数学分析 第五章
导数和微分

§4 高阶导数

当我们研究导函数的变化率时就产生了高阶导数.如物体运动规律为 $s = s(t)$,它的运动速度是 $v = s'(t)$,而速度在时刻t的变化率就是物体在时刻t的加速度

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

定义4

如果 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 可导，则称 $f'(x)$ 在点 x_0 的导数为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的二阶导数，记作 $f''(x_0)$. 此时也称 $f(x)$ 在点 x_0 二阶可导.

如果 $f(x)$ 在区间 I 上每一点都二阶可导，则得到一个定义在 I 上的二阶导函数，记作 $f''(x)$，$x \in I$.

仿照上述定义，可以用 f 的 $n-1$ 阶导函数定义 f 的 n 阶导数. 二阶及二阶以上导数称为高阶导数.

函数 f 在点 x_0 处的 n 阶导数记作

$$f^{(n)}(x_0),\ \ y^{(n)}\Big|_{x=x_0},\ \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\Big|_{x=x_0},\ \ \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}\Big|_{x=x_0}.$$

n 阶导函数记作

$$f^{(n)}(x)(\text{或} f^{(n)}),\ \ y^{(n)},\ \ \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n},\ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f(x).$$

这里 $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ 也可写作 $\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n y$，即对 y 进行了n 次

求导运算“$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$”(看作一个算符).

例1 求下列函数的各阶导数:

(1) $y = x^n$(n为正整数); (2) $y = \mathrm{e}^x$;

(3) $y = \sin x, y = \cos x$; (4) $y = \ln x$.

解 (1) $y' = nx^{n-1},\ y'' = n(n-1)x^{n-2}, \cdots,$

$$y^{(n)} = n!,\ y^{(m)} = 0\ (m > n).$$

(2) $y' = \mathrm{e}^x,\ y'' = \mathrm{e}^x,$

对一切 $n \in \mathrm{N}_+, (\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$.

(3) 对 $y=\sin x$, 有 $y'=\cos x=\sin(x+\dfrac{\pi}{2})$,

$$y''=\cos(x+\frac{\pi}{2})=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2}),\cdots,$$

$$y^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2}),\ n\in\mathrm{N}_+.$$

同理 $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}),\ n\in\mathrm{N}_+.$

(4) $y'=\dfrac{1}{x},\ y''=-\dfrac{1}{x^2},\ y'''=\dfrac{1\cdot 2}{x^3},\ \cdots,$

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

高阶导数运算法则 (可用数学归纳法验证):

加法 $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$. (1)

乘法 $(uv)^{(n)}=u^{(n)}v^{(0)}+\mathrm{C}_n^1u^{(n-1)}v^{(1)}+\cdots+$

$$\mathrm{C}_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+u^{(0)}v^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}, \qquad (2)$$

莱布尼茨(Leibniz,G.W. 1646-1716, 德国)

其中 $u^{(0)}=u,\ v^{(0)}=v$.

公式 (2) 称为莱布尼茨公式.

例2 求 $y = e^x \cos x$ 的三阶导数.

解一 $y' = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x \cos x + e^x \cos(x + \frac{\pi}{2});$

$$y'' = e^x \cos x + e^x \cos(x + \frac{\pi}{2})$$

$$+ e^x \cos(x + \frac{\pi}{2}) + e^x \cos(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$= e^x \cos x + 2e^x \cos(x + \frac{\pi}{2}) + e^x \cos(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2});$$

$$y''' = e^x \cos x + e^x \cos(x + \frac{\pi}{2}) + 2e^x \cos(x + \frac{\pi}{2}) +$$

$$2e^x \cos(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}) + e^x \cos(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}) + e^x \cos(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$= e^x \cos x + 3e^x \cos(x + \frac{\pi}{2}) +$$

$$3e^x \cos(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}) + e^x \cos(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}).$$

解二 直接用莱布尼茨公式 (2) 求出 y'''.

解三 $y' = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x \sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4});$

$$y'' = 2e^x \cos(x + 2\cdot\frac{\pi}{4});$$

$$y''' = 2\sqrt{2}\, e^x \cos(x + 3\cdot\frac{\pi}{4}).$$

例3 讨论分段函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geq 0, \\ -x^2, & x<0, \end{cases}$ 的高阶导数.

解 分段函数要分段讨论:

当 $x>0$时,

$$f'(x)=2x,\ f''(x)=2,\ f^{(n)}(x)\equiv 0(n\geq 3);$$

当 $x<0$ 时,

$$f'(x)=-2x,\ f''(x)=-2,\ f^{(n)}(x)\equiv 0(n\geq 3);$$

当 $x=0$ 时, 用左、右导数定义可得

$$f'_+(0)=f'_-(0)=f'(0)=0,$$

由于 $f''_+(0)=2$, $f''_-(0)=-2$, 因此在 $x=0$ 处 $f''(0)$ 不存在. 故当 $n\geq 2$ 时, $f^{(n)}(0)$ 不存在. 从而

$$f'(x)=\begin{cases} 2x, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -2x, & x<0; \end{cases} \quad f''(x)=\begin{cases} 2, & x>0, \\ \text{不存在}, & x=0, \\ -2, & x<0; \end{cases}$$

当 $n\geq 3$ 时, $f^{(n)}(x)=0\ (x\neq 0)$, $f^{(n)}(0)$ 不存在.

例4 求参变量函数(摆线)

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \qquad (3)$$

的二阶导数 y''.

解 首先讨论一般参变量函数

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

的二阶导数. 这个函数的一阶导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

把它写成参数方程:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \end{cases}$$

由此求得

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'}{\varphi'}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'\Big/\varphi'(t),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}. \qquad (4)$$

回到方程(3)，根据公式(4)就有 解法一(公式法)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{[a(t-\sin t)']^3}[\,a(1-\cos t)''a(t-\sin t)'$$

$$-a(1-\cos t)'a(t-\sin t)''\,]$$

$$=\frac{a^2[\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t]}{a^3(1-\cos t)^3}=\frac{-1}{a(1-\cos t)^2}$$

$$=\frac{-1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}=-\frac{1}{4a}\csc^4\frac{t}{2}.$$

解法二（直接计算法）

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(a(t-\sin t)\big)$$

$$=\frac{\cos t\,(1-\cos t)-\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}\cdot\frac{1}{a(1-\cos t)}$$

$$=\frac{\cos t-1}{a(1-\cos t)^3}=\frac{-1}{a(1-\cos t)^2}.$$