数学分析 第六章
微分中值定理及其应用

§4 函数的极值与最大(小)值

极大(小)值是局部的最大(小)值.它有着很明显的几何特征.在本节中,我们将逐一研究函数的这些几何特征.

一、极值判别

二、最大值与最小值

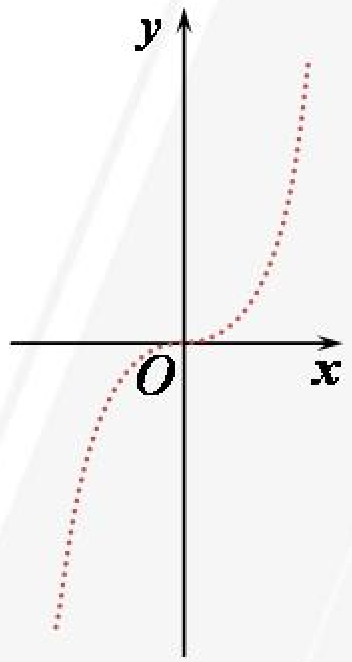
*点击以上标题可直接前往对应内容

极值判别

费马定理告诉我们，可微函数的极值点一定是稳定点. 也就是说, 在曲线上相应的点处的切线一定是水平的.

我们在这里再次强调：费马定理是在函数可微的条件下建立的. 换句话说，若没有可微这个前提条件，费马定理的结论 $f'(x)=0$ 就无从说起.

当然，费马定理的逆命题亦不真. 例如对于任意的可微函数 $\varphi(x)$，$\varphi(0) \neq 0$，函数 $y = x^3\varphi(x)$ 在点 $x = 0$ 的导数为零，但 $x = 0$ 不是它的极值点.



下面给出极值的充分条件.

定理6.11（极值的第一充分条件）

设函数 $f(x)$ 在 x_0 连续，在某邻域 $U^\circ(x_0;\delta)$ 上可导.

(i) 若当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x_0)\le 0$，当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)\ge 0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 取得极小值.

(ii) 若当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x_0)\ge 0$，当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)\le 0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 取得极大值.

证　根据导函数的符号判别函数单调性的方法，可以知道该定理的几何意义十分明显．在这里仅给出 (i) 的证明.

因为 $f'(x)\le 0,\ x\in(x_0-\delta,x_0)$，$f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0]$ 上递减，故

$$f(x)\ge f(x_0),\ x\in(x_0-\delta,x_0).$$

同理可证 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\delta)$ 上递增，故

$$f(x)\ge f(x_0),\ x\in(x_0,x_0+\delta).$$

于是

$$f(x_0)\le f(x),\ x\in U^\circ(x_0;\delta),$$

即 x_0 是 $f(x)$ 的一个极小值点 .

定理6.12（极值的第二充分条件）

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某领域 $U(x_0;\delta)$内可导，$f''(x_0)$ 存在. 若

$$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)\neq 0,$$

那么 $x=x_0$ 是 $f(x)$的一个极值点，并且

(i) $f''(x_0)>0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取极小值.

(ii) $f''(x_0)<0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取极大值.

证 同样我们仅证(i). 因为

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}>0,$$

所以由保号性, 存在$\delta>0$, 当$x\in U^{\circ}(x_0;\delta)$时,

$$\frac{f'(x)}{x-x_0}>0.$$

从而当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时, $f'(x)<0$;

当$x\in(x_0,x_0+\delta)$时, $f'(x)>0$.

由极值判别的第一充分条件得知: x_0是极小值点 .

例1 求函数 $f(x)=3\arctan x-\ln x$ 的极值点.

