数学分析 第六章
微分中值定理及其应用

多项式函数是最简单的函数.用多项式来逼近一般的函数是近似计算的重要内容,也是数学的研究课题之一.

§3 泰勒公式

*点击以上标题可直接前往对应内容

带有佩亚诺型余项的泰勒公式

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导，由有限增量公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

当 $|x - x_0|$ 充分小时，$f(x)$ 可以由一次多项式

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

近似地代替，其误差为 $o(x - x_0)$. 但在许多情况下，误差仅为 $o(x - x_0)$ 是不够的，而要考虑用较高次的多项式来逼近 f，使得误差更小，如 $o((x - x_0)^n)$.

问题: 是否存在一个 n 次多项式 $P_n(x)$, 使得

$$f(x)-P_n(x)=o((x-x_0)^n)?$$

答案: 当 $f(x)$ 在点 x_0 有 n 阶导数时, 这样的 n 次多项式是存在的. 现在来分析这样的多项式与 $f(x)$ 有什么关系?

设

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n,$$

则

$$P_n(x_0)=a_0,\ \ P_n'(x_0)=a_1,\ P_n''(x_0)=2!a_2,\ \ \cdots,$$

$$P_n^{(n)}(x_0)=n!a_n,$$

即 $a_0 = P_n(x_0),\ a_1 = \dfrac{P_n'(x_0)}{1!},\ a_2 = \dfrac{P_n''(x_0)}{2!},\ \cdots,$

$$a_n = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

上式表明 $P_n(x)$ 的各项系数是由其在点 x_0 的各阶导数所确定的.

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导. 如果

$$f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n),$$

即

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$$

则不难得到:

$$f^{(k)}(x_0)=P_n^{(k)}(x_0),\quad k=0,1,2,\cdots,n, \tag{1}$$

其中 $k=0$ 表示不求导. 这时称

$$T_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{2}$$

为 $f(x)$ 在点 x_0 的 n 阶泰勒多项式, 称

$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\ (k=0,1,\cdots,n)$$

为泰勒系数. $T_n(x)$ 确实是我们所需要的多项式.

定理6.8

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有 n 阶导数，则

$$f(x)=T_n(x)+o((x-x_0)^n),$$

即

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$

$$\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n). \qquad (3)$$

证 设 $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$，$Q_n(x)=(x-x_0)^n$，

故只需证

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{Q_n(x)}=\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}0.$$

因为 $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$

$$R_n^{(k)}(x)=f^{(k)}(x)-T_n^{(k)}(x)$$

所以

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0,$$

$$Q_n(x_0)=Q_n'(x_0)=\cdots=Q_n^{(n-1)}(x_0)=0\,,\,Q_n^{(n)}(x_0)=n!$$

则当 $x\in U^{\circ}(x_0)$ 且 $x\to x_0$ 时，连续使用 $n-1$ 次洛必达法则，得到

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}$$

$$=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}\right]$$

$$=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}-f^{(n)}(x_0)\right]=0.$$

(3)式称为$f(x)$在点x_0处的带有佩亚诺型余项的n阶泰勒公式.

注1 即使$f(x)$在点x_0附近满足

$$f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n) \tag{4}$$

也不能说明$P_n(x)$一定是$f(x)$的n阶泰勒多项式.

比如

$$f(x)=D(x)\cdot x^{n+1}\ ,\ P_n(x)=0,$$

在 $x_0=0$处满足 (4). 但是当 $n>1$ 时, $P_n(x)$ 不是 $f(x)$ 在点 $x_0=0$ 的 n 阶泰勒多项式, 原因是 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的高阶导数(二阶和二阶以上)都不存在, 所以无法构造 n 阶多项式.

注2 若 $f(x)$ 在点 x_0 有 n 阶导数, 则只有惟一的多项式 (泰勒多项式 $T_n(x)$) 满足:

$$f(x)=T_n(x)+o((x-x_0)^n).$$

注3 可以证明对任意一个n次多项式$P_n(x)$，存在$U(x_0)$，使得

$$|f(x)-T_n(x)| \le |f(x)-P_n(x)|,\quad x\in U(x_0).$$

这也就是说，$T_n(x)$是逼近$f(x)$的最佳n次多项式.

在以后的应用中，公式(3)中的x_0常被取作0，形式变为

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n).$$

此式称为(带有佩亚诺型余项)的麦克劳林公式.

泰勒 (Taylor,B. 1685-1731, 英国)

麦克劳林(Maclaurin,C. 1698-1746, 苏格兰)

例1 验证下列公式

1. $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

2. $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m});$$

3. $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1});$$

4. $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n);$$

5. $$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+o(x^{n});$$

6. $$\frac{1}{1-x}=1+x+x^{2}+\cdots+x^{n}+o(x^{n}).$$

以上这些公式均为最基本的泰勒公式(麦克劳林公式), 请务必牢记.

