数学分析 第六章
微分中值定理及其应用

§2 柯西中值定理和不定式极限

柯西中值定理是比拉格朗日定理更一般的中值定理，本节用它来解决求不定式极限的问题.

一、柯西中值定理

二、不定式极限

*点击以上标题可直接前往对应内容

柯西中值定理

定理6.6（柯西中值定理）

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足:

(i) $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(ii) $f(x), g(x)$ 在开区间 (a, b) 上可导;

(iii) $g'(x) \neq 0$;

(iv) $g(a) \neq g(b)$.

则在开区间 (a,b) 内必定 (至少) 存在一点 ξ, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

几何意义

首先将 f, g 这两个函数视为以 x 为参数的方程

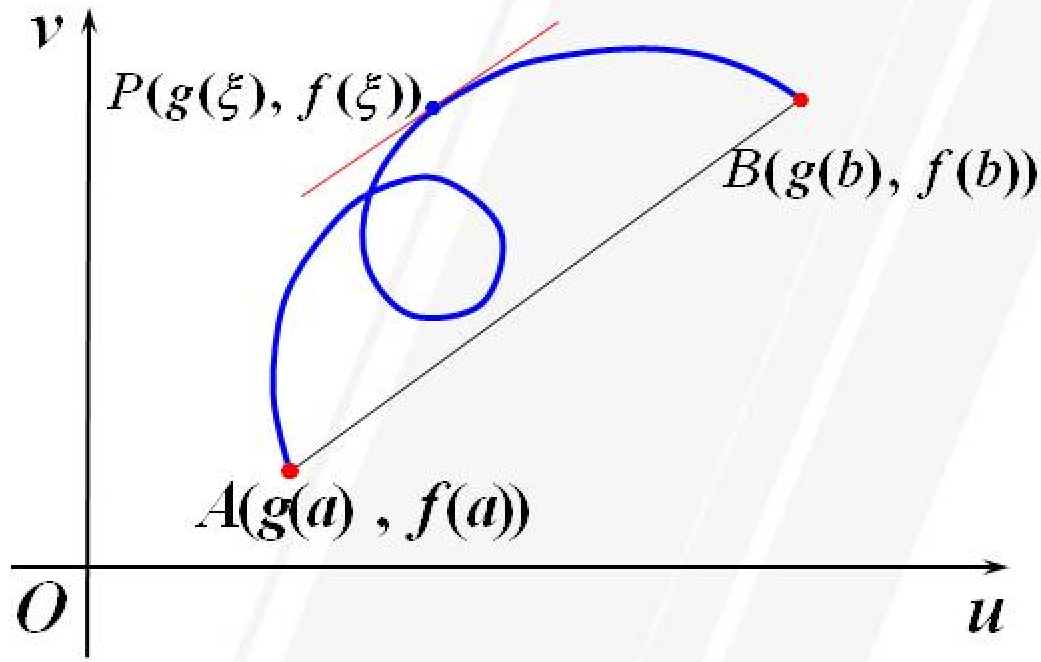
$$u = g(x),\quad v = f(x).$$

它在 $O\text{-}uv$ 平面上表示一段曲线. 由拉格朗日定理的几何意义, 存在一点 (对应于参数) ξ 的导数

$\left.\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right|_{x=\xi}$ 恰好等于曲线

端点弦 AB 的斜率:

$$k_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$



证 作辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

显然, $F(x)$满足罗尔定理的条件, 所以存在点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 即

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0.$$

因为$g'(\xi)\neq 0$(否则 $f'(\xi)$ 也为零, 与条件 (iii) 矛盾),

从而
$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

例1 设函数 f 在区间 $[a, b](a>0)$ 上连续, 在(a, b)上可导, 则存在$\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

证 设 $g(x)=\ln x$, 显然$f(x)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足柯西中值定理的条件, 于是存在$\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\dfrac{1}{\xi}},$$

变形后即得所需的等式.

例2 设 f 在区间 $(0, 1]$ 上可导，$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\,f'(x) = A$

则 f 在 $(0, 1]$ 上一致连续.

