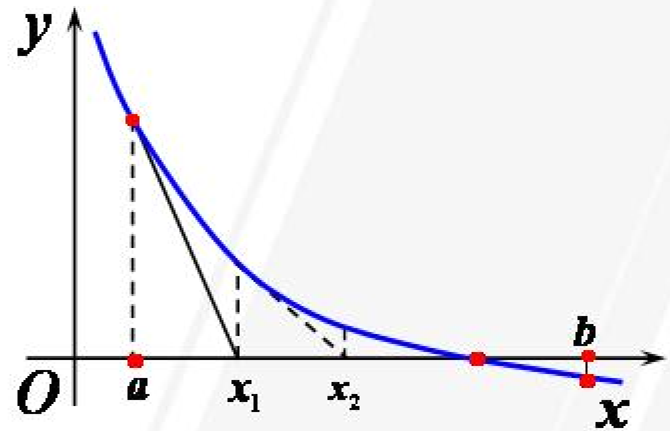
1° 设$f'(x)<0$, $f''(x)>0$，故有$f(a)>0, f(b)<0$. 此时 $f(x)$在(a,b)内有零点ξ，并且是唯一的. 因 $f''(x)>0$，所以 $f(x)$为$[a,b]$上的严格凸函数,

故

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x-a),\ x \in (a, b]. \qquad (1)$$

设 $x_0 = a, y = f(x)$ 在点 $(a, f(a))$ 的切线与 x 轴的交点的横坐标则为

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$



因切线在曲线的下方, 故 $x_1 \in (x_0, \xi)$, 且由(1)式可知 $f(x_1) > 0$. 于是只要用 $[x_1, b]$ 代替 $[a, b]$, 重复上述步骤, 即设曲线的切线与 x 轴交点的横坐标为

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}，\ x_2 \in (x_1, b).$$

一般地 $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},\quad n = 1, 2, \cdots.$

易知$\{x_n\}$递增有上界 b，故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ 存在. 由上式得

$$\xi = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)},$$

推得 $f(\xi) = 0.$

最后来估计$|x_n - \xi|$. 由中值定理

$$f(x_n) = f(x_n) - f(\xi) = f'(\eta)(x_n - \xi), x_n < \eta < \xi,$$

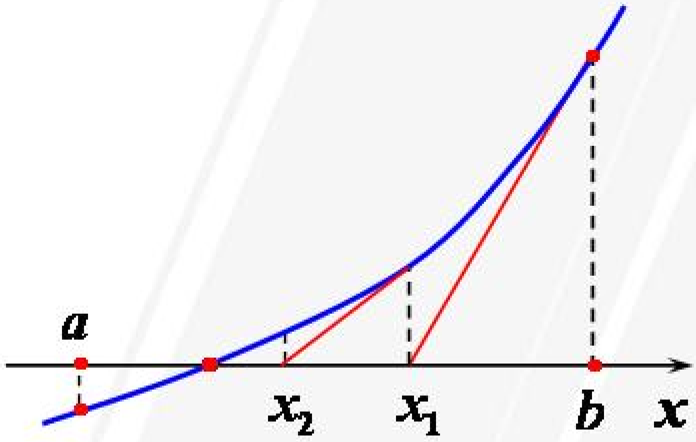
因而

$$|x_n - \xi| = \left|\frac{f(x_n)}{f'(\eta)}\right| \le \frac{|f(x_n)|}{m}.$$

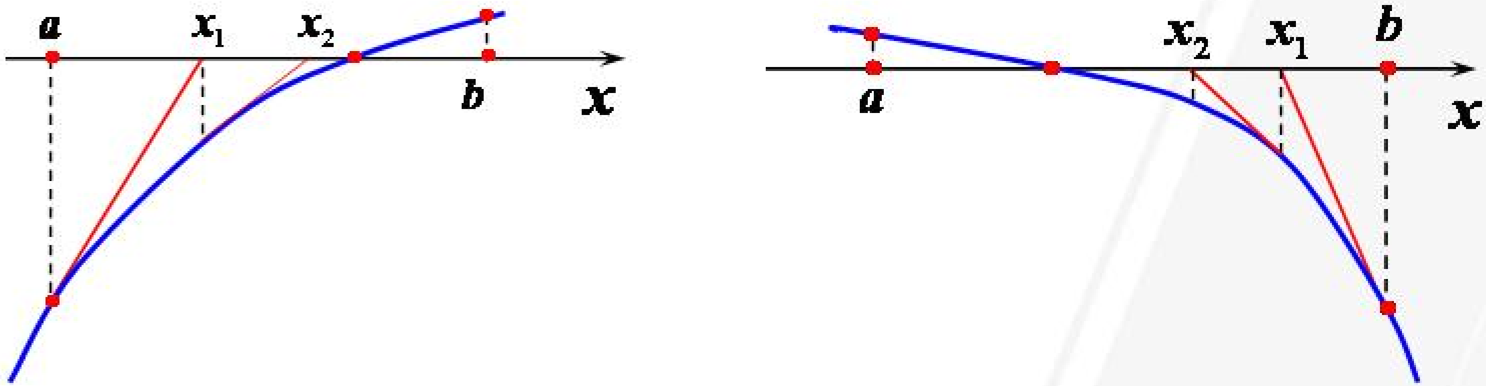
其它三种情形可以类似进行讨论，在此仅以图来示意.