解 由

$$f'(x)=\frac{3}{1+x^2}-\frac{1}{x}=\frac{-(x^2-3x+1)}{x(1+x^2)}=0,$$

求得稳定点

$$x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

当 $0<x<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ 时, $f'(x)<0$;

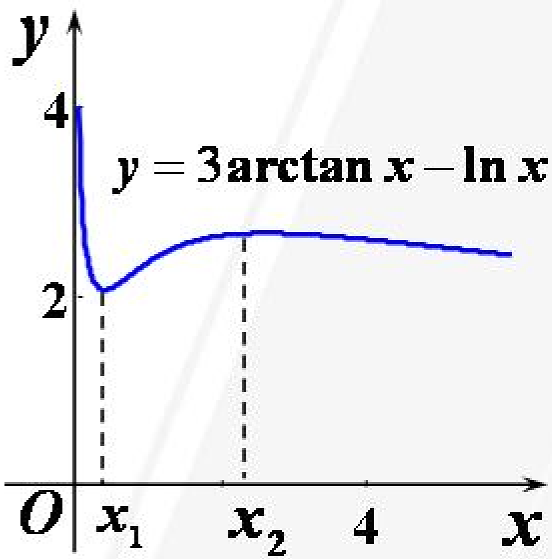
当 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ 时, $f'(x)>0$;

当 $x>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ 时, $f'(x)<0$.

所以 x_1 是 $f(x)$ 的极小值点，

x_2 是 $f(x)$ 的极大值点.

（参见右图）



例2 求函数 $f(x)=(x-a)x^{\frac{2}{3}}$ 的极值点与极值 .

解 $f(x)=x^{\frac{5}{3}}-ax^{\frac{2}{3}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续 .

当 $x\neq 0$ 时,

$$f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{2a}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}(5x-2a).$$

当 $a\neq 0$ 时, 稳定点为 $x=\frac{2a}{5}$,不可导点为 $x=0$;

当 $a=0$ 时， 稳定点为 $x=0$ ， 没有不可导点.

为了更好地加以判别，我们列表如下：

(1) $a>0$

x	$(-\infty, 0)$	0	$\left(0, \frac{2a}{5}\right)$	$\frac{2a}{5}$	$\left(\frac{2a}{5}, +\infty\right)$
y'	$+$	不存在	$-$	0	$+$
y	增	0	减	$-\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}} a^{\frac{5}{3}}$	增

