数学分析 第四章
函数的连续性

§3 初等函数的连续性

在学习了连续函数的定义及其一系列基本性质后，现在可以证明一个重要结论：初等函数在其有定义的区间上总是连续的.

一、指数函数的连续性

二、初等函数的连续性

*点击以上标题可直接前往对应内容

指数函数的连续性

在第一章中, 我们已经定义了指数函数

$$y = a^x,\ \ x \in \mathbf{R}, a > 0, a \neq 1,$$

并指出它在 **R** 内是严格单调的. 所以, 若能证明指数函数是连续函数, 那么它的反函数对数函数在其定义域内也是连续函数.

首先证明指数函数的一个重要性质.

定理4.10

设 $a>0, a\neq 1, \alpha$、β 为任意实数，则有

$$a^{\alpha}a^{\beta}=a^{\alpha+\beta},\quad (a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}.$$

证 当 α,β 是有理数时，这是我们熟知的结果.

先设 $a>1$，由定义，

$$a^{x}=\sup_{r<x}\{a^{r}\,|\,r\text{ 为有理数}\}.$$

对于任意 $\varepsilon>0\,(\varepsilon<a^{\alpha},\varepsilon<a^{\beta})$，存在有理数 $r_1<\alpha$，$r_2<\beta$，使 $a^{r_1}>a^{\alpha}-\varepsilon$，$a^{r_2}>a^{\beta}-\varepsilon$，

于是有

$$(a^{\alpha}-\varepsilon)(a^{\beta}-\varepsilon)<a^{r_1}\cdot a^{r_2}=a^{r_1+r_2}\leq a^{\alpha+\beta}.$$

因为 ε 是任意的, 所以

$$a^{\alpha}\cdot a^{\beta}\le a^{\alpha+\beta}.$$

反之, 存在有理数 $r_0(r_0<\alpha+\beta)$, 使

$$a^{r_0}>a^{\alpha+\beta}-\varepsilon.$$

再取有理数 $r_1<\alpha,\ r_2<\beta$, 使 $r_0<r_1+r_2$, 则

$$a^{\alpha}\cdot a^{\beta}>a^{r_1}\cdot a^{r_2}=a^{r_1+r_2}>a^{r_0}>a^{\alpha+\beta}-\varepsilon,$$

仍因 ε 是任意的, 又得

$$a^{\alpha}\cdot a^{\beta}\ge a^{\alpha+\beta}.$$

这就证明了

$$a^{\alpha}\cdot a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}.$$

对于$0<a<1$的情形，只要令 $b=\dfrac{1}{a}$，

就有

$$a^{\alpha}\cdot a^{\beta}=b^{(-\alpha)}\cdot b^{(-\beta)}=b^{-(\alpha+\beta)}=a^{\alpha+\beta}.$$

第二个等式的证明留作习题.

定理4.11

指数函数 $y = a^x\ (a > 0, a \neq 1)$ 在 R上是连续的.

证 我们仍旧先假设 $a > 1$. 首先证明指数函数在 $x = 0$ 处连续, 即 $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1 = f(0)$.

这是因为对于任意的正数 $\varepsilon\ (0 < \varepsilon < 1)$, 取

$$\delta = \min\{\log_a(1+\varepsilon), |\log_a(1-\varepsilon)|\},$$

当 $|x| < \delta$ 时, 就有 $|a^x - 1| < \varepsilon$.

所以 a^x 在 $x = 0$ 处连续.

对于一般的点 $x_0 \in \mathbf{R}$，由定理4.10得到

$$\lim_{x \to x_0} a^x = \lim_{x \to x_0} a^{x_0} \cdot a^{x - x_0} = a^{x_0} \lim_{\Delta x \to 0} a^{\Delta x} = a^{x_0},$$

所以 $f(x) = a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

对于 $0 < a < 1$ 情形，只要设 $b = \dfrac{1}{a}$，由

$$a^x = \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{b^x},$$

就可得到相应的结论.

注 当 $a = 1$ 时，$y = a^x = 1$ 显然是连续函数 .

推论1

对数函数 $y = \log_a x\,(a > 0, a \neq 1)$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上是连续的.

推论2

幂函数 $y = x^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$ 在定义域 $(0, +\infty)$上也是连续的.

例1 设 $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = a > 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = b$. 证明

$$\lim_{x \to x_0} u(x)^{v(x)} = a^b.$$

证 设 $u(x_0) = a$, $v(x_0) = b$, 则 $u(x), v(x)$ 在点 x_0 连续, 从而 $v(x)\ln u(x)$ 在点 x_0 也连续, 于是证得

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\ln u(x)}$$

$$= \mathrm{e}^{b\ln a} = a^b.$$

注 例1的结论可改写为

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = a^b = \left[\lim_{x\to x_0} u(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)}.$$

$$= (1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}, \qquad v(x) = \frac{\cos x-1}{x^2}.$$

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 因为 $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \underbrace{(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}}_{u(x)} {}^{\cdot \underbrace{\frac{\cos x-1}{x^2}}_{v(x)}}$,

当 $0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\cos x-1\neq 0$，故

$$\lim_{x\to 0} u(x) = \lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}} = \mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2},$$

由此求得

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-a}{x^2}}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

初等函数的连续性

我们已经知道以下函数在定义域内是连续的

(i) 常值函数;

(ii) 三角函数;

(iii) 反三角函数;

(iv) 幂函数;

(v) 指数函数;

(vi) 对数函数.

以上六种函数称为基本初等函数. 因为连续函数的四则运算与复合运算是保连续的，所以由上面的基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合之后产生的新函数在其定义区间（如果存在）上是连续的.

定义3

由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所产生的函数称为初等函数.

由上面的分析，我们得到如下结论：

定理4.12

初等函数在其有定义的区间上是连续的.

注 上述结论中所指的“定义区间”, 今后(第十六章)在一般意义下可以改为“定义域”.

例3 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\cos x}$.

解 因为 $\dfrac{\ln(1+x)}{\cos x}$ 是初等函数, 所以在 $x=0$ 处连续, 从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\cos x}=\frac{\ln(1+0)}{\cos 0}=0.$$

例4 据理说明

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

不是初等函数.

解 因为 $x=0$ 是 $f(x)$ 的定义区间上的点, 而

$$\lim_{x\to 0}f(x)=1\neq 0=f(0),$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续. 因此函数 $f(x)$ 不是初等函数.