数学分析 第四章
函数的连续性

§2 连续函数的性质

在本节中,我们将介绍连续函数的局部性质与整体性质.熟练地掌握和运用这些性质是具有分析修养的重要标志.

*点击以上标题可直接前往对应内容

连续函数的局部性质

所谓连续函数局部性质就是指：若函数 f 在点 x_0 连续(左连续或右连续)，则可推知 f 在点 x_0 的某个局部邻域(左邻域或右邻域)内具有有界性、保号性、四则运算的保连续性等性质.

定理4.2（局部有界性）

若函数 f 在点 x_0 连续，则 f 在某邻域 $U(x_0)$ 上有界.

证　因为 f 在 x_0 连续，所以对 $\varepsilon = 1$，存在 $\delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x) - f(x_0)| < 1$，故

$$|f(x)| \le |f(x_0)| + 1.$$

注意：我们在证明有界性时，取 $\varepsilon = 1$ 这个特定的值，而不是用术语“对于任意的 $\varepsilon > 0$ ”，这样可求得 $|f(x)|$ 一个明确的上界.

定理4.3（局部保号性）

若函数 f 在点 x_0 连续，且

$$f(x_0)>0\ (\text{或}\ f(x_0)<0),$$

则对任意一个满足

$$0<r<f(x_0)\text{或}(f(x_0)<-r<0)\ \text{的正数}r,$$

存在 $\delta>0$，当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时，

$$f(x)>r\qquad(\text{或}\ f(x)<-r<0),$$

证 因为 f 在 x_0 连续，所以对正数 $\varepsilon_0=f(x_0)-r$，存在 $\delta>0$，当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon_0=f(x_0)-r,$$

于是证得 $f(x)>r>0$.

注 在具体应用保号性时，我们经常取 $r = \dfrac{f(x_0)}{2}$.

定理4.4（连续函数的四则运算）

若函数 $f(x)$, $g(x)$ 均在点 x_0 连续，则函数

(1) $f(x)+g(x)$, (2) $f(x)-g(x)$,

(3) $f(x)\cdot g(x)$, (4) $f(x)/g(x)$, $g(x_0)\neq 0$

在点 x_0 也是连续的.

定理的证明可以直接从函数极限的四则运算得到，具体过程请读者自行给出.

我们知道, 常函数 $y=c$ 与线性函数 $y=x$ 都是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数, 故由四则运算性质, 易知多项式函数

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

也是连续函数.

下面这个定理刻画了连续这个性质在复合运算下是不变的.

定理4.5

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续, $g(u)$ 在点 u_0 连续, $u_0=f(x_0)$. 则复合函数 $g(f(x))$ 在点 x_0 连续.

证 由于 $g(u)$ 在点 u_0 连续，因此对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_1 > 0$，当 $|u - u_0| < \delta_1$ 时，有

$$|g(u) - g(u_0)| < \varepsilon,$$

又因为 $f(x)$ 在点 x_0 连续，故对上述 $\delta_1 > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - f(x_0)| = |u - u_0| < \delta_1,$$

于是

$$|g(f(x)) - g(f(x_0))| = |g(u) - g(u_0)| < \varepsilon,$$

这就证明了 $g(f(x))$ 在点 x_0 连续.

对这个定理我们再作一些讨论, 以加深大家对该定理的认识.

(1) 由 $\lim\limits_{u\to u_0} g(u)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=u_0$, 不一定有

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x))=A.$$

请大家仔细观察定理4.5 的证明, 看看此时究竟哪里通不过.

(2) 若 $g(u)$ 在 u_0 连续，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=u_0$，则有

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(u_0) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)). \qquad (*)$$

事实上，只要补充定义(或者重新定义) $f(x_0)=u_0$ 使得 $f(x)$ 在点 x_0 连续．应用定理4.5，就得到所需要的结论．若将 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=u_0$ 改为

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=u_0$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=u_0$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=u_0$，

(*) 式相应的结论仍旧是成立的．

上述(1)和(2)究竟有什么本质的区别呢？请读者作出进一步的讨论．

例1 求 $\lim\limits_{x\to 1}\sin(1-x^2)$.

解 $\sin(1-x^2)$可视为 $g(u)=\sin u,\ u=(1-x^2)$的复合，所以

$$\lim_{x\to 1}\sin(1-x^2) = \sin\left(\lim_{x\to 1}(1-x^2)\right) = 0.$$

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2-\dfrac{\sin x}{x}}$.