2° $f'(x) > 0, f''(x) > 0,$

且 $f(a) < 0, f(b) > 0.$



3° $f'(x)>0, f''(x)<0$, 且 $f(a)<0, f(b)>0$.



4° $f'(x)<0, f''(x)<0$, 且 $f(a)>0, f(b)<0$.

注意: 这四种情形本质上是相同的. 在解题时, 应区分不同情形, 选取点 x_0 是 a 还是 b. 而误差公式

$$|x_n-\xi|\le\frac{|f(x_n)|}{m}$$

对各种情形都是有效的.

例 用牛顿切线法求方程 $x^3-2x^2-4x-7=0$ 的近似解，使误差不超过0.01.

解 设 $f(x)=x^3-2x^2-4x-7$, 则

$$f'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2),$$

$$f''(x)=6x-4.$$

易见 $x=-\frac{2}{3}$ 为极大值点, $x=2$ 为极小值点, 并且 $f\left(-\frac{2}{3}\right)<0.$ 因为

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$

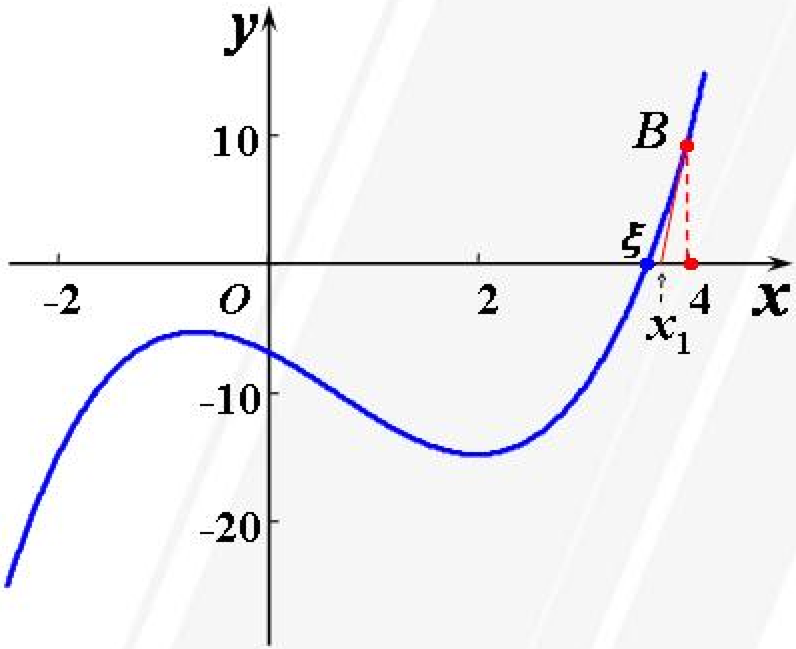
所以不难验证 $f(x)=0$ 有且只有一个根.

注意到 $f(3)=-10<0,\ f(4)=9>0,$ 因而存在 $\xi\in(3,4),\ f(\xi)=0.$ 由于在 $[3,4]$ 上有

$$f'(x)>0,\quad f''(x)>0,$$

因此属于情形 2°.

从点 $B(4,9)$ 作切线交 x 轴于 $(x_1,0)$, 则



$$x_1=4-\frac{f(4)}{f'(4)}$$

$$=4-\frac{9}{28}\approx 3.68,\qquad |x_1-\xi|\le\frac{|f(x_1)|}{m}.$$

因为 $f'(x)$在 $[3, 4]$ 上的最小值 $m=11$, $f(3.68)=1.03$,

所以 $|x_1-\xi|\le\frac{1.03}{11}$, 又 $\frac{1.03}{11}>0.01$, 故不满足要求.

再从 $B_1(x_1, f(x_1))$ 作切线交 x 轴于 $(x_2, 0)$, 则

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=3.68-\frac{f(3.68)}{f'(3.68)}\approx 3.63,$$

$$|x_2-\xi|\le\frac{|f(x_2)|}{m}=\frac{0.042}{11}<0.01,$$

因此取 $\xi\approx 3.63$ 即为所求.