数学分析　第六章
微分中值定理及其应用

"中值定理是联系 f' 与 f 的桥梁. 有了中值定理, 就可以根据 f' 在区间上的性质来得到 f 在该区间上的整体性质.

§1 拉格朗日定理和函数的单调性

*点击以上标题可直接前往对应内容

罗尔定理与拉格朗日定理

定理6.1（罗尔中值定理）

设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上满足:

(i) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(ii) 在开区间 (a, b) 上可导;

(iii) $f(a) = f(b)$.

那么在开区间(a,b)内必定(至少)存在一点ξ, 使

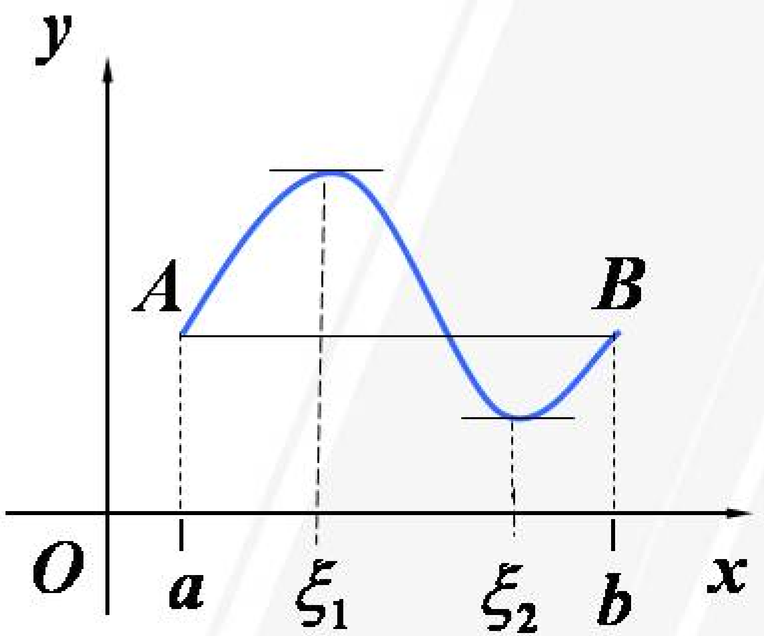
$$f'(\xi) = 0.$$

(1) 几何意义

据右图，因为

$$f(a)=f(b),$$

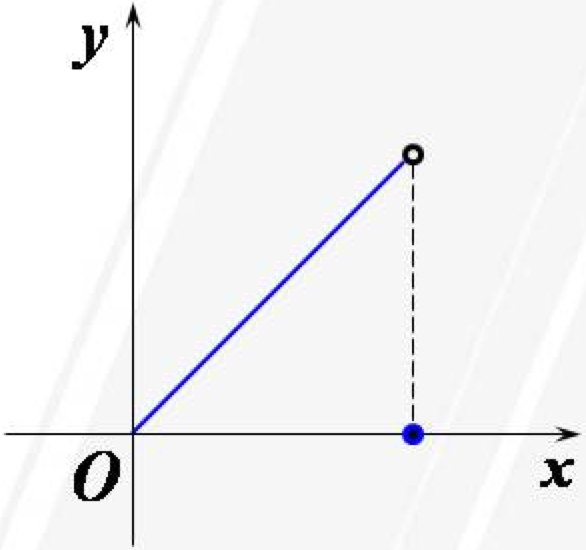
所以线段 AB 是水平的. 由几何直观可以看出，曲线上至少有一点处的切线也是水平的.



(2) 条件分析

定理中的三个条件都很重要，缺少一个, 结论不一定成立.