解 因为 $g(u)=\sqrt{u}$ 在 $u=1$ 连续， 所以

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{2-\frac{\sin x}{x}}=\sqrt{\lim_{x\to 1}(2-\frac{\sin x}{x})}=\sqrt{2-1}=1.$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin(1+\dfrac{1}{x})^x$

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$, $\sin u$ 在点 $u=\mathrm{e}$ 连续，所以

$$\lim_{x\to\infty}\sin(1+\frac{1}{x})^x=\sin\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\sin\mathrm{e}$$

闭区间上连续函数的性质

设 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续. 在本节中将研究 f 在 $[a,b]$ 上的整体性质.

定义1

设 $f(x)$为定义在数集 D上的一个函数. 若存在 $x_0 \in D$,使得对一切 $x \in D$, 均有

$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0)),$$

则称 $f(x)$在D上有最大(小)值, x_0 称为最大(小)值点, $f(x_0)$ 称为$f(x)$在D上的最大(小)值.

例如, 符号函数 $y=\operatorname{sgn} x$ 的最大值为1, 最小值为−1; 正弦函数 $y=\sin x$ 的最大值为1, 最小值为−1; 函数 $y=x-[x]$ 的最大值不存在, 最小值为零. 注意: $y=\sin x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上既无最大值, 又无最小值. (其上确界为1, 下确界为−1)

定理4.6（最大、最小值定理）

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大、最小值.

这个定理刻画了闭区间上连续函数的一个深刻的内涵, 在今后的学习中有很广泛的应用.

为了更好地证明定理，我们先证明一个引理.

引理（有界性定理）

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，那么 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

证 若不然, 不妨设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界. 则存在 $x_n \in [a,b]$，使得

$$f(x_n) > n, n = 1,2,\ldots$$

由此得到 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$. 因为 $\{x_n\}(\subset [a,b])$ 是有界数列，所以由致密性定理, $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$.

$$设 \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0,$$

由于 $a \le x_{n_k} \le b$，由极限的不等式推得

$$a \le x_0 \le b,$$

故 $f(x)$ 在 x_0 上连续.

由归结原则推得

$$+\infty = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$$

矛盾.

定理4.6的证明 由引理和确界原理，存在上确界

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x)=M.$$

下面说明：存在$\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=M$. 若不然，对一切$x\in[a,b]$都有$f(x)<M$. 令

$$g(x)=\frac{1}{M-f(x)},\quad x\in[a,b].$$

易见函数$g(x)$在$[a,b]$上连续，且取正值. 由引理$g(x)$有上界J，即有

$$0<g(x)=\frac{1}{M-f(x)}\le J,x\in[a,b].$$

从而推得 $f(x) \le M - \dfrac{1}{J}, x \in [a,b]$.

但这与 M 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的上确界矛盾. 所以存在

$\xi \in [a,b]$, 使 $f(\xi) = M$. 即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取最大值.

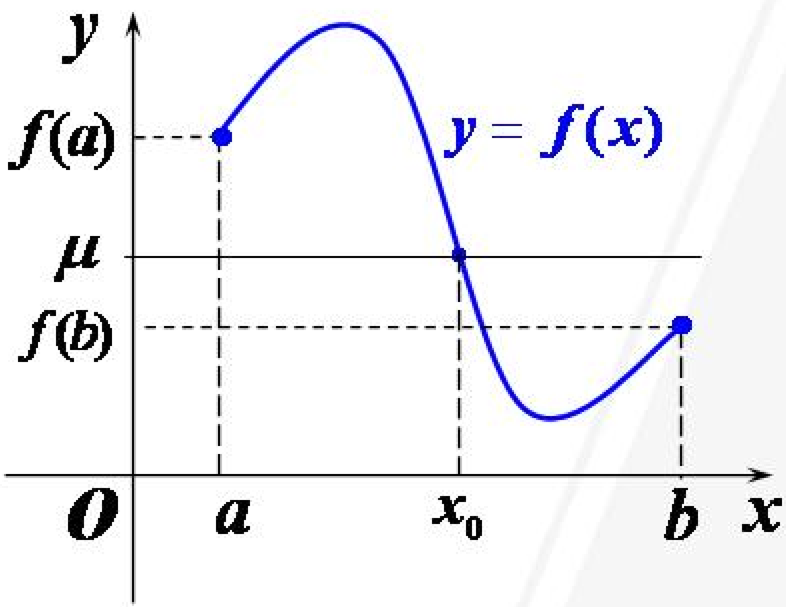
同理，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取最小值.

