数学分析 第五章
导数和微分

§1 导数的概念

"导数是微分学的核心概念，是研究函数与自变量关系的产物，又是深刻研究函数性态的有力工具。无论何种学科，只要涉及"变化率"，就离不开导数。

*点击以上标题可直接前往对应内容

导数的概念

一般认为，求变速运动的瞬时速度，求已知曲线上一点处的切线，求函数的最大、最小值，这是微分学产生的三个源头．牛顿和莱布尼茨就是分别在研究瞬时速度和曲线的切线时发现导数的．下面是两个关于导数的经典例子.

牛顿（1642—1727, 英国）

1. 瞬时速度 设一质点作直线运动，质点的位置 s 是时间 t 的函数，即其运动规律是 $s = s(t)$，则在某时刻 t_0 及邻近时刻 t 之间的平均速度是

$$\bar{v} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

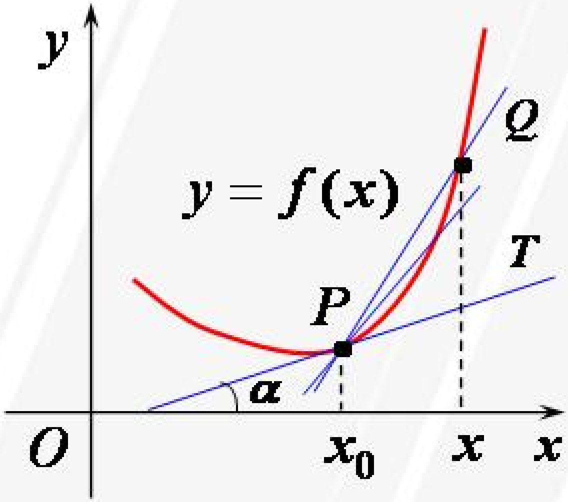
当 t 越来越接近 t_0 时，平均速度就越来越接近 t_0 时刻的瞬时速度. 严格地说，当极限

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = v \qquad (1)$$

存在时，这个极限就是质点在 t_0 时刻的瞬时速度.

2. 切线的斜率 如图所示，需要寻找曲线 $y=f(x)$ 在其上一点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线 PT.

为此我们在 P 的邻近取一点 Q，作曲线的割线 PQ，这条割线的斜率为



$$\bar{k}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

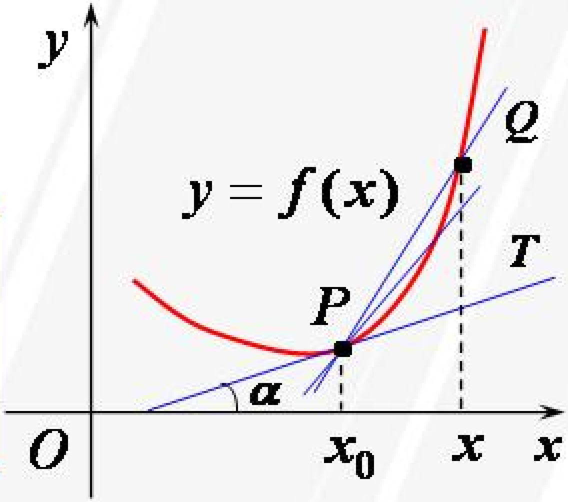
设想一下，当动点 Q 沿此曲线无限接近点 P 时，

$\bar{k}$ 的极限若存在，则这个极限

$$k=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{2}$$

会是什么呢？

$$\bar{k}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$



答：它就是曲线在点 P 的切线 PT 的斜率.

上面两个问题虽然出发点相异，但都可归结为同一类型的数学问题：求函数 f 在点x_0处的增量 $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ 与自变量增量 $\Delta x = x - x_0$ 之比的极限. 这个增量比称为函数f 关于自变量的平均变化率，增量比的极限 (如果存在) 称为f 在点 x_0 处关于 x 的瞬时变化率(或简称变化率).

定义1

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，

如果极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{3}$$

存在，则称函数 f 在点 x_0 可导，该极限称为 f 在 x_0 的导数，记作 $f'(x_0)$.

