数学分析　第五章
导数和微分

§2 求导法则

导数很有用，但全凭定义来计算导数是不方便的．为此要建立一些有效的求导法则，使导数运算变得较为简便．

一、导数的四则运算

二、反函数的导数

三、复合函数的导数

四、基本求导法则与公式

*点击以上标题可直接前往对应内容

导数的四则运算

定理5.5

若函数 $u(x), v(x)$ 在点 x_0 可导, 则函数 $f(x)=u(x)\pm v(x)$ 在点 x_0 也可导, 且

$$(u(x)\pm v(x))'\big|_{x=x_0}=u'(x_0)\pm v'(x_0). \qquad (1)$$

定理5.6

若函数 $u(x), v(x)$ 在点 x_0 可导, 则函数 $f(x)=u(x)v(x)$ 在点 x_0 也可导, 且

$$(u(x)v(x))'\big|_{x=x_0}=u'(x_0)v(x_0)+u(x_0)v'(x_0). \qquad (2)$$

推论

若 $u(x)$ 在点 x_0 可导, c 是常数，则

$$(cu(x))'\big|_{x=x_0} = cu'(x_0). \qquad (3)$$

定理 5.6 可推广到任意有限个函数相乘的情形，如

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

下面证明乘积公式 (2)，请读者自行证明公式 (1) .

证 (2) 按定义可得

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)v(x_0+\Delta x)-u(x_0)v(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u(x_0+\Delta x)v(x_0+\Delta x)-u(x_0)v(x_0+\Delta x)}{\Delta x}+\frac{u(x_0)v(x_0+\Delta x)-u(x_0)v(x_0)}{\Delta x}\right)$$

注意: $\boxed{(uv)'\neq u'v'}$ ，千万不要把导数乘积公式 (2) 记错了.

$$=u'(x_0)v(x_0)+u(x_0)v'(x_0).$$

例1 求 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的导数.

解 $f'(x)=(a_0x^n)'+(a_1x^{n-1})'+\cdots+(a_{n-1}x)'+(a_n)'$

$$=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}.$$

因此, 对于多项式 f 而言, f' 总是比 f 低一个幂次.

例2 求 $y=\sin x\ln x$ 在 $x=\pi$ 处的导数.

解 由公式 (2)，得

$$y'=(\sin x)'\ln x+\sin x(\ln x)'=\cos x\ln x+\frac{1}{x}\sin x$$

$$y'\big|_{x=\pi}=-\ln\pi.$$

定理5.7

若函数 $u(x), v(x)$ 在点 x_0 可导，$v(x_0) \neq 0$，

则 $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ 在点 x_0 也可导，且

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'\bigg|_{x=x_0} = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}. \qquad (4)$$

证 设 $g(x)=\dfrac{1}{v(x)}$，则 $f(x)=u(x)g(x)$. 对 $g(x)$，有

$$\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=\frac{\dfrac{1}{v(x_0+\Delta x)}-\dfrac{1}{v(x_0)}}{\Delta x}$$

$$=-\frac{v(x_0+\Delta x)-v(x_0)}{\Delta x}\cdot\frac{1}{v(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0)}.$$

由于 $v(x)$ 在点 x_0 可导，$v(x_0)\neq 0$，因此

$$g'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=-\frac{v'(x_0)}{v^2(x_0)},$$

亦即

$$\left(\frac{1}{v(x)}\right)'\bigg|_{x=x_0}=-\frac{v'(x_0)}{v^2(x_0)}. \qquad (5)$$

对 $f(x)=u(x)g(x)$ 应用公式 (2) 和 (5)，得

$$f'(x_0)=u'(x_0)\frac{1}{v(x_0)}+u(x_0)\left(\frac{1}{v(x)}\right)'\bigg|_{x=x_0},$$

$$=\frac{u'(x_0)}{v(x_0)}-u(x_0)\frac{v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$

$$=\frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$

即 $$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'\bigg|_{x=x_0}=\frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

例3 求下列函数的导数：

(i) x^{-n}, n 是正整数； (ii) $\tan x$, $\cot x$;

(iii) $\sec x$, $\csc x$.

