数学分析　第五章
导数和微分

若在有限增量公式

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

中删去高阶无穷小量项，则得 Δy 关于 Δx 的一个线性近似式，这就是“微分”；其中的线性因子 $f'(x_0)$ 即为导数。所以，微分和导数是一对相辅相成的概念。

§5 微分

*点击以上标题可直接前往对应内容

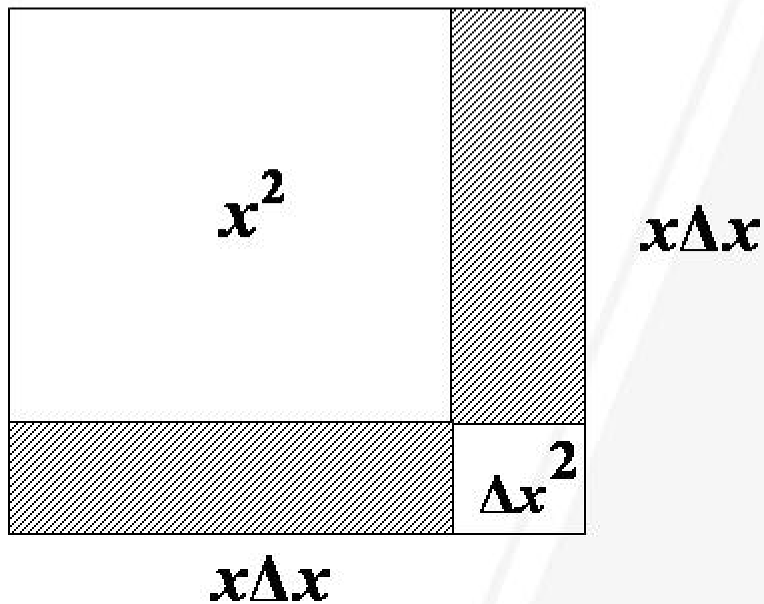
微分的概念

微分从本质上讲是函数增量中关于自变量增量的线性部分，请先看一个具体例子.

设一边长为 x 的正方形，它的面积 $S = x^2$ 是 x 的函数. 如果给边长 x 一个增量 Δx，正方形面积的增量

$\Delta S = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$ 由两部分组成：Δx 的线性部分 $2x\Delta x$ 和 Δx 的高阶部分 $(\Delta x)^2$. 因此时，当边长 x 增加一个微小量 Δx 时，ΔS 可用 Δx 的线性部分来近似.

由此产生的误差是一个关于 Δx 的高阶无穷小量 $(\Delta x)^2$, 即以 Δx 为边长的小正方形(如图).



定义5

设函数 $y=f(x),\ x\in U(x_0)$. 如果增量

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可以表示成

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x), \tag{1}$$

其中 A 是与 Δx 无关的常数，则称函数 f 在点 x_0 可微，并称 $A\Delta x$ 为 f 在点 x_0 处的微分，记作

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=A\Delta x,\ \text{或}\ \mathrm{d}f(x)\big|_{x=x_0}=A\Delta x. \tag{2}$$

由定义，函数在点 x_0 处的微分与增量只相差一个关于Δx 的高阶无穷小量，而$\mathrm{d}y$ 是Δx的线性函数.

更通俗地说，$\mathrm{d}y$ 是Δy的线性近似.

定理5.10

函数 f 在点 x_0 可微的充要条件是 f 在点 x_0 可导, 且 $\mathrm{d}f(x)\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x$.

证 (必要性) 如果 f 在点 x_0 可微, 据 (1) 式有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+o(1).$$

于是

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(A+o(1))=A,$$

即 f 在点 x_0 可导, 且 $f'(x_0)=A$.