即 $x=0$ 是极大值点，$f(0)=0$ 是极大值；

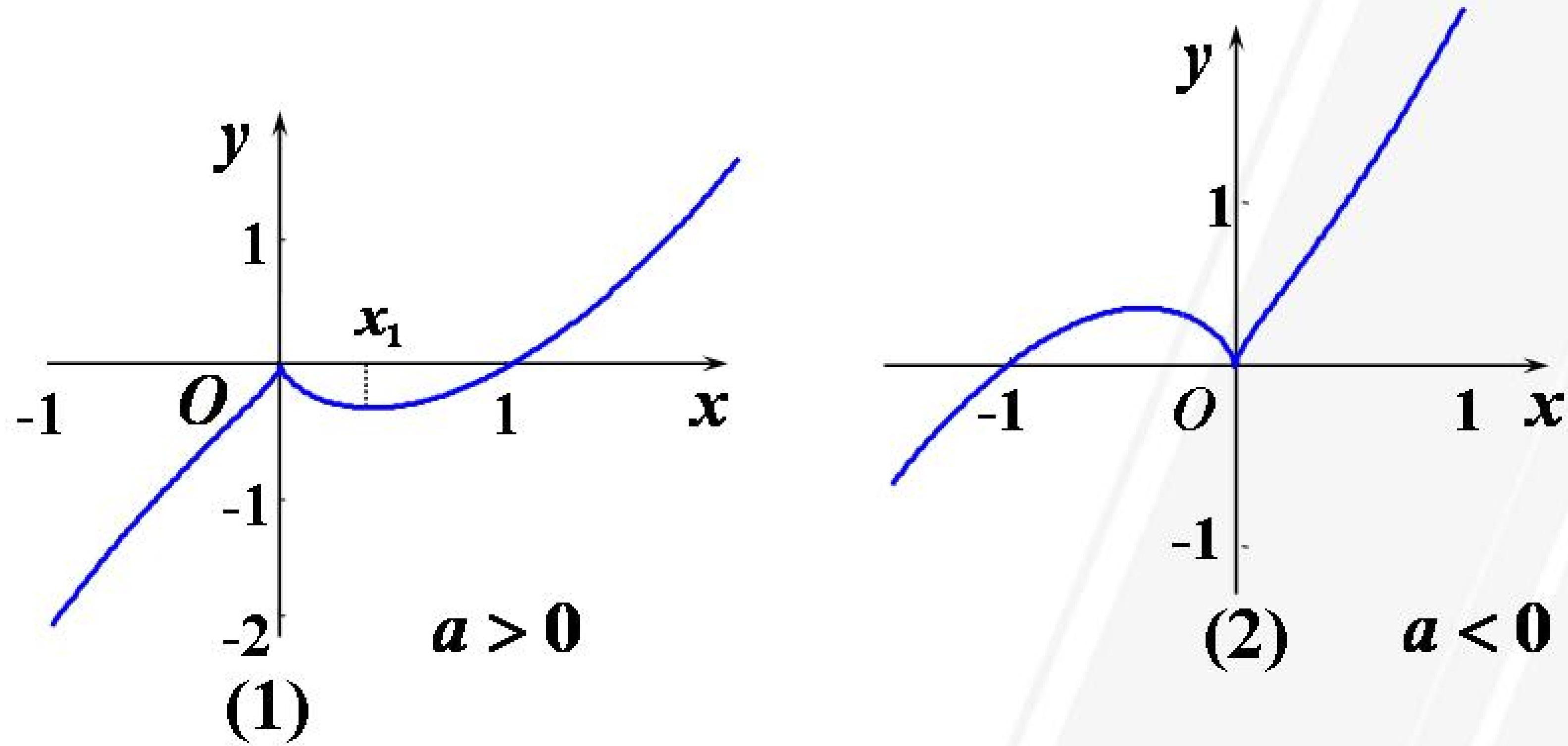
$x=\frac{2a}{5}$ 是极小值点，$f\left(\frac{2a}{5}\right)=-\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}} a^{\frac{5}{3}}$ 是极小值.

(2) $a<0$

x	$\left(-\infty,\dfrac{2a}{5}\right)$	$\dfrac{2a}{5}$	$\left(\dfrac{2a}{5},0\right)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	不存在	$+$
y	增	$-\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}a^{\frac{5}{3}}$	减	极小值	增

即 $x=\dfrac{2a}{5}$是极大值点, $f\left(\dfrac{2a}{5}\right)=-\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}a^{\frac{5}{3}}$

是极大值； $x=0$是极小值点, $f(0)=0$ 是极小值 .



$$f(x)=(x-a)x^{\frac{2}{3}}$$

(3) $a=0,\ f(x)=x^{\frac{5}{3}}$. 请读者自行讨论.

例 3 求 $f(x)=x^2+\dfrac{432}{x}$ 的极值点与极值.

解 $f(x)$ 的定义域为 $x\neq 0$,

$$f'(x)=2x-\frac{432}{x^2}.$$

令 $f'(x)=0$, 得$x=6$. 又因为

$$f''(6)=\left(2+\frac{864}{x^3}\right)\Bigg|_{x=6}=6>0,$$

由定理6.11, $x=6$是极小值点, $f(6)=108$是极小值.

试问这里为什么不考虑不可导点 $x=0$?

对于 $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)=0$ 的情形，可借助于更高阶的导数来判别.

定理6.13（极值的第三充分条件）

设 f 在点 x_0 的某邻域内存在直到 $(n-1)$ 阶的导数，且 $f^{(n)}(x_0)$存在.