如果令 $\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，导数就可以写成

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{4}$$

这说明导数是函数增量 Δy 与自变量增量 Δx 之比的极限，即 $f'(x_0)$ 就是 $f(x)$ 关于 x 在 x_0 处的变化率. 如果 (3) 或 (4) 式的极限不存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 不可导.

例1 求函数 $y=x^3$ 在 $x=1$ 处的导数，并求该曲线在点 $P(1,1)$ 的切线方程.

解 因为 $\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)^3-1$

$$=3\Delta x+3\Delta x^2+\Delta x^3,$$

所以

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3+3\Delta x+\Delta x^2)=3.$$

由此可知曲线 $y=x^3$ 在点 $P(1,1)$ 的切线斜率为

$$k=f'(1)=3,$$

于是所求切线方程为 $y-1=3(x-1)$,

即 $$y=3x-2.$$

例2 常量函数 $f(x)=c$ 在任何一点 x 的导数都为零. 这是因为 $\Delta y\equiv 0$, 所以 $f'(x)\equiv 0$.

例3 证明函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

证 因为

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

当 $x\to 0$ 时它的极限不存在, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

例4 证明函数

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处不可导.

证 因为当 $x\to 0$ 时,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\sin\frac{1}{x}$$

不存在极限，所以 f 在 $x=0$ 处不可导.

有限增量公式 设 $f(x)$ 在点 x_0 可导，则

$$\varepsilon = f'(x_0) - \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

是当 $\Delta x \to 0$ 时的无穷小量， 于是 $\varepsilon \Delta x = o(\Delta x)$.

这样，函数 $f(x)$ 的增量可以写成

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x). \qquad (5)$$

(5) 式称为 $f(x)$ 在点 x_0 的有限增量公式，这个公式对 $\Delta x = 0$ 仍然成立.

根据有限增量公式即可得到下面定理.

定理5.1

如果函数 f 在点 x_0 可导，则 f 在点 x_0 连续.

值得注意的是函数在某点连续仅是函数在该点可导的必要条件. 如例3、例4 中的函数均在 $x=0$ 处连续，却不可导.

例5 证明函数 $f(x)=x^2D(x)$ 仅在 $x=0$ 处可导，其中 $D(x)$ 是熟知的狄利克雷函数.

证 当 $x_0\neq 0$ 时，用归结原理容易证明 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，由定理 5.1，$f(x)$ 在点 x_0 不可导.

当 $x_0=0$ 时，因为 $|D(x)|\leq 1$，所以有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}xD(x)=0.$$

由于导数是一种极限，因此如同左、右极限那样，可以定义左、右导数（单侧导数）.

定义2

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个右邻域 $[x_0, x_0+\delta)$ 上有定义，如果右极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称该极限为 $f(x)$ 在点 x_0 的右导数，记作 $f'_+(x_0)$. 类似地可以定义左导数，合起来即为：

$$\begin{cases} f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}, \\ f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \end{cases} \tag{6}$$

右导数和左导数统称为单侧导数.

类比左、右极限与极限的关系，我们有：

定理5.2

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，则 $f'(x_0)$ 存在的充要条件是 $f'_+(x_0)$、$f'_-(x_0)$ 都存在，且

$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0).$$

在讨论分段函数在分段点上的可导性时，本结论很有用处，请看下面例题.

例6 设 $f(x)=\begin{cases} 1-\cos x, & x\ge 0, \\ x, & x<0. \end{cases}$

试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右导数和导数.