下面验证 1 和 6, 其余请读者自己验证.

验证 1 因为 $f^{(k)}(x)=\mathrm{e}^x$，所以

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1.$$

于是 e^x 的 n 阶麦克劳林公式为

$$\mathrm{e}^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n).$$

---

1. $\mathrm{e}^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n);$

6. $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n).$

验证 6 设 $g(x)=\dfrac{1}{1-x}$，则

$$g'(x)=\frac{1!}{(1-x)^2},\ g''(x)=\frac{2!}{(1-x)^3},\cdots,$$

$$g^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}},$$

故

$$g(0)=1,\ g'(0)=1!,\ g''(0)=2!,\ \cdots,g^{(n)}(0)=n!.$$

于是 $\dfrac{1}{1-x}$ 在 $x=0$ 的 n 阶麦克劳林公式为

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n).$$

例2 求 $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 的麦克劳林公式, 并求 $f^{(98)}(0)$ 与 $f^{(99)}(0)$.

解 由例1 $\mathrm{e}^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$,

那么

$$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^n\cdot n!}+o(x^{2n}).$$

由定理 6.8 的注 2, 可知上式就是 $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 的麦克劳林公式, 由泰勒系数公式可知 x^{98}和x^{99}的系数为

$$\frac{1}{98!}f^{(98)}=\frac{(-1)^{49}}{2^{49}\cdot 49!},\qquad \frac{1}{99!}f^{(99)}(0)=0,$$

于是得到 $f^{(98)}(0)=-\dfrac{98!}{2^{49}\cdot 49!}$, $f^{(99)}(0)=0.$

例3 求 $\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=1$ 的泰勒公式.

解 利用 $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$.

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{1+(x-1)}=\frac{1}{1-[-(x-1)]}$$

$$=1-(x-1)+(x-1)^2+\cdots$$

$$+(-1)^n(x-1)^n+o((x-1)^n).$$

下面这个例题是说明如何利用泰勒公式来求极限.

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^2)-e^{-x^2}-\sin x^3+1}{x^3}$.

解 因为 $\ln(1-x^2)=-x^2-\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)$,

$$\sin x^3=x^3+o(x^3),\quad e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}+o(x^4),$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)-e^{-x^2}-\sin x^3+1}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2-1+x^2-x^3+1+o(x^3)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^3+o(x^3)}{x^3}=-1.$$

本题虽然可用洛必达法则来求，但上法比较简单.

带有拉格朗日型余项的泰勒公式

前面讲的带有佩亚诺型余项的泰勒公式实际上是有限增量公式的一个推广，它只是定性地的告诉我们用泰勒多项式去替代函数,其误差为

$$o((x-x_0)^n).$$

下面是一个定量形式的泰勒公式.

定理6.10（泰勒定理）

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在直到 n 阶连续导函数，在 (a,b) 内存在 $(n+1)$ 阶导数，则对 $\forall x, x_0 \in [a,b]$，存在 $\xi \in (a,b)$，使

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{5}$$

或者 $f(x) = T_n(x) + \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

其中 $T_n(x)$ 是 $f(x)$ 在点 x_0 的 n 阶泰勒多项式.

证 设 $G(t)=(x-t)^{n+1}$,

$$F(t)=f(x)-[f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2$$
$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n];$$

只要证明

$$F(x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}G(x_0).$$

不妨设 $x>x_0$, 则$F(t)$, $G(t)$在$[x_0,x]$上连续，在(x_0,x)上可导, 且

$$G'(t)=-(n+1)(x-t)^n\neq 0,\ t\in[x_0,x).$$

$$F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n,\ F(x)=G(x)=0$$

由柯西中值定理

$$\frac{F(x_0)}{G(x_0)}=\frac{F(x_0)-F(x)}{G(x_0)-G(x)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}.$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},\ \xi\in(x_0,x)\subset(a,b),$$

于是得到

$$f(x)=T_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

我们称

$$R_n(x)=f(x)-T_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

为 $f(x)$ 在点 x_0 的 n 阶拉格朗日型余项.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$

$$\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad (5)$$

称为 $f(x)$ 在点 x_0 的带有拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式.

注 请比较公式 (5) 与拉格朗日中值定理.

因 ξ 介于 x_0 与 x 之间, 故存在正数 $\theta\,(0<\theta<1)$,

使得 $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$, 所以 $R_n(x)$ 又可写成

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

当 $x_0=0$ 时, 公式 (5) 成为

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}. \qquad (6)$$

公式 (6) 称为带有拉格朗日型余项的麦克劳林公式.

公式 (3) 与公式 (5) 都是泰勒公式, 并且前面部分均为泰勒多项式, 而不同的是 $R_n(x)$ 的表达形式不一样. 读者在应用时, 需根据不同情况选择合适形式的余项.