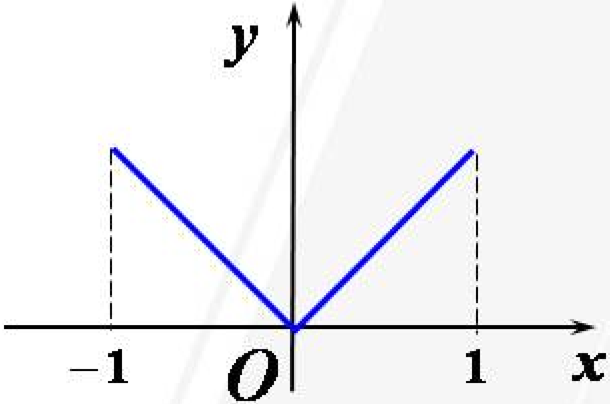
(a) 函数 $f(x)=\begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$



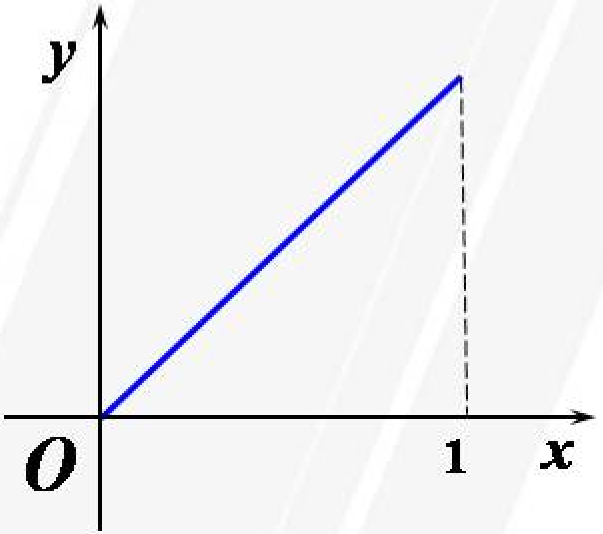
在 [0, 1] 上满足条件 (ii) 和 (iii)，但条件 (i) 不满足, 该函数在 (0, 1) 上的导数恒为1. 结论不成立.

(b) $f(x)=|x|, x\in[-1, 1]$

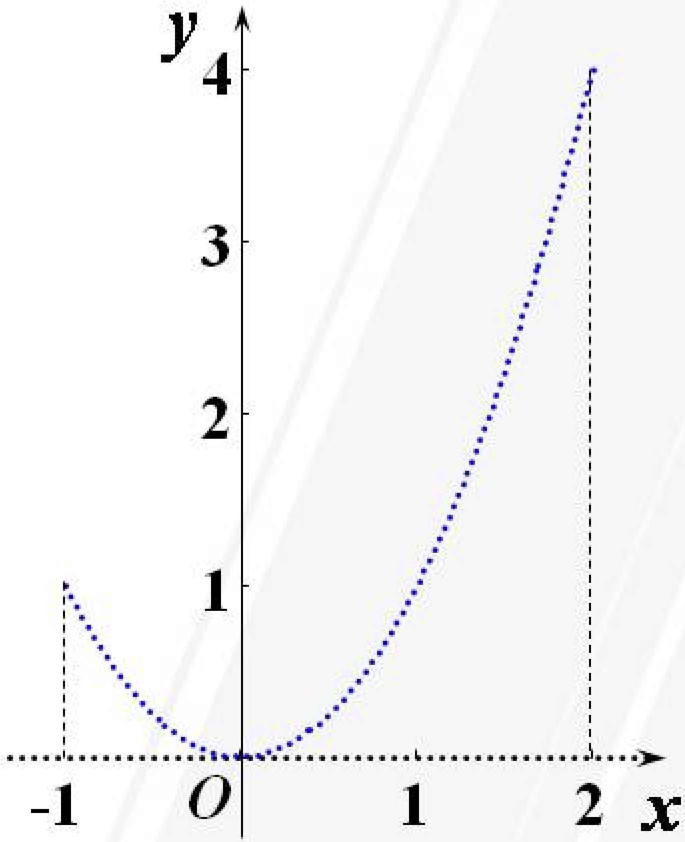
满足条件 (i) 和 (iii)，但条件 (ii) 却遭到破坏 (f 在 $x=0$ 处不可导)，结论也不成立.