解 容易看到 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 又因

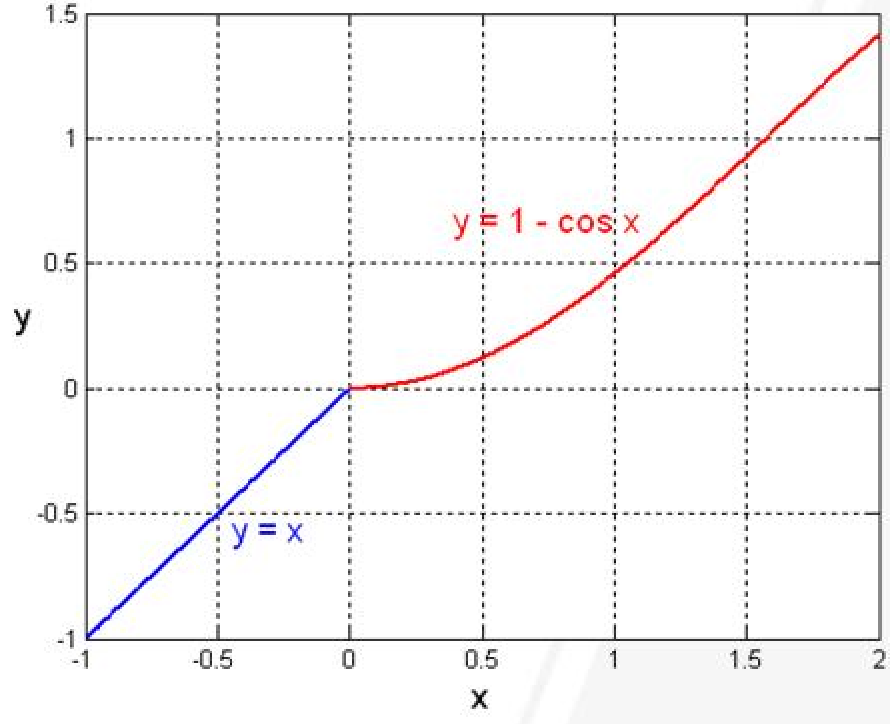
$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\begin{cases} \dfrac{1-\cos\Delta x}{\Delta x}, & \Delta x>0, \\ 1, & \Delta x<0, \end{cases}$$

所以

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1-\cos\Delta x}{\Delta x}=0,$$

$$f'_{-}(0)=\lim_{\Delta x\to 0^{-}}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^{-}}1=1.$$

由于 $f'_{+}(0)\neq f'_{-}(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.



导函数

如果函数 f 在区间 I 上的每一点都可导 (对于区间端点考虑相应的单侧导数, 如左端点考虑右导数), 则称 f 为区间 I 上的可导函数. 此时, 对 I 上的任意一点 x 都有 f 的一个导数 $f'(x_0)$ 与之对应, 这就定义了一个在区间 I 上的函数, 称为 f 在 I 上的导函数, 简称导数, 记作 $f'(x)$, y' 或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\ x\in I. \qquad (7)$$

注 这里 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 仅为一个记号, 学了微分之后就会知

道，这个记号实质是一个“微分的商”.

相应地，$f'(x_0)$ 也可表示为

$$\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0},\quad \left.y'\right|_{x=x_0},\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}.$$

例7 求函数 $y=x^n$ 的导数，n为正整数.

解 由于 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$

$$=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x+\cdots+\Delta x^{n-1},$$

因此

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\left(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x+\cdots+\Delta x^{n-1}\right)=nx^{n-1}.$$

例8 证明:

(i) $(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x;$

(ii) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x}\log_a \mathrm{e}\ \ (a > 0,\ a \neq 0,\ x > 0)$,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$

(iii) $(a^x)' = a^x \ln a.$

我们只证明 (i) 的第二式和 (ii)第二式 .

证 (i) 由于

$$\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=-\frac{2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$=-\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

而 $\sin x$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，所以

$$(\cos x)'=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=-\sin x.$$

(ii) 由于

$$\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

$$=\ln\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\ln\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]$$

$$\xrightarrow{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\ln \mathrm{e}=\frac{1}{x}.$$

因此

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

导数的几何意义

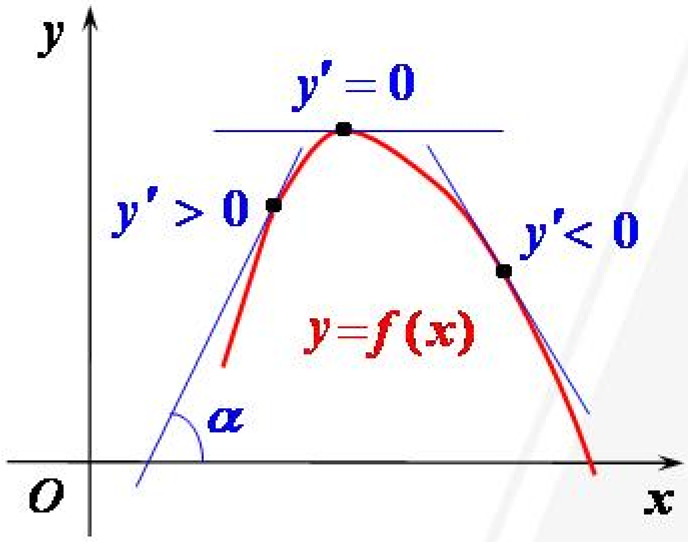
在用几何问题引出导数概念时, 已知 $f'(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率. 所以该切线的方程是