若$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,$

$f^{(n)}(x_0)\neq 0$，则有：

(i) n 为偶数时，x_0是$\begin{cases}\text{极小值点，当 } f^{(n)}(x_0)>0,\\ \text{极大值点，当 } f^{(n)}(x_0)<0;\end{cases}$

(ii) n 为奇数时，x_0不是极值点.

证 由泰勒公式, 有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{(n)}+o((x-x_0)^n)$$

$$=f(x_0)+\mu_n(x)(x-x_0)^n.$$

其中 $\mu_n(x)=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o(1)$, 它在某邻域 $U(x_0;\delta)$

内恒与 $f^{(n)}(x_0)$ 同号.

(i) 当 n 为偶数, 而 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时, 有

$$\mu_n(x)(x-x_0)^n>0,\ x\in U(x_0;\delta),$$

故 $f(x)\ge f(x_0)$, $x\in U(x_0;\delta)$, 即 x_0 是极小值点;

又当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时，有

$$\mu_n(x)(x-x_0)^n<0,\ x\in U(x_0;\delta),$$

故 $f(x)\le f(x_0)$，$x\in U(x_0;\delta)$，即 x_0 是极大值点.

(ii) 当 n 为奇数时，有

$$(x-x_0)^n\begin{cases}<0, & x\in(x_0-\delta,x_0),\\ >0, & x\in(x_0,x_0+\delta).\end{cases}$$

从而 $\mu_n(x)(x-x_0)^n$ 在 x_0 左右两侧异号，这就说明了 x_0 不是极值点.

例 4 求函数 $f(x)=x^4(x-1)^3$ 的极值.

解 由 $f'(x)=x^3(x-1)^2(7x-4)=0$，求得 $x_1=0$，$x_2=1$，$x_3=\dfrac{4}{7}$ 是稳定点. 又因

$$f''(x)=6x^2(x-1)(7x^2-8x+2),$$

$f''(0)=f''(1)=0$，$f''\left(\dfrac{4}{7}\right)>0$，所以由第二判别法，

求得极小值为 $f\left(\dfrac{4}{7}\right)=-\dfrac{6912}{823543}$.

而对于稳定点 x_1 与 x_2 却无法知道结果，我们尝试用第三充分条件来进行判别.

由于

$$f'''(x)=6x(35x^3-60x^2+30x-4),$$

$$f'''(0)=0\,,\ f'''(1)>1\,,$$

因此 $x=1$ 不是极值点($n=3$ 是奇数). 又因

$$f^{(4)}(x)=24(35x^3-45x^2+15x-1)\,,$$

$$f^{(4)}(0)<0\,,$$

所以 $f(0)=0$ 是极大值($n=4$是偶数).

注 第三充分条件并不是万能的. 例如 $x=0$ 是

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

的极小值点, 但是因为 $f^{(k)}(0)=0,\quad k=1,2,\cdots,$

所以无法用定理 6.12 来判别.

最大值与最小值

由连续函数的性质，若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，那么一定有最大、最小值，这对求函数的最大(小)值提供了强有力的保证.

因为极大(小)值是局部的最大(小)值，故若函数在区间内部(不是端点)取得最大(小)值，那么这个值一定是极大(小)值. 这也就告诉我们：最大(小)值只可能在极值点、区间端点和不可导点之中取得.

下面具体介绍求函数最大(小)值的方法.

(1) 求出 $f(x)$ 在 (a,b) 上的稳定点 .

(2) 求出 (a,b) 上 $f'(x)$ 不存在的点 .

(3) 设(1)和(2)的点为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 由前面的分析

可知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有:

最大值 $M = \max\{f(a), f(x_1), \cdots, f(x_n), f(b)\}$,

最小值 $m = \min\{f(a), f(x_1), \cdots, f(x_n), f(b)\}$.

例 5 求函数 $f(x)=|2x^3-9x^2+12x|$ 在区间 $\left[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}\right]$ 上的最大、最小值.