(c) $f(x)=x,\ x\in[0,1]$ 满足条件 (i) 和 (ii)，但条件 (iii) 却遭到破坏，该函数在 $(0, 1)$ 内的导数恒为1. 结论也不成立.



注 函数 $f(x)=x^2D(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上三个条件都不满足, 却仍有 $f'(0)=0$. 这说明罗尔定理的三个条件是充分条件, 而不是必要条件.



下面证明定理

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 所以由连续函数的最大、最小值定理, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上能取得最大值 M 和最小值 m. 下面分两种情形加以讨论.

情形1 $M = m$. 此时 $f(x)$ 恒为常数,它的导函数恒等于零, 此时可在 (a, b) 内随意取一点 ξ, 就有

$$f'(\xi) = 0.$$

情形2 $m < M$. 既然最大、最小值不等, 从而最大值与最小值至少有一个不在端点取到. 不妨设最大值不在端点取到, 故存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(\xi) = M.$$

因为在区间内部取到的最大值一定是极大值, 所以由费马定理, 得 $f'(\xi) = 0$.

例1 设 $p(x)$ 是一个多项式, 且方程 $p'(x)=0$ 没有实根, 则方程 $p(x)=0$ 至多有一个实根，且这个根的重数为 1 .

证 设 $p(x)$ 有两个实根 x_1, x_2，$x_1 < x_2$, 由于$p(x)$是多项式, 所以 $p(x)$在$[x_1, x_2]$上满足罗尔定理的条件, 从而存在$\xi \in (a,b)$，使得 $p'(\xi)=0$, 这与条件矛盾.

又若 $p(x)$ 有一个 k 次重根 x_0, 则

$$p(x)=(x-x_0)^k p_1(x),\ k \geq 2.$$

因为 $p'(x)=k(x-x_0)^{k-1} p_1(x)+(x-x_0)^k p_1'(x)$,

所以 $p'(x_0)=0$, 矛盾.

定理6.2（拉格朗日中值定理）

设函数 $f(x)$ 满足：

(i) $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(ii) $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导.

那么在开区间 (a,b) 内（至少）存在一点 ξ，使得

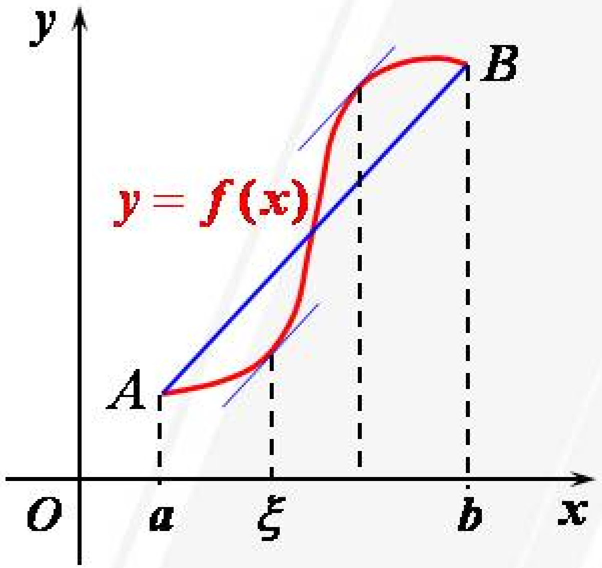
$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

注 当 $f(a)=f(b)$ 时，拉格朗日定理就是罗尔定理，

可见，罗尔定理是拉格朗日定理的一个特例.

几何意义 如右图，曲线 $y=f(x)$ 的两个端点 A, B 连线的斜率为

$$k_{AB}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



用平行推移的方法, 曲线上至少在一点 $(\xi, f(\xi))$ 处的切线与 AB 平行，其斜率 $f'(\xi)$ 也等于 k_{AB}.

定理的证明 设

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$$

$\left(y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right.$ 是直线 AB 的方程)

可以验证$F(x)$满足罗尔定理的三个条件, 所以

$\exists\xi\in(a,b)$, 使

$$F'(\xi)=0,$$

即

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

拉格朗日公式有几个等价的表示形式:

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\ a<\xi<b.$$

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a),\ 0<\theta<1.$$

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h,\ 0<\theta<1.$$

读者可以根据需要选用.