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{8}$$

记 α 为切线与 x 轴正向的夹角，则

$$f'(x_0) = \tan\alpha .$$

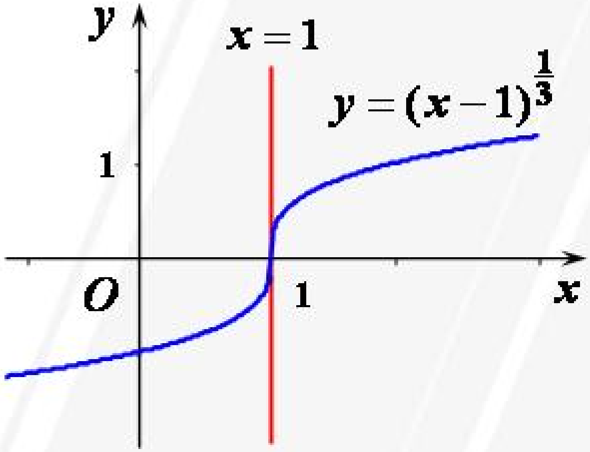
由此可知, $f'(x_0)>0$ 说明 α 是锐角; $f'(x_0)<0$ 说明 α 是钝角; $f'(x_0)=0$ 说明 $\alpha=0$ (切线与 x 轴平行).



特别要注意，如果 f 在点 x_0 连续，且

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\infty,$$

则曲线 $y=f(x)$ 在点 P 的切线垂直于 x 轴，此时 $y=f(x)$ 在点 P 的切线方程为 $x=x_0$. 如右图所示，曲线 $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}$ 在点 $(1,0)$ 处符合上述特征，故在该点处的切线为 $x=1$.



例9 求曲线 $y=\ln x$ 在其上任一点 $P(x_0,\ln x_0)$ 处的切线和法线方程.

解 由例8的(ii)知道

$$y'\big|_{x=x_0}=(\ln x)'\big|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0},$$

因此 $y=\ln x$ 在点 P 的切线方程和法线方程分别为

$$y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0),$$

$$y-\ln x_0=-x_0(x-x_0).$$

例10 求曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 在点 $P(0, 0)$ 处的切线和法线方程.

解 由于 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处连续, 且

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}=+\infty,$$

所以 $y=\sqrt[3]{x}$ 在点 $P(0,0)$ 处的切线、法线方程分别为 $x=0$ 和 $y=0$.

与瞬时变化率有关的物理问题还有很多，例如瞬时电流强度 $i(t)$ 是通过导线截面电量 $q(t)$ 的变化率，即

$$i(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(t+\Delta t)-q(t)}{\Delta t}=q'(t).$$

质量分布不均匀的金属丝，以 $m(x)$ 表示从 0 到 x 的质量，则它在 x 处的线密度 $\rho(x)$ 是 $m(x)$ 在 x 处的变化率，即

$$\rho(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x+\Delta x)-m(x)}{\Delta x}=m'(x).$$

除了上面介绍的几何和物理问题外，导数在其他领域(如经济、化学、生物等)也有广泛的应用.