例1 中六个公式的余项均为佩亚诺型的, 现在将它们改写为带有拉格朗日型余项的公式:

(i) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1},$$
$$(0<\theta<1,\ x \in (-\infty,+\infty)).$$

(ii) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$
$$+(-1)^m \frac{\cos\theta x}{(2m+1)!} x^{2m+1}, (0<\theta<1, x \in (-\infty,+\infty)).$$

(iii) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$
$$+(-1)^{m+1} \frac{\cos\theta x}{(2m+2)!} x^{2m+2}, (0<\theta<1, x \in (-\infty,+\infty)).$$

(iv) $$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

$$+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},\ (0<\theta<1,\ x>-1).$$

(v) $$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1},$$

$$(0<\theta<1,\ \ x>-1).$$

(vi) $$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}},$$

$$(0<\theta<1,\ x>-1).$$

这里仅对公式 (iii) 进行验证, 其余 5 个请读者自证.

设 $f(x)=\cos x$, 则

$$f^{(k)}(x)=\cos(x+k\cdot\frac{\pi}{2}),\ k=0,1,2,\cdots.$$

于是

$$f(0)=1,\ f'(0)=0,\ f''(0)=-1,\ f'''(0)=0,$$

$$\cdots\cdots$$

$$f^{(2m)}(0)=(-1)^m,\quad f^{(2m+1)}(0)=0,$$

$$f^{(2m+2)}(\theta x)=\cos(\theta x+(m+1)\pi)=(-1)^{m+1}\cos\theta x.$$

从而有

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

$$+ \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!} \cos\theta x \cdot x^{2m+2}.$$

泰勒公式在近似计算中的应用

例5 (1) 计算 e 的值,使其误差不超过 10^{-6}.

(2) 证明 e 是无理数.

解 由例5 可知

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1.$$

因为 $0 < \theta < 1$, $2 < e < 3$, 所以误差

$$R_9(1) < \frac{3}{10!} = \frac{3}{3628800} < 10^{-6}.$$

于是

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!} \approx 2.718281,$$

其误差不超过 10^{-6}.

下证 e 是无理数. 这是因为

$$n!\mathrm{e}-n!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\frac{\mathrm{e}^{\theta}}{n+1}. \qquad (7)$$

倘若 $\mathrm{e}=\dfrac{p}{q}$ $(p,q)=1$ 是有理数. 取 $n \geq q$ 且 $n \geq 3$,

则 (7) 式左边是整数, 由于 $\dfrac{\mathrm{e}^{\theta}}{n+1}<\dfrac{\mathrm{e}}{n+1}<\dfrac{3}{n+1}$,

当 $n>2$ 时(7)式右边不是整数. 矛盾.

所以 e 是一个无理数.

(同样可证明 $\sin 1, \cos 1$, 都不是有理数.)

例 6 计算 ln2 的值, 使其误差不超过10^{-4}.

解 我们自然会想到利用公式 (iv)，此时用 $x=1$ 代入，它的余项是

$$R_n(1)=(-1)^n\frac{1}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}},\ 0<\theta<1.$$

要确保 $|R(1)|<0.0001$，必须满足 $n>10000$.

显然这样的计算量太大, 所以必须寻找新的方法.

现考虑函数

$$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x},\quad -1<x<1.$$

因为 $\ln(1+x)$ 的 n 阶泰勒多项式为:

$$x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},$$

$\ln(1-x)$ 的 n 阶泰勒多项式为:

$$-x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^n}{n},$$

所以 $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 的 $2n$ 阶泰勒多项式为:

$$2\left(x+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right).$$

而 $$f^{(2n+1)}(x)=(2n)!(1+x)^{-2n-1}+(2n)!(1-x)^{-2n-1}$$

$$=\frac{(2n)!}{(1+x)^{2n+1}}+\frac{(2n)!}{(1-x)^{2n+1}},$$

于是

$$R_{2n}(x)=\frac{1}{2n+1}\left[\frac{1}{(1+\theta x)^{2n+1}}+\frac{1}{(1-\theta x)^{2n+1}}\right]x^{2n+1}.$$

令 $\dfrac{1+x}{1-x}=2$, 解得 $x=\dfrac{1}{3}$. 要使

$$R_{2n}\left(\frac{1}{3}\right)\le\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}<0.0001,$$

只要取 $n=6$, 便得到

$$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 3^{3}}+\cdots+\frac{1}{11\times 3^{11}}\right)=0.6931,$$

其误差不超过0.0001 (真值为0.693147180…).

复习思考题

1. 若$T_n(x)$是 $f(x)$ 在 $x=0$ 的 n 阶泰勒多项式，那么, 在什么条件下 $T_n(x^2)$ 一定是 $f(x^2)$ 的 $2n$ 阶泰勒多项式?

2. 教材上的例 7 说明了什么?