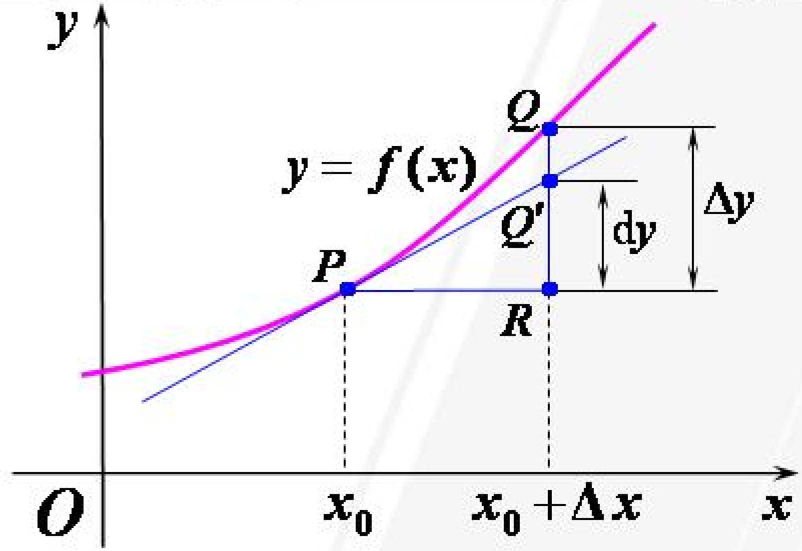
(充分性) 设 f 在点 x_0 处可导, 则由 f 的有限增量公式 $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$, 说明函数增量 Δy 可表示为 Δx 的线性部分 $f'(x_0)\Delta x$, 与关于 Δx 的高阶无穷小量部分 $o(\Delta x)$ 之和. 所以 f 在点 x_0 可微, 且 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x.$

微分概念的几何解释:

f 在点 x_0 的增量为

$$\Delta y = RQ,$$

而微分是 $\mathrm{d}y = RQ'$,



它是点 P 处切线相应于 Δx 的增量.

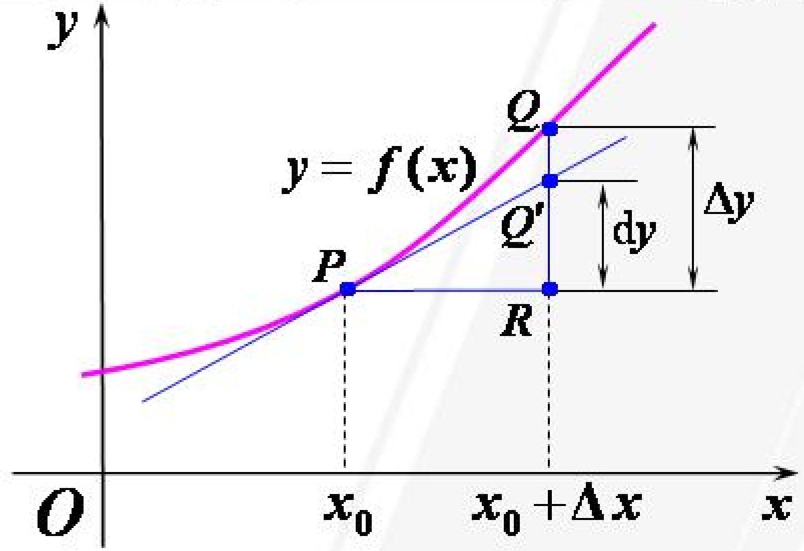
当 $|\Delta x|$ 很小时, 两者之差 $|\Delta y - \mathrm{d}y| = Q'Q$ 相比于 $|\Delta x|$ 将是更小的量(高阶无穷小). 更由于

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left|\frac{\Delta y - \mathrm{d}y}{\Delta x}\right| = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{Q'Q}{RQ'}\left|f'(x_0)\right| = 0,$$

故若 $f'(x_0)\neq 0$, 则得到

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{Q'Q}{RQ'}=0.$$

这说明当



$\Delta x\to 0$ 时, QQ' 还是 RQ' 的高阶无穷小量.

若函数 f 在区间 I 上每一点都可微, 则称 f 是 I 上的可微函数. $f(x)$ 在 I 上的微分记为

$$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x,\quad x\in I, \tag{3}$$

它既依赖于 Δx, 也与 x 有关.

习惯上喜欢把Δx写成$\mathrm{d}x$，于是 (3) 式可改写成

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x,\ x \in I. \tag{4}$$

这相当于$y = x$的情形，此时显然有$\mathrm{d}y = \mathrm{d}x = \Delta x$.

(4) 式的写法会带来不少好处，首先可以把导数看成函数的微分与自变量的微分之商，即

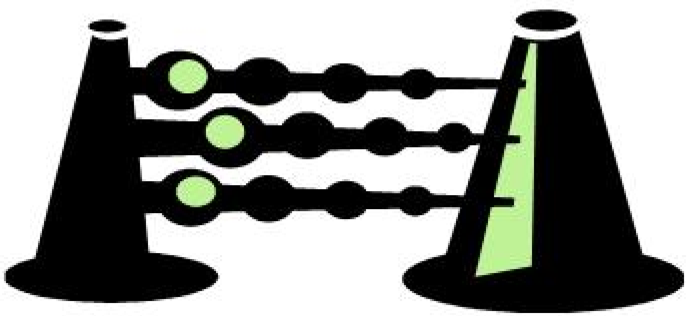
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x), \tag{5}$$

所以导数也称为微商. 更多的好处将体现在后面积分学部分中.