定理4.7 （介值性定理）

设函数 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a) \neq f(b)$. 若μ是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一数($f(a) < \mu < f(b)$ 或 $f(b) < \mu < f(a)$), 则(至少)存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得

$$f(x_0) = \mu.$$

从几何上看, 当连续曲线 $y = f(x)$ 从水平直线 $y = \mu$ 的一侧穿到另一侧时, 两者至少有一个交点.



推论（根的存在性定理）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 x_0，使 $f(x_0)=0$

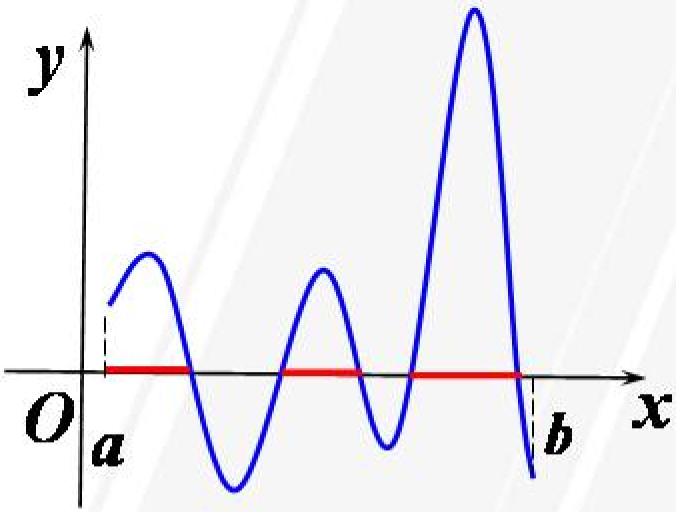
应当注意，此推论与定理4.7是等价的. 于是，只要证明了推论，也就完成了定理4.7 证明.

下面用确界定理来证明上述推论，大家要注意学习确界定理的使用方法.

证 不妨设 $f(a)>0, f(b)<0$, 并设

$$E=\{x \mid x\in[a,b], f(x)\ge 0\}.$$

(E为图中x轴上的红线部分) 从几何上看, E的最大值就是函数的零点. 证明如下:



因为 $a\in E$, 所以 $E\ne\varnothing$, 又 E 是有界的, 故由确界定理, $x_0=\sup E$ 存在, 显然 $a\le x_0\le b$.

我们来否定下面两种情形:

1. 若 $f(x_0)>0$, 则有 $a\le x_0<b$. 由 $f(x)$在点 x_0是连续的, 根据保号性, 存在$\delta>0\,(x_0+\delta<b)$, 使当 $x\in[\,x_0\,,\,x_0+\delta\,)$时, 仍有

$$f(x)>0.$$

特别是$f(x_0+\frac{\delta}{2})>0$, 而$x_0+\frac{\delta}{2}\in E$, 这就与 $x_0=\sup E$ 相矛盾.

2. 若 $f(x_0)<0$, 则有 $a<x_0\le b$. 同样根据保号性,

$\exists\,\delta>0\,(x_0-\delta>a)$, 当 $x\in(x_0-\delta\,,x_0]$ 时, $f(x)<0$.

同时由 $x_0=\sup E$, 对上述 δ, 存在 x_1, 使得

$$x_0-\delta<x_1\le x_0,\ x_1\in E.$$

从而 $f(x_1)\ge 0$, 也导致矛盾.

排除了上面两种情形后, 就推得 $f(x_0)=0$.

由介值性定理与最大、最小值定理立刻得到如下结论:

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 那么它的最大值 M 与最小值 m 存在, 并且

$$f([a,b])=[m,M].$$

下面再举一些应用介值性定理的例题.

例3 若 $r>0$, n 为正整数，则存在唯一的正数 x_0，使得 $x_0^n=r$.

证 先证存在性：

因为 n 为正整数，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^n=+\infty$. 由极限的保号性知，存在 x_1，使 $x_1^n>r$. 又因为函数 $f(x)=x^n$ 在 $[0,x_1]$ 上连续，且 $f(0)<r<f(x_1)$，所以存在 $x_0\in(0,x_1)$，使得 $x_0^n=r$. 这个 x_0 我们记为 $x_0=\sqrt[n]{r}$（读作 r 的 n 次算术根）.