解 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}\right]$ 上连续，故最大(小)值存在.

$$f(x)=\left|\ x(2x^2-9x+12)\ \right|$$

$$=\begin{cases}-x(2x^2-9x+12), & -\frac{1}{4}\le x\le 0\\ x(2x^2-9x+12), & 0<x\le\frac{5}{2}\end{cases},$$

所以 $$f'(x)=\begin{cases}-6x^2+18x-12\\ 6x^2-18x+12\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-6(x-1)(x-2)\,,\ -\dfrac{1}{4}\le x\le 0\\ 6(x-1)(x-2)\,,\ 0<x\le\dfrac{5}{2}\end{cases}.$$

容易计算 $f'(0-0)=-12,\ f'(0+0)=12,$ 并且 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，由导数极限定理推知

$$-12=f'_-(0)\ne f'_+(0)=12,$$

故在 $x=0$ 不可导.

这样就得到不可导点为 0, 稳定点为 1, 2. 因为

$$f(1)=5,\quad f(2)=4,\quad f(0)=0,$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{115}{31},\quad f\left(\frac{5}{2}\right)=5,$$

所以 最大值为 $f(1)=f\left(\frac{5}{2}\right)=5$, 最小值为 $f(0)=0$.

$$f(x)=\begin{cases}-x(2x^2-9x+12), & -\frac{1}{4}\le x\le 0\\ x(2x^2-9x+12), & 0<x\le\frac{5}{2}\end{cases},$$

例 6 证明不等式：$2^x \geq 1 + x^2,\quad 0 \leq x \leq 1.$

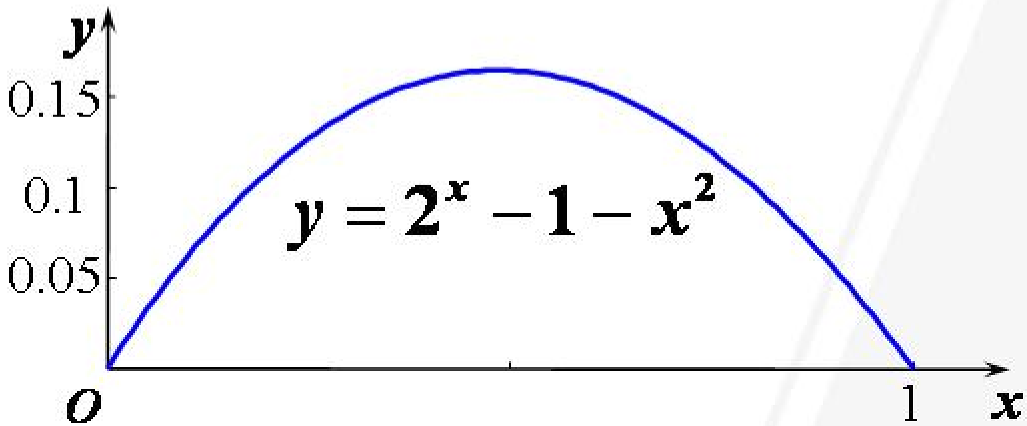
证 设$F(x) = 2^x - 1 - x^2$. 要证$F(x) \geq 0$, 也就是要证 $F(x)$ 的最小值非负.