例1 $\mathrm{d}(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$;

$\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}x$;

$\mathrm{d}(a^{x}) = a^{x}\ln a\,\mathrm{d}x$.



微分的运算法则

由导数与微分的关系,可方便得出微分运算法则:

1. $\mathrm{d}(u(x)\pm v(x))=\mathrm{d}u(x)\pm\mathrm{d}v(x)$;

2. $\mathrm{d}(u(x)v(x))=v(x)\mathrm{d}u(x)+u(x)\mathrm{d}v(x)$;

3. $\mathrm{d}\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)=\dfrac{v(x)\mathrm{d}u(x)-u(x)\mathrm{d}v(x)}{v^2(x)}$;

4. $\mathrm{d}(f\circ g(x))=f'(u)g'(x)\mathrm{d}x$, 其中 $u=g(x)$.

由于 $\mathrm{d}u=g'(x)\mathrm{d}x$, 故运算法则 4 又可以写成

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u.$$

它在形式上与(4)式完全一样，不管 u 是自变量还是中间变量（另一个变量的可微函数）上式都成立.

这个性质称为“一阶微分形式不变性”.

例2 求 $y = x^2 \ln x + \cos x^2$ 的微分.

解 $$\mathrm{d}y = \mathrm{d}(x^2 \ln x + \cos x^2) = \mathrm{d}(x^2 \ln x) + \mathrm{d}(\cos x^2)$$
$$= \ln x\,\mathrm{d}(x^2) + x^2\mathrm{d}(\ln x) - \sin x^2\,\mathrm{d}(x^2)$$
$$= x(2\ln x + 1 - 2\sin x^2)\mathrm{d}x.$$

这里在 $\mathrm{d}(\cos x^2) = -\sin x^2\mathrm{d}(x^2) = -2x\sin x^2\mathrm{d}x$ 的计算中，用了一阶微分形式不变性.

例3 求 $y=\mathrm{e}^{x^3+2x+1}$ 的微分.

解 $\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{x^3+2x+1}\mathrm{d}(x^3+2x+1)$

$$=(3x^2+2)\mathrm{e}^{x^3+2x+1}\mathrm{d}x.$$

高阶微分

若将一阶微分 $\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x$ 仅看成是 x 的函数，则当 f 二阶可导时，$\mathrm{d}y$ 关于 x 的微分为

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(f'(x)\Delta x) = f''(x)\Delta x \cdot \Delta x + f'(x)\mathrm{d}(\Delta x)$$

$$= f''(x)(\Delta x)^2 = f''(x)(\mathrm{d}x)^2.$$

或写作 $\mathrm{d}^2 y = f''(x)\mathrm{d}x^2$，称为 f 的二阶微分.

注 由于Δx与 x 无关，因此 x 的二阶微分 $\mathrm{d}(\Delta x) =$ $\mathrm{d}(\mathrm{d}x) = \mathrm{d}^2 x = 0$，它与$\mathrm{d}x^2 = (\mathrm{d}x)^2$，$\mathrm{d}(x^2) = 2x\mathrm{d}x$

三者各不相同，不可混淆.

依次下去, 可由 $n-1$ 阶微分求 n 阶微分:

$$\mathrm{d}^n y=\mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1}y)=\mathrm{d}(f^{(n-1)}(x)\mathrm{d}x^{n-1})=f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n.$$

对 $n\geq 2$ 的 n 阶微分均称为高阶微分. 高阶微分不具有形式不变性. 当 x 是自变量时, $y=f(x)$ 的二阶微分是

$$\mathrm{d}^2 y=f''(x)\mathrm{d}x^2; \tag{6}$$

当 x 是中间变量($y=f(x)$, $x=\varphi(t)$) 时, 二阶微分为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2 y=\mathrm{d}\big(f'(x)\mathrm{d}x\big)&=f''(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}(\mathrm{d}x)\\&=f''(x)\mathrm{d}x^2+f'(x)\mathrm{d}^2x.\end{aligned} \tag{7}$$

它比 (6) 式多了一项 $f'(x)\mathrm{d}^2x$, 当 $x=\varphi(t)$ 时, $\mathrm{d}^2x=\varphi''(t)\mathrm{d}t^2$ 不一定为 0, 而当 x 为自变量时, $\mathrm{d}^2x=0$.

