§3 参变量函数的导数

平面曲线通常用方程

$$y = f(x) \quad \text{或} \quad F(x, y) = 0$$

来表示;一般情形下则采用参数方程

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in I.$$

这样做最明显的好处,是能方便地推广为多维空间的情形,例如$\mathbf{R}^3$中的曲线:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in I.$$

设平面曲线 C 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta. \tag{1}$$

如果函数 $x = \varphi(t)$ 有反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$, 则(1)式可**确定复合函数** $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$. 由此说明平面曲线两种方程之间的联系.

这种由参数方程 (1) 所表示的函数, 称为参变量函数. **如果 $\varphi(t), \psi(t)$ 都可导**, 且 $\varphi'(t) \ne 0$, 根据复合函数和反函数的求导法则, 得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \qquad (2)$$

(2) 式的几何意义如下: 设由 (1) 式表示的曲线 C 在点 $P(\varphi(t_0),\psi(t_0))$ 处有切线. 过点 P 及邻近点 $Q(\varphi(t_0+\Delta t),\psi(t_0+\Delta t))$ 的割线 PQ 的斜率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)}{\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)},$$

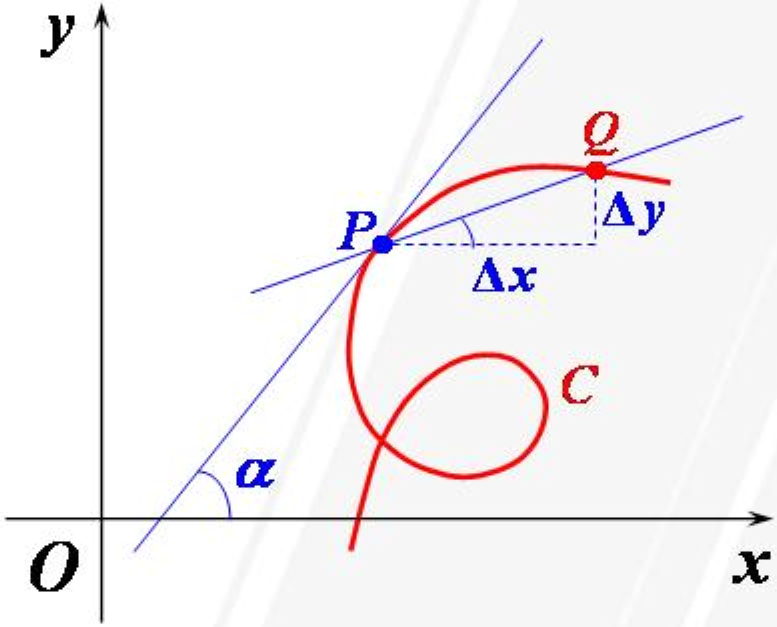
如果 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 在点 t_0 可导, $\varphi'(t_0)\neq 0$, 则切线的斜率为 $\tan\alpha=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{[\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)]/\Delta t}{[\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)]/\Delta t}=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)},$$

其中 α 是切线与 x 轴正向的夹角 (见图).

当 $\psi'(t_0) \neq 0$ 时，有

$$\cot\alpha = \frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}.$$



若 φ, ψ 在 $[\alpha,\beta]$ 上都存在连续导数, 且

$$\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0,$$

则称曲线 C 为光滑曲线. 光滑曲线的每一点都存在切线，且切线与 x 轴正向的夹角$\alpha(t)$是 t 的连续函数.

例1 求由参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad t \in (0, \pi)$$

(这是上半椭圆方程)所确定的函数 $y = f(x)$ 的导数，并求此椭圆在 $t = \pi/4$ 处的切线方程.

解 由公式 (2) 得到

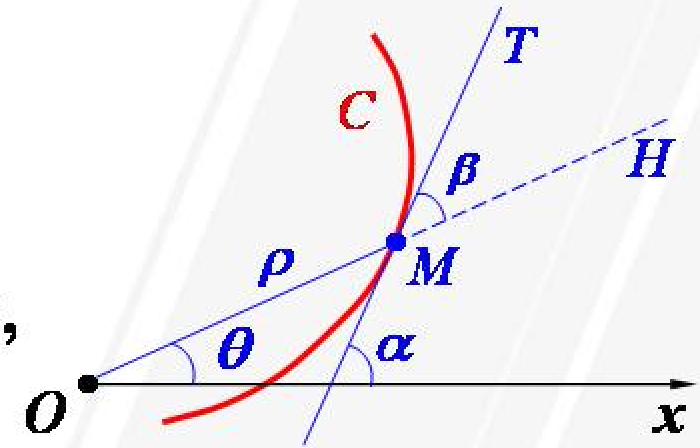
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'} = -\frac{b}{a}\cot t, \quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}.$$