另外，拉格朗日公式对$b<a$ 仍然成立，此时ξ是介于a与b之间的一个常数.

推论1

设$f(x)$在区间I上的导函数$f'(x)\equiv 0$， 则$f(x)$是一个常值函数.

证 对于区间I上的任何两点x_1与x_2, $x_1 < x_2$，$f(x)$在$[x_1, x_2]$上满足拉格朗日定理的条件， 则有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)=0,\quad \xi\in(x_1,x_2).$$

这就是说, $f(x)$在区间I上的任何两个值都相等, 所以为常值函数.

推论2

若函数 f 和 g 均在区间 I 上可导，且

$$f'(x) \equiv g'(x),\ x \in I,$$

则在区间 I 上 $f(x)$ 与 $g(x)$ 只差某一常数，即

$$f(x) = g(x) + c\quad (c\text{为某一常数}).$$

推论3（导数极限定理）

设函数 f 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内连续，在 $U^\circ(x_0)$ 内可导，且极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在，则 f 在点 x_0 可导，且

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x)$$

证 分别按左右极限来证明.

(1) 任取 $x \in U_+^\circ(x_0)$, $f(x)$ 在 $[x_0, x]$ 上满足拉格朗日定理条件，则存在 $\xi \in (x_0, x)$, 使得

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi).$$

由于 $x_0<\xi<x$, 因此当 $x \to x_0^+$ 时，随之有 $\xi \to x_0^+$, 对上式两边求极限，便得

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}f'(\xi)=f'(x_0+0).$$

(2) 同理可得 $f'_-(x_0) = f'(x_0 - 0)$.

因为 $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = k$, 所以 $f'_+(x_0 + 0) = f'_-(x_0 - 0) = k$,

从而 $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = k$, 即 $f'(x_0) = k$.

例2 设 $f(x)$在区间 I 上可微, 且 $|f'(x)|\leq K$, 则函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续.

证 对于任意正数 ε, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{K+1}$, 对任意的 $x_1, x_2 \in I$, $x_1<x_2$, 只要$|x_1-x_2|<\delta$, 便有

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leq|f'(\xi)||x_2-x_1|$$

$$\leq\frac{K\varepsilon}{K+1}<\varepsilon,\quad x_1<\xi<x_2,$$

故$f(x)$在 I上一致连续.

例3 证明: $\arctan b - \arctan a \le b - a,\quad (a < b)$.

证 设 $f(x) = \arctan x$. 显然 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足拉格朗日定理的条件，故有

$$\arctan b - \arctan a = \frac{1}{1+\xi^2}(b-a)$$

$$\le b - a,\quad a < \xi < b.$$

注 例3中的不等号可以成为严格的. 事实上, 当 $0 \le a < b$ 和 $a < b \le 0$ 时，ξ 显然不为零，严格不等式成立.

当 $a<0<b$ 时，

存在 $\xi_1\in(0,b),\xi_2\in(a,0)$, 使得

$$\begin{aligned}&\arctan b-\arctan a\\&=\arctan b-\arctan 0+\arctan 0-\arctan a\\&=\frac{1}{1+\xi_1^2}b+\frac{1}{1+\xi_2^2}(-a)<b-a.\end{aligned}$$

例4. 证明等式 $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, $x \in [-1, 1]$.

证 设 $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, 则在$(-1, 1)$上

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \equiv 0$$

由推论1可知 $f(x) = \arcsin x + \arccos x = C \quad x \in (-1, 1)$.

令 $x = 0$, 得 $C = \dfrac{\pi}{2}$.

又 $f(\pm 1) = \dfrac{\pi}{2}$, 故所证等式在定义域 $[-1, 1]$ 上成立.

注 要证 $x \in I$ 时 $f(x) = C_0$, 只需证在 I 上 $f'(x) \equiv 0$,

且 $\exists\, x_0 \in I$, 使 $f(x_0) = C_0$.