例4 设 $y=f(x)=\sin x$, $x=\varphi(t)=t^2$, 求 d^2y.

解法一 先将 $x=\varphi(t)$ 代入 $y=f(x)$, 得 $y=\sin t^2$, 于是 $y'=2t\cos t^2$, $y''=2\cos t^2-4t^2\sin t^2$. 由 (6) 得

$$\mathrm{d}^2y=(2\cos t^2-4t^2\sin t^2)\mathrm{d}t^2.$$

解法二 依 (7) 式得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 y &= f''(x)\mathrm{d}x^2 + f'(x)\mathrm{d}^2 x \\
&= -\sin x\,\mathrm{d}x^2 + \cos x\,\mathrm{d}^2 x \\
&= -\sin t^2 \cdot (2t\,\mathrm{d}t)^2 + \cos t^2 \cdot 2\mathrm{d}t^2 \\
&= (2\cos t^2 - 4t^2 \sin t^2)\mathrm{d}t^2.
\end{aligned}$$

如果将 $f'(x)\mathrm{d}^2 x$ 漏掉就会产生错误.

$$\mathrm{d}^2 x = \varphi''(t)\mathrm{d}t^2$$

微分在近似计算中的应用

1. 函数值的近似计算

由于 $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$, 故当 Δx 很小时, 有 $\Delta y \approx \mathrm{d}y$. 由此得

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad (8)$$

记 $x = x_0 + \Delta x$, 即当 $x \approx x_0$ 时, (8) 式可改写为

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (9)$$

(9) 式的几何意义是当 x 与 x_0充分接近时, 可用点

$P(x_0, f(x_0))$ 处的切线近似代替曲线，这种线性近似的方法可以简化一些复杂的计算问题.

公式 (9) 分别用于 $\sin x$, $\tan x$, $\ln(1+x)$, e^x ($x_0 = 0$), 可得近似计算公式 (试与等价无穷小相比较):

$$\sin x \approx x,\quad \tan x \approx x,\quad \ln(1+x) \approx x,\quad e^x \approx 1 + x.$$

例5 试求 $\sin 33^\circ$ 的近似值 (保留三位有效数字).

解 $\sin 33^\circ = \sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{60}\right)$, 取 $f(x) = \sin x, x_0 = \dfrac{\pi}{6}$,

$\Delta x = \dfrac{\pi}{60}$, 由公式 (9) 得到

$$\sin 33^\circ \approx \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \times \frac{\pi}{60} \approx 0.545$$

2. 误差的估计

设数 x 是由测量得到的, y 是由函数 $y=f(x)$ 经过计算得到. 由于测量工具精度等原因, 存在测量误差, 实际测得的值只是 x 的某个近似值 x_0. 由 x_0 计算得到的 $y_0=f(x_0)$ 也是 $y=f(x)$ 的一个近似值.

如果已知测量值 x_0 的误差限为 δ_x ，即

$$|\Delta x|=|x-x_0|\le\delta_x,$$

则当 δ_x 很小时, 量 y_0 的绝对误差估计式为:

$$|\Delta y| = |f(x) - f(x_0)| \approx |f'(x_0)\Delta x| \le |f'(x_0)|\delta_x .$$

称 $\delta_y = |f'(x_0)|\delta_x$ 为 y_0 的绝对误差限, 而 y_0 的相对误差限则为

$$\frac{\delta_y}{|y_0|} = \left|\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right|\delta_x . \qquad (11)$$

例6 设测得一球体直径为 42cm, 测量工具的精度为 0.05cm. 试求以此直径计算球体体积时引起的绝对误差限和相对误差限.

解 以 $d_0 = 42$, $\delta_d = 0.05$ 计算的球体体积和误差估计分别为:

$$V_0 = \frac{1}{6}\pi d_0^3 \approx 38792.39 \text{ cm}^3,$$

$$\delta_V = \left| \frac{1}{2}\pi d_0^2 \right| \delta_d = \frac{\pi}{2} \times 42^2 \times 0.05 \approx 138.54 \text{cm}^3;$$

$$\frac{\delta_V}{|V_0|} = \frac{\frac{1}{2}\pi d_0^2}{\frac{1}{6}\pi d_0^3} \times \delta_d = \frac{3\delta_d}{d_0} \approx 3.57 ‰.$$