故所求切线为:

$$y - \frac{\sqrt{2}b}{2} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{\sqrt{2}a}{2}\right).$$

例2 若曲线 C 由极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$ 给出，则可以把它转化成以极角 θ 为参数的参数方程

$$\begin{cases} x=\rho(\theta)\cos\theta, \\ y=\rho(\theta)\sin\theta. \end{cases}$$



如果 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}$ 存在，且 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\neq 0$，

则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(\rho(\theta)\sin\theta)'}{(\rho(\theta)\cos\theta)'}=\frac{\rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta}{\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{\rho'(\theta)\tan\theta+\rho(\theta)}{\rho'(\theta)-\rho(\theta)\tan\theta}. \qquad (3)$$

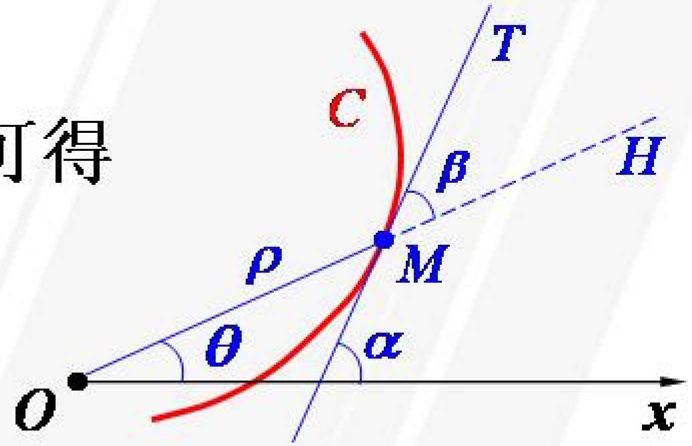
(3) 式表示的是曲线 $\rho=\rho(\theta)$ 在点 $M(\rho,\theta)$ 处的切线 MT 与极轴 Ox 的夹角 α 的正切 $\tan\alpha$.

过 M 的射线 OH (即点M的向径) 与切线 MT 的夹角 β 的正切是

$$\tan\beta=\tan(\alpha-\theta)=\frac{\tan\alpha-\tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta}. \qquad (4)$$

将 (3) 式代入 (4) 式, 化简后可得

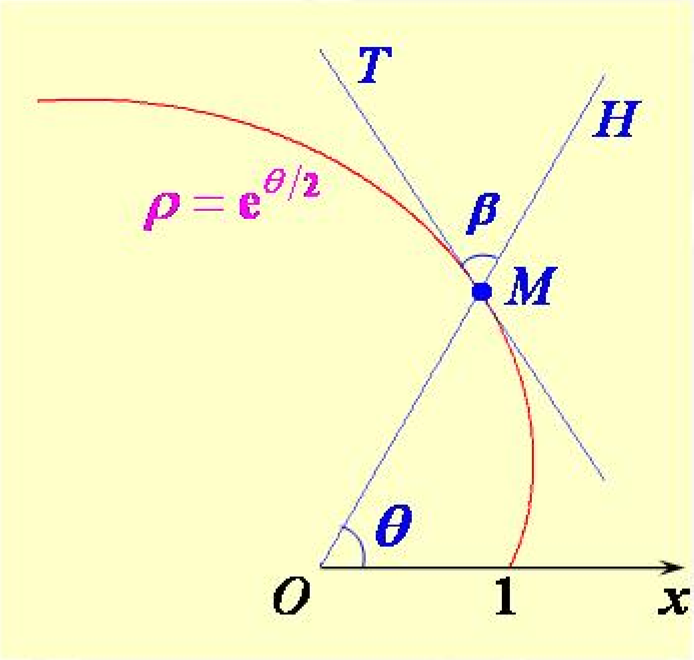
$$\tan\beta=\frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}. \qquad (5)$$



例3 证明对数螺线 $\rho = e^{\theta/2}$ 上所有点处的切线与向径的夹角 β 是常数.

证 因为对每一 θ 值,

$$\tan\beta = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = \frac{e^{\theta/2}}{\frac{1}{2}e^{\theta/2}} = 2,$$



所以这条曲线上任一点的切线与向径的夹角等于常数 $\arctan 2$.