解 (i) $$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

(ii) $$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

同理可得

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.$$

$$\text{(iii)}\ (\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \sec x \tan x.$$

同理可得

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x.$$

反函数的导数

定理5.8

设 $y=f(x)$ 为 $x=\varphi(y)$ 的反函数，φ 在点 y_0 的某邻域内连续，严格单调，且 $\varphi'(y_0)\neq 0$，则 f 在点 $x_0=\varphi(y_0)$ 可导，且

$$f'(x_0)=\frac{1}{\varphi'(y_0)}. \tag{6}$$

证 设 $\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=y-y_0$，则

$\Delta x=\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)$，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

由假设，$f=\varphi^{-1}$ 在点 x_0 的某邻域内连续，

且严格单调，从而有

$$\Delta x = 0 \Leftrightarrow \Delta y = 0;$$

注意到 $\varphi'(y_0) \neq 0$, 便可证得

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y_0)}.$$

例4 求下列函数的导数：

(i) $\arcsin x$ 和 $\arccos x$；

(ii) $\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$.

解 (i) $y = \arcsin x,\ \ x \in (-1, 1)$ 是 $x = \sin y$ 在 $(-\pi/2, \pi/2)$ 上的反函数，故

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1,1).$$

同理, $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1, 1)$.

(ii) $y=\arctan x$ 是 $x=\tan y$ 在 $(-\pi/2,\pi/2)$ 上的反函数，故

$$(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 x}=\frac{1}{1+\tan^2 y}$$

$$=\frac{1}{1+x^2},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

同理有

$$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

复合函数的导数

定理5.9

设 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 可导，$y=f(u)$ 在点 $u_0=\varphi(x_0)$ 可导，则复合函数 $f\circ\varphi$ 在点 x_0 可导，且

$$(f\circ\varphi)'(x_0)=f'(u_0)\varphi'(x_0)=f'\big(\varphi(x_0)\big)\varphi'(x_0).\quad(7)$$

这个定理一般用有限增量公式来证明，但为了与今后学习向量函数相联系，这里采用另一种新的证法，为此需要先证明一个引理.

引理 f 在点 x_0 可导的充要条件是：在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 上存在一个在 x_0 连续的函数 $H(x)$，使

$$f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0),\quad \text{且 } f'(x_0)=H(x_0).$$

证 设 $f(x)$ 在点 x_0 可导，且令

$$H(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x\in U^\circ(x_0),\\ f'(x_0), & x=x_0.\end{cases}$$

因 $\lim\limits_{x\to x_0}H(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=H(x_0)$，

故 $H(x)$ 在 x_0 连续，且

$$f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0),\ \ x\in U(x_0).$$

反之，设存在 $H(x)$ $(x\in U(x_0))$ 在点 x_0 连续，且

$$f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0),\ x\in U(x_0).$$

根据极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}H(x)=H(x_0),$$

得 $f(x)$ 在点 x_0 可导，且 $f'(x_0)=H(x_0)$.

下面证明定理 5.9 (公式 (7)) .

由引理的必要性及 $f(u)$ 在点 u_0 可导，知存在一个在点 u_0 连续的函数 $F(u)$，使 $f'(u_0)=F(u_0)$ 且

$$f(u)-f(u_0)=F(u)(u-u_0),\ x\in U(u_0).$$

同理，$u=\varphi(x)$ 在点 x_0 可导，则存在一个在点 x_0 连续的函数 $\Phi(x)$，使 $\varphi'(x_0)=\Phi(x_0)$，且

$$u-u_0=\varphi(x)-\varphi(x_0)=\Phi(x)(x-x_0),\ x\in U(x_0).$$

于是当 $x\in U(x_0)$，有

$$f(\varphi(x))-f(\varphi(x_0))=F(\varphi(x))\Phi(x)(x-x_0).$$

由于 φ, Φ 在点 x_0 连续，F 在点 $u_0=\varphi(x_0)$ 连续，

所以 $H(x)=F(\varphi(x))\Phi(x)$ 在点 x_0 连续．根据引理的充分性，$f\circ\varphi$ 在点 x_0 可导，且

$$(f\circ\varphi)'(x_0)=H(x_0)=F(\varphi(x_0))\Phi(x_0)=f'(u_0)\varphi'(x_0).$$

复合函数求导公式 (7) 又称为“链式法则”.

若将公式(7)改写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

其中 $y=f(u),u=\varphi(x)$，这样就容易理解“链”的意义了.

在链式法则中一定要区分 $f'(\varphi(x))=f'(u)|_{u=\varphi(x)}$ 与 $(f(\varphi(x)))'=f'(\varphi(x))\varphi'(x)$ 的不同含义.

例5 求函数 $y=\sin x^2$ 的导数 y'.

解 将 $y=\sin x^2$ 分解成$y=\sin u$ 与 $u=x^2$ 这两个基本初等函数的复合， 于是由链式法则, 有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(\sin u)'(x^2)'$$

$$=\cos u\cdot 2x=2x\cos x^2.$$

例6 求幂函数 $y = x^{\alpha}$(α是实数, $x > 0$) 的导数.