证 设 $M = |A| + 1$，因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\,f'(x) = A$，$\exists\delta_1\ (0 < \delta_1 < 1)$

当 $0 < x < \delta_1$ 时，$\left|\sqrt{x}\,f'(x)\right| \le M$. 在 $[x, y] \subset (0, \delta_1]$ 上，

对 $\sqrt{x}$ 和 $f(x)$ 运用柯西中值定理，知存在 $\xi \in (x, y)$，

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}\right| = 2\left|\sqrt{\xi}\,f'(\xi)\right| \le 2M.\ 得$$

$|f(x) - f(y)| \le 2M\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right|$. $\sqrt{x}$ 在 $(0, \delta_1]$ 上一致连续，

从而 f 在 $(0, \delta_1]$ 上一致连续. 又 f 在 $[\delta_1, 1]$ 上一致连续，

因此 f 在 $(0, 1]$ 上一致连续.

不定式极限

在极限的四则运算中, 往往遇到分子, 分母均为无穷小量（无穷大量）的表达式. 这种表达式的极限比较复杂，各种结果均会发生. 我们将这类极限统称为不定式极限. 现在我们将用柯西中值定理来研究这类极限, 这种方法统称为洛必达法则.

1. $\frac{0}{0}$ 型不定式极限

定理6.7

若函数 f 和 g 满足：

(i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$；

(ii) 在点 x_0 的某空心邻域 $U^\circ(x_0)$ 内两者均可导，

且 $g'(x) \neq 0$；

(iii) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ （A 可以为实数，$\pm\infty$，∞）.

则

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

证 补充定义 $f(x_0)=g(x_0)=0$, 所以 f, g 在点 x_0 连续. 任取 $x\in U^\circ(x_0)$, 则在区间 $[x_0, x]$(或 $[x, x_0]$)上应用柯西中值定理，有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\quad(\xi\text{介于}x_0\text{与}x\text{之间}).$$

令 $x\to x_0$, 则 $\xi\to x_0$，于是有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

注 将定理 1 中的 $x\to x_0$ 改为 $x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to\infty$ 的情形,只要修正相应的邻域，结论同样成立.

例 1 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{\sin 4x}$.

解 容易验证：这是一个 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式．

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{\sin 4x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\sec^2 x}{4\cos 4x}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}.$$

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式极限,只要满足洛必达法则的条件, 可再用该法则. 考察 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在性.

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{\ln(1+x^2)}$.

$\dfrac{0}{0}$ 型

解 因为当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x^2)\sim x^2$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+2x)^{-\frac{1}{2}}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+(1+2x)^{-\frac{3}{2}}}{2}=1.$$

这里在用洛必达法则前，使用了等价无穷小量的代换，其目的就是使得计算更简洁些.

例3 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}$.

解 这显然是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式极限, 可直接利用洛必达法则. 但若作适当变换, 在计算上会显得更简洁些.

令 $t=\sqrt{x}$, 当 $x\to 0^+$ 时有 $t\to 0^+$, 于是

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{1-\mathrm{e}^{t}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{-\mathrm{e}^{t}}=-1.$$

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]'}{1}$ 对数求求导法

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\frac{\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}$$

$$=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x}=-\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

2. $\frac{*}{\infty}$ 型不定式极限

定理6.8

若函数 f 和 g 满足：

(i) $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=\infty$;

(ii) 在点 x_0 的某右邻域 $U_+^\circ(x_0)$ 内二者均可导，且 $g'(x)\neq 0$;

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ （A可以为实数，$\pm\infty,\infty$）.

则
$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

证 设A为实数. 对于任意的$\varepsilon > 0$, $\exists x_1 \in U_+^\circ(x_0)$, 满足不等式 $x_0 < x < x_1$ 的每一个 x,

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \varepsilon,$$

由柯西中值定理，存在 $\xi \in (x, x_1)$, 使

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{g(x_1) - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

从而有

$$\left|\frac{f(x_1) - f(x)}{g(x_1) - g(x)} - A\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (1)$$

从而

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\left(\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_1)}{g(x)}\right)\left(\frac{g(x)}{g(x)-g(x_1)}\right)$$

$$=\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}<A+\frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

因为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{g(x)}{g(x)-g(x_1)}=1$, 所以由保号性，存在正数

$\delta_1(<x_1-x_0)$, 使得当 $x_0<x<x_0+\delta_1$ 时，

$$\frac{g(x)}{g(x)-g(x_1)}>0,$$

由(2)式得

$$\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)}<\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$<\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)} \qquad (3)$$

因为 $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=\infty$, 所以

$$\lim_{x\to x_0}\left(\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)}\right)=A-\frac{\varepsilon}{2};$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)}\right)=A+\frac{\varepsilon}{2};$$

再由保号性得知，

存在正数$\delta(<\delta_1)$，当$x_0<x<x_0+\delta$时

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<A+\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A.$

思考：若$A=+\infty,-\infty$或∞，应该如何证明？

注 这里的$x\to x_0^+$可以用$x\to x_0^-$，$x\to x_0$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to\infty$来替换. 当然定理的条件要作相应的改变.