自证: $\operatorname{arctan} x + \operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$

例5 设$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上可微, 且 $f'(x)\ge c>0$, 求证: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

证 任取 $x>a$, 由中值定理,

$$f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)\ge c(x-a),$$

从而

$$f(x)\ge f(a)+c(x-a).$$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(a)+c(x-a))=+\infty$, 所以

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

中值点的讨论.

1. 一般来说, 中值点 ξ, 仅指, $\xi\in(a,b)$, 而不是 $\xi=\dfrac{a+b}{2}$.

2.若 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可微, $[a,+\infty)$ 上连续, 则对任意的 $x\in(a,+\infty)$,

$$f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a).$$

显然, ξ 与 x 有关, 当 $x\to+\infty$ 时, ξ 却未必也趋向于 ∞ .

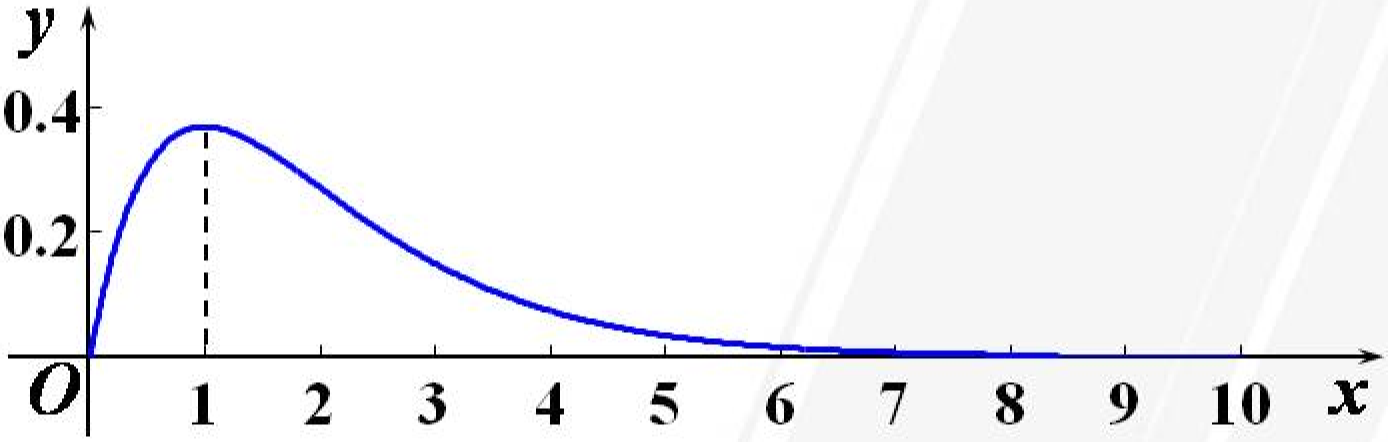
例6 设 $f'(x)=(1-x)e^{-x}$，由拉格朗日中值定理

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),$$

因 $\quad f(x)=xe^{-x},\ x\in[0,+\infty)$

$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)$, 变为 $xe^{-x}=(1-\xi)e^{-\xi}x.$

当 x 趋于$+\infty$ 时, ξ 不趋于 $+\infty$, 而是趋于 1.



3.若 $f(x)$ 在(a, b) 上可微, $[a, b]$ 上连续, 则对于任意 $x \in (a,b]$, 存在 $\xi \in (a,x)$, 使

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a),$$

当 $x \to a$ 时, 必有 $\xi \to a$. 从等式

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi)$$

容易猜测 $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = f'(a)$.

这实际上是不成立的. 请看下面的例题.

