数学分析　第六章
微分中值定理及其应用

§6 函数图像的讨论

在中学里学过一些简单函数的作图，采用的主要方法是描点法. 这种方法比较粗糙,一般不能精确反映函数的基本特性(如单调区间，极值点，凸性，拐点) . 在这一节中，将综合运用学过的微分学知识，并结合周期性、奇偶性等初等数学知识，比较完整地介绍函数的作图方法.

函数作图基本步骤：

(i) 确定函数的定义域，并讨论奇偶性、周期性；

(ii) 找出函数图象的特殊点，比如与两坐标轴的交点，以及函数的不连续点、不可导点；

(iii) 确定函数的单调性区间、极值点、凸性区间、拐点；

(iv) 找出渐近线；

(v) 综合上述结果，列表并作图.

例1 作出函数 $y=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$ 的图象.

解 $f(x)$的定义域：$x\in(-\infty, +\infty)$.

$$f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}},$$

$$f''(x)=\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}=\frac{10x+2}{9x\sqrt[3]{x}}.$$

由 $f'(x)=0$, 解得 $x=\frac{2}{5}$; $x=0$时，$f'(x)$不存在.

由 $f''(x)=0$, 解得 $x=-\frac{1}{5}$; $x=0$时，$f''(x)$不存在.

下面列表表示 $y=f(x)$ 的单调区间 ($f'(x)$ 的变号区间) 和凸性区间 ($f''(x)$ 的变号区间).

x	$(-\infty,-\frac{1}{5})$	$-\frac{1}{5}$	$(-\frac{1}{5},0)$	0	$(0,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	不存在	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	不存在	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	凹增	拐点 $(-\frac{1}{5},f(-\frac{1}{5}))$	凸增	极大值	凸减	极小值	凸增

$f\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{3}{25}\sqrt[3]{20}$ 为极小值，$\left(-\frac{1}{5},-\frac{6}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$ 为拐点，$f(0)=0$为极大值. 函数图象如下：