例5 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

解 这是一个 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

例6 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$.

解

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6}=+\infty.$$

例7 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\sin x}{2x-\sin x}$.

解 这是一个 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式. 如果用洛必达法则,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sin x}{2x-\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\cos x}{2-\cos x}. \qquad (3)$$

而极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\cos x}{2-\cos x}$ 不存在, 但是原极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sin x}{2x-\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{\sin x}{x}}{2-\frac{\sin x}{x}}=1.$$

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在时, 不能推出 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在.

例8　求极限 $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan x}{\arctan 2x}$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan 2x=\dfrac{\pi}{2}$,

所以 $A=1$. 若错误使用洛必达法则:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{\arctan 2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1+4x^2}{2}=2,$$

这就产生了错误的结果. 这说明: 在使用洛必达法则前，必须首先要判别它究竟是否是 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型.

3. 其他类型的不定式极限

不定式极限还有 $0\cdot\infty, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}, \infty\pm\infty$ 等类型, 它们一般均可化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或者 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型.

下面我们举例加以说明.

例9 ($0\cdot\infty$ 型) 求 $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x$.

解 注意到 $x\ln x=\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}$, 则

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to0^+}(-x)=0.$$

但若采用不同的转化方式:

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\dfrac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{-\dfrac{1}{x\ln^2 x}}=-\lim_{x\to0^+}x^2\ln^2 x$$

$$=\cdots\cdots,$$

很明显, 这样下去将越来越复杂, 难以求出结果.

例10 (1^{∞} 型) 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln\cos x}{x^2}}$, 而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$ 是 $\dfrac{0}{0}$ 型.

由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x\cos x} = -\frac{1}{2},$$

因此

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

例11（0^0 型）求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{x^k}}\ (k>0)$.

解 $\because \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{x^k}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)\cdot kx^{k-1}\left(1+x^2\right)}$$

$$=-\frac{1}{k}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)\cdot x^{k-1}(1+x^2)}$$

$$= -\frac{1}{k}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-k+1}(1+x^2)^{-1}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}$$

$$= \frac{1}{k}\lim_{x\to+\infty}\frac{(k-1)x^{-k}(1+x^2)^{-1}+x^{-k+1}(1+x^2)^{-2}2x}{-\frac{1}{1+x^2}}$$

$$= -\frac{1}{k}\lim_{x\to+\infty}((k-1)x^{-k}+2x^{-k+2}(1+x^2)^{-1})$$

$$= 0,$$

所以，原式 $= \mathrm{e}^0 = 1.$

例12（$\infty-\infty$ 型）求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1-\cos x}-2\cot^2 x\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1-\cos x}-2\cot^2 x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1-\cos x}-\dfrac{2\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-2\cos^2 x+2\cos^3 x}{(1-\cos x)\sin^2 x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-2\cos^2 x+2\cos^3 x}{x^4}$$

等价无穷小代换

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{6\sin x\cos x-6\sin x\cos^2 x}{4x^3}$$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{x^3}\lim_{x\to 0}\cos x$$

$$= 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin x\cos x}{x^3}\lim_{x\to 0}\cos x$$

$$= 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin x\cos x}{x^3}$$

$$= 3\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos^2 x + \sin^2 x}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cos x + \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

例13 设 $f(x)=\begin{cases} g(x)/x, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$

已知 $g(0)=g'(0)=0, g''(0)=3,$ 求 $f'(0).$

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$

$$=g'(0)=0,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=\frac{1}{2}g''(0)=\frac{3}{2}.$$

例14 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续可微，

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=A.$ 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A.$

证 根据洛必达法则，有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x f(x)}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]$$

$$=A.$$

复习思考题

例13 中的条件 $g(0)=0$ 用在何处?

为什么在 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)}{2x}=\cdots=\dfrac{1}{2}g''(0)$时不用洛必达法则?