例7 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

易见 f 满足拉格朗日中值定理的条件， $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$， $x\neq 0$. 因此对每个 $x>0$，存在 ξ 使

$$x^2\sin\frac{1}{x}-0=\left(2\xi\sin\frac{1}{\xi}-\cos\frac{1}{\xi}\right)x,$$

约去 x，我们得到

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=x\sin\frac{1}{x}-0=2\xi\sin\frac{1}{\xi}-\cos\frac{1}{\xi}=f'(\xi)$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\sin\dfrac{1}{x}=0$ ，有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x}=0.$$

因 $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x\sin\dfrac{1}{x}=0$，而 $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在，所以

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right) \text{不存在.}$$

$$x\sin\frac{1}{x}-0=2\xi\sin\xi-\cos\frac{1}{\xi}$$

函数单调性的判别

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上对任意 $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, 必有 $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增(单调减). 若 "$\le$ $(\ge)$ " 改为严格不等号, 则相应地称它为严格增(减).

下面的定理是本节中的两个主要定理, 今后将不断地使用.

定理6.3

设 $f(x)$在区间 I 上可导, 则 $f(x)$在区间 I 上单调增(减)的充要条件是 : $f'(x) \geq 0 \ \ (\leq 0)$.

证 若 f 为递增函数, 则当 $x, x_0 \in I, x \neq x_0$时, 有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

令 $x \to x_0$, 即得 $f'(x_0) \geq 0$.

反之, 若 $f'(x) \geq 0, x \in I$. $\forall x_1, x_2 \in I$, (设$x_1 < x_2$)

由拉格朗日中值定理, $\exists \xi \in (x_1, x_2)$,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0,$$

即 $f(x_2) \geq f(x_1)$, 这就证明了函数 $f(x)$ 递增.

定理6.4

可微函数 $f(x)$ 在区间 I 上严格递增的充要条件是：

$f'(x)\geq 0$，满足 $f'(x)=0$ 的点集不含一个区间.

证 充分性 由定理6.3可知 $f(x)$递增. 若$f(x)$不是严格递增，则存在$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$，使$f(x_1)=f(x_2)$. 这就得到 $f(x)$在区间(x_1, x_2)上恒为常数，因此

$$f'(x)\equiv 0,\ x\in(x_1, x_2)$$

矛盾.

必要性请读者自证.

注 请读者写出相应于递减和严格递减的判别定理.

推论

设函数在区间I上可微，若$f'(x)>0\left(f'(x)<0\right)$,

则 f 在 I上严格递增(严格递减).

在实际应用中我们经常会用到下面这个事实.

若 $f(x)$在$[a,b]$上连续,(a,b)上(严格)递增(减),

则 $f(x)$在 $[a,b]$ 上(严格)递增(减).

作为应用，下面再举两个简单的例子.

例8 求证 $e^x > 1 + x, x > 0$.

证 设 $F(x) = e^x - 1 - x$, 则 $F'(x) = e^x - 1$. 所以

$F'(x) \geq 0, x \in [0, +\infty)$, 且当 $x > 0$ 时， $F'(x) > 0$

($F'(x) = 0$ 的点不含一个区间). 故 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$

上严格递增. 所以对任意 $x > 0$, 恒有

$$F(x) > F(0) = 0,$$

即 $$e^x > 1 + x, x > 0.$$

例9 设 $f(x)=x^3-x$. 讨论函数 f 的单调区间.