$$F'(x) = 2^x \ln 2 - 2x,\quad F''(x) = 2^x (\ln 2)^2 - 2.$$

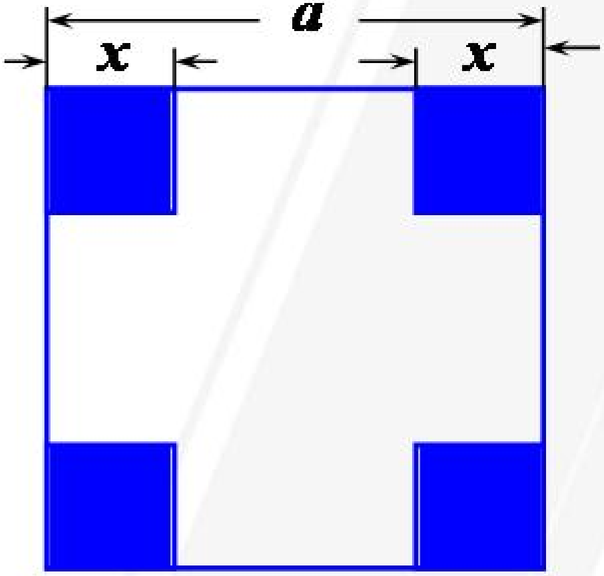
因为在$(0, 1)$内$F''(x) < 0$, 这就说明$F(x)$在$(0, 1)$上无极小值点. 所以最小值只能在端点取到, 故

$$m = \min\{F(0), F(1)\} = 0.$$

于是证得 $2^x \geq 1 + x^2,\ x \in [0, 1].$ （见下图）


y
0.15
0.1
0.05
$y=2^x-1-x^2$
O
1
x

例 7 如图所示，剪去正方形四角同样大小的小正方形后制成一个无盖的盒子，问剪去的小正方形的边长为何值时，盒子的容积最大.



解 设正方形的边长为 a，每一个小正方形的边长为 x，则盒子的容积为

$$V(x)=x(a-2x)^2,\ x\in\left[0,\ \frac{a}{2}\right].$$

因为 $V'(x)=12\left(x-\dfrac{a}{2}\right)\left(x-\dfrac{a}{6}\right)$,

所以稳定点为 $x=\frac{a}{6}$ （$x=\frac{a}{2}$是端点）. 又

$$V''\left(\frac{a}{6}\right)=-4a<0,$$

推知$V\left(\frac{a}{6}\right)=\frac{2a^3}{27}$为极大值.

因为$V(x)$在$\left(0,\frac{a}{2}\right)$上仅有唯一的极值，那么这个极(大)值一定是最大值.

所以问题的解为:在四个角上截取边长为 $\frac{a}{6}$ 的小正方形后，得到最大容积为 $\frac{2a^3}{27}$ 的无盖盒子.

例8 设某商店每天向工厂按出厂价每件3元购进一批商品零售. 若零售价定为每件 4 元, 估计销售量为 400 件. 若零售价每降低 0.05元, 可多售 40 件, 问每件定价多少和从工厂购进多少时才能获得最大利润.

解 设每件定价为 p, 购进 x 件(应该全部卖完), 则利润为 $L=(p-3)x$. 由条件 p 与 x 的关系为

$$\frac{x-400}{p-4}=\frac{440-400}{3.95-4}=-40\div 0.05=-800,$$

即 $x=3600-800p$. 所以

$$L(p) = (p-3)(3600-800p)$$
$$= -800p^2 + 6000p - 10800,$$
$$L'(p) = -1600p + 6000 .$$

令 $L'(p) = 0$, $p = 3.75$. $L''(3.75) = -1600 < 0$, 则 $L(3.75)=450$(元) 是极大值. 因为 $L(p)$ 在所讨论的区间上仅有一个极值，所以 $L(3.75)$ 就是最大值.

结论:

(1) 定价为 3.75 元 / 件时可获最大利润 450 元;

(2) 应从工厂购进 $x = 3600 - 800 \times 3.75 = 600$(件).

复习思考题

1. 若 $f(x)$ 在 x_0 取极大值，是否可断定在 x_0 充分小邻域内，$f(x)$ 在 x_0 的左侧递增，右侧递减？试考察例子：

$$f(x)=\begin{cases} 2-x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0, \\ 2, & x=0. \end{cases}$$

2. 若 $f(x)$ 在区间 I 上连续，且仅有惟一的极值点 x_0. 试问当 $f(x_0)$ 为极大(小) 值时，为什么 $f(x_0)$ 必为 I 上的最大(小)值？