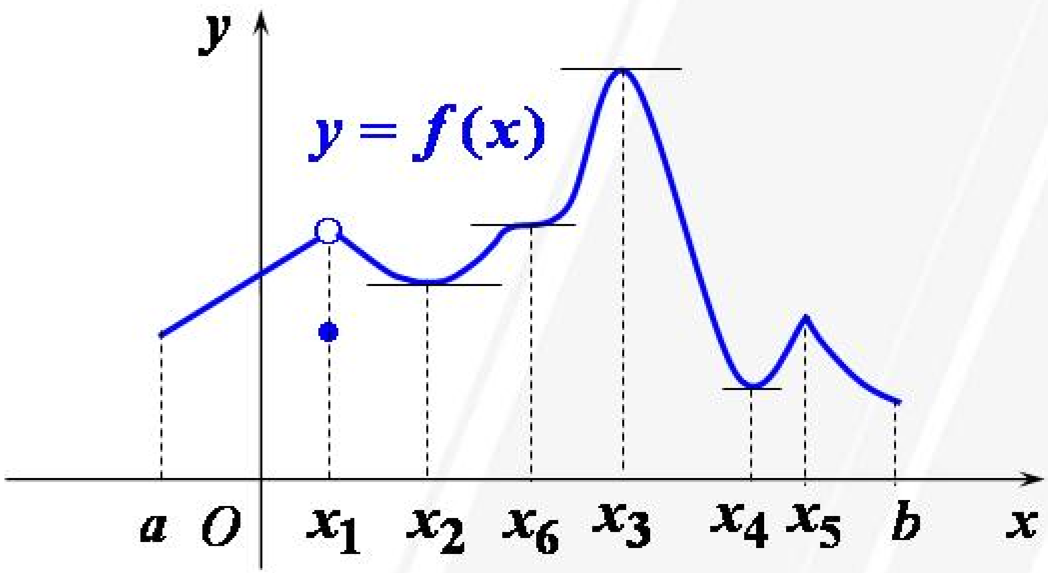
定义3

如果函数 f 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 上对一切 $x \in U(x_0)$ 有

$$f(x) \le f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) \ge f(x_0)),$$

则称函数 f 在 x_0 处取得极大(或极小)值，称点 x_0 为极大(或极小）值点. 极大值、极小值统称为极值，极大值点、极小值点统称为极值点.

如图，函数 $y=f(x)$ 在 x_1, x_2, x_4 处取极小值，在 x_3, x_5 处取极大值. 由于极值是一个局部性概念，因此如果出现某一极大值反而小于另一极小值的现象，那是不足为奇的. 此外，在 x_6 处虽然也有水平切线，但它不是极值点.



例11 证明：若 $f'_+(x_0)>0$，则存在 $\delta>0$，使对任何 $x\in(x_0,x_0+\delta)$，有

$$f(x)>f(x_0). \tag{9}$$

证 由右导数的定义:

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,$$

与极限保号性，推知存在 $\delta>0$，使得

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,\ \forall x\in(x_0,\ x_0+\delta).$$

再由 $x>x_0$，得 $f(x)-f(x_0)>0$，于是 (9) 式成立.

类似地，若 $f'_-(x_0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得

$$f(x)<f(x_0),\ \forall x\in(x_0-\delta,\ x_0).$$

根据例11，可得如下重要定理：

定理5.3(费马定理)

设函数 f 在点 x_0 的某邻域内有定义，且在点 x_0 可导. 如果 x_0 是 f 的极值点，则必有

$$f'(x_0)=0.$$

上述定理的几何意义：如果 f 在极值 $x=x_0$ 处可导，则该点处的切线平行于 x 轴.

称满足方程 $f'(x)=0$ 的点为 f 的稳定点.

注 稳定点不一定都是极值点, 如 $x=0$ 是 $y=x^3$ 的稳定点, 但不是极值点. 反之,极值点也不一定都是稳定点, 如 $x=0$ 是 $y=|x|$ 的极小值点，但不是稳定点（因为它在 $x=0$ 处不可导).

费马 (Fermat, P. 1601-1665, 法国)

复习思考题

1. 给出函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导的“$\varepsilon-\delta$”定义.

2. 给出函数 $f(x)$ 在点 x_0 不可导的“$\varepsilon-\delta$”定义.

3. 举出一个函数 $y=f(x)$, 它满足

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\infty,$$

但 $x=x_0$ 不是它的垂直切线.

4. 举出一个函数 $f(x)$, 要求它可导, 但 $f'(x)$不连续. 试问这种不连续的导函数是否仍有介值性?