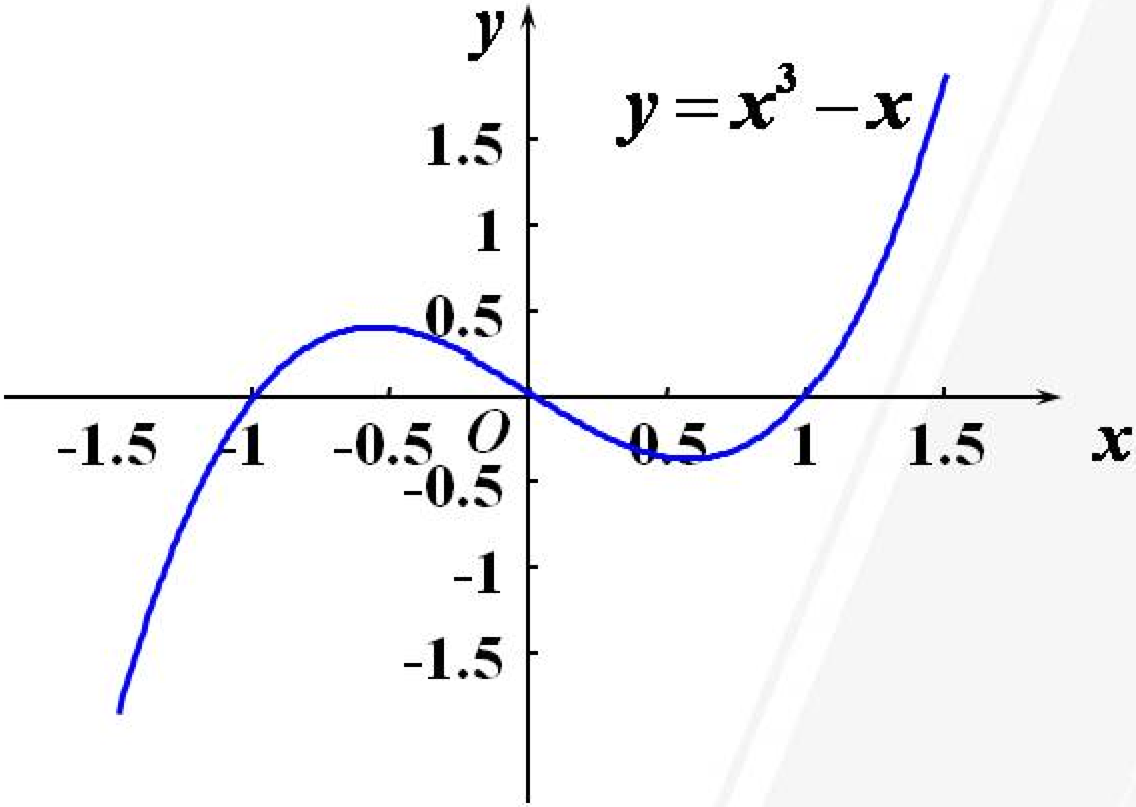
解 由于

$$f'(x)=3x^2-1=(\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1),$$

因此当 $x\in(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}})$ 时, $f'(x)>0$, f 严格增,

当 $x\in(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ 时, $f'(x)<0$, f 严格减,

当 $x\in(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty)$ 时, $f'(x)>0$, f 严格增.


y
$y = x^3 - x$
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
O
0.5
1
1.5
x

定理6.5（达布定理）

如果 f 在 $[a, b]$ 上可导，且 $f'_+(a) \neq f'_-(b)$，k 是介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任一实数，则至少存在一点 $c \in (a,b)$，使得

$$f'(c) = k.$$

达布（Darboux,J.G. 1842-1917, 法国）

证 令 $F(x)=f(x)-kx$, 则 $F'(x)=f'(x)-k$. 根据费马定理, 只要证明 $F(x)$ 在 (a,b) 上有极值点即可.

由于 $F'_+(a)\cdot F'_-(b)=(f'_+(a)-k)\cdot(f'_-(b)-k)<0$, 可设 $F'_+(a)>0$, $F'_-(b)<0$. 由5.1的例11, 分别存在

$$x_1\in U^\circ_+(a),\ x_2\in U^\circ_-(b),\ 且\ x_1<x_2,$$

使得

$$F(x_1)>F(a),\ F(x_2)>F(b).$$

由此可知, $[a,b]$ 上的连续函数 F, 其最大值必在某一点 $c\in(a,b)$ 处取得. 区间内取得的最大值一定是极大值, 由费马定理得 $F'(c)=0$, 即

$$f'(c)=k,\quad c\in(a,b).$$

注 有时称上述定理为导函数的介值性定理 .

推论

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上满足 $f'(x) \neq 0$, 那么 $f(x)$ 在区间 I 严格单调.

复习思考题

罗尔定理证明的主要方法是什么?试与达布定理的证明相比较.