解 $y = x^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$ 由 $y = \mathrm{e}^{u}$ 与 $u = \alpha \ln x$ 复合而成,

故 $(x^{\alpha})' = (\mathrm{e}^{\alpha \ln x})'$

$$= \mathrm{e}^{u} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

例7 求下列函数的导数:

(i) $\sqrt{1+x^2}$;　　(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

解 运用复合求导法则, 分别计算如下:

$$\text{(i)}\ (\sqrt{1+x^2}\,)' = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}(1+x^2)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\text{(ii)}\ \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-3/2}(1+x^2)'$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

(iii) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

(iii) $\left[\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]'$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})'$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

例8 求下列函数的导数:

(i) $f(x)=\dfrac{2}{3}\arctan\left(\dfrac{1}{3}\tan\dfrac{x}{2}\right)$;

(ii) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{1/x}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解 (i) $f'(x)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{9}\tan^2\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{3}\sec^2\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}$

$$=\frac{1}{9\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}}=\frac{1}{5+4\cos x}.$$

(ii) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(ii) 当 $x\neq 0$ 时, $g'(x)=\dfrac{1+e^{1/x}+\dfrac{1}{x}e^{1/x}}{(1+e^{1/x})^2}$.

当 $x=0$ 时, 因为

$$g'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta x}{1+e^{1/\Delta x}}-0\right)=0,$$

$$g'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta x}{1+e^{1/\Delta x}}-0\right)=1,$$

所以 g 在 $x=0$ 处不可导.

对数求导法 设 $u(x)>0$, $u(x)$ 与 $v(x)$ 均可导，则

$$(u(x)^{v(x)})' = (\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)})' = \mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}(v(x)\ln u(x))'$$

$$= u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\,\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

对数求导法不仅对幂指函数 $u(x)^{v(x)}$ 有效, 也能简化某些连乘、连除式的求导.

例9 设 $y=\dfrac{(x^2+1)^3(x-2)^{1/4}}{(5x-9)^{2/5}}$，求 y'.

解 先对函数两边取对数，得

$$\ln y = 3\ln(x^2+1)+\frac{1}{4}\ln(x-2)-\frac{2}{5}\ln(5x-9).$$

再对上式两边求导，又得

$$\frac{y'}{y}=\frac{6x}{x^2+1}+\frac{1}{4(x-2)}-\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{5x-9}.$$

于是得到

$$y'=\frac{(x^2+1)^3(x-2)^{1/4}}{(5x-9)^{2/5}}\left[\frac{6x}{x^2+1}+\frac{1}{4(x-2)}-\frac{2}{5x-9}\right].$$

基本求导法则与公式

求导法则:

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

(2) $(uv)' = u'v + uv', (cu)' = cu'$($c$ 为常数);

(3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}, \left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$;

(4) 反函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$;

(5) 复合函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$.

基本初等函数的导数公式:

(1) $(c)'=0$ (c为常数);

(2) $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$ (α为任意实数);

(3) $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$;

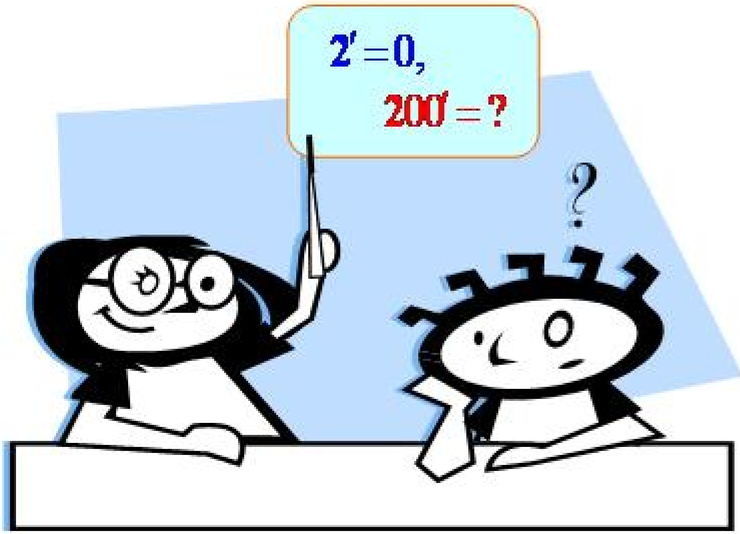
(4) $(\tan x)'=\sec^2 x$, $(\cot x)'=-\csc^2 x$;

$(\sec x)'=\sec x\tan x$, $(\csc x)'=-\csc x\cot x$;

(5) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a,\ (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$;

(6) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a},\ (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

(7) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,



$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$