再证唯一性:

我们只需证明 $f(x)=x^n$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格递增即可. 事实上, $\forall x, y$, 使 $0\le x<y$, 有

$$y^n - x^n = (y-x)(y^{n-1}+y^{n-2}x+\cdots\cdots+yx^{n-2}+x^{n-1})$$

$$>0,$$

即 $f(x)<f(y)$.

例4 设 f 在$[a,b]$上连续，$f([a,b])\subset[a,b]$. 证明：存在 $x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)=x_0$.

证 由条件知$a\le f(a),\ f(b)\le b$.

若$a=f(a)$或$b=f(b)$，则结论成立.

现设 $a<f(a),\ f(b)<b$. 作辅助函数

$$F(x)=f(x)-x,$$

则 $F(a)\cdot F(b)=(f(a)-a)\cdot(f(b)-b)<0.$

因$f(x)$在 $[a,b]$ 上连续，故$F(x)$在$[a,b]$上也连续.

由介值性定理，存在$x_0\in(a,b)$，使 $F(x_0)=0$，即

$$f(x_0)=x_0.$$

例5 设 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内满足介值性,并且对于任意的实数 r, $f(x)=r$ 至多有有限个解. 证明: $f(x)$ 在 (a, b) 内连续.

证 只要证 $\forall x_0 \in (a,b)$, $f(x)$ 在点 x_0 连续. 对任意 $\varepsilon > 0$, 由条件, 方程

$$f(x) = f(x_0) + \varepsilon \quad 与 \quad f(x) = f(x_0) - \varepsilon$$

的解至多为有限个.

1. 设这有限个解为 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 记

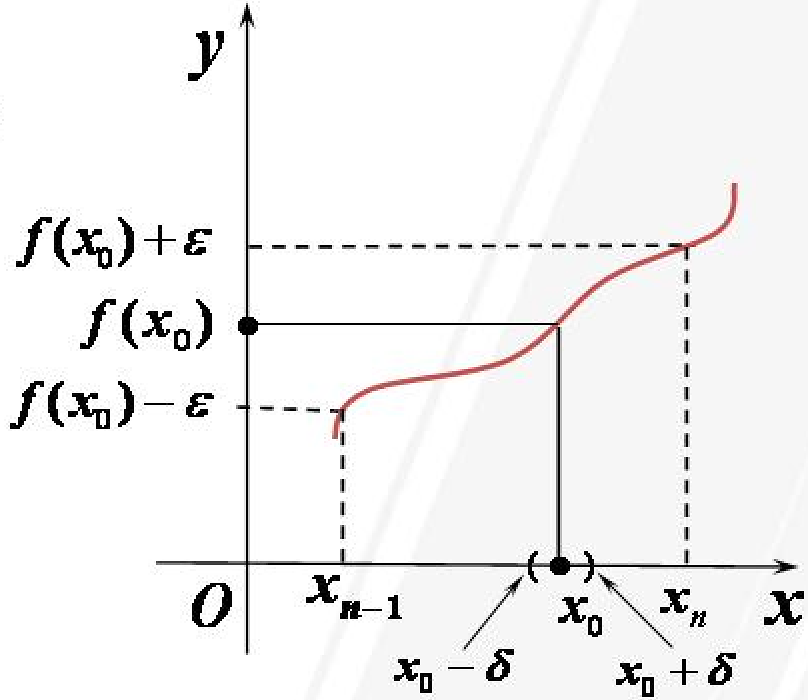
$$\delta = \min\{\, |x_1 - x_0|, |x_2 - x_0|, \cdots, |x_n - x_0| \,\},$$

显然 $\delta > 0$.

由介值性条件不难证明:

当 $|x-x_0|<\delta$ 时,

$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$



2. 如果解为空集, 任意取 $\delta>0$, $U(x_0;\delta)\subset(a,b)$,

当 $|x-x_0|<\delta$ 时, $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,

即 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

反函数的连续性

定理4.8

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调且连续，则反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在 $[f(a),f(b)]$ 或 $[f(b),f(a)]$ 上连续，且 $f^{-1}(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的单调性.

证 不妨设 $f(x)$ 严格增，那么 $[f(a),f(b)]$ 就是反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域.

1. $x=f^{-1}(y)$ 在 $[f(a),f(b)]$ 上严格增 (证明见定理1.2).

2. $x = f^{-1}(y)$ 在 $[f(a), f(b)]$ 上连续.

对于任意的正数 ε , $a < x_0 - \varepsilon < x_0 + \varepsilon < b$, 设

$$y_1 = f(x_0 - \varepsilon),\ y_2 = f(x_0 + \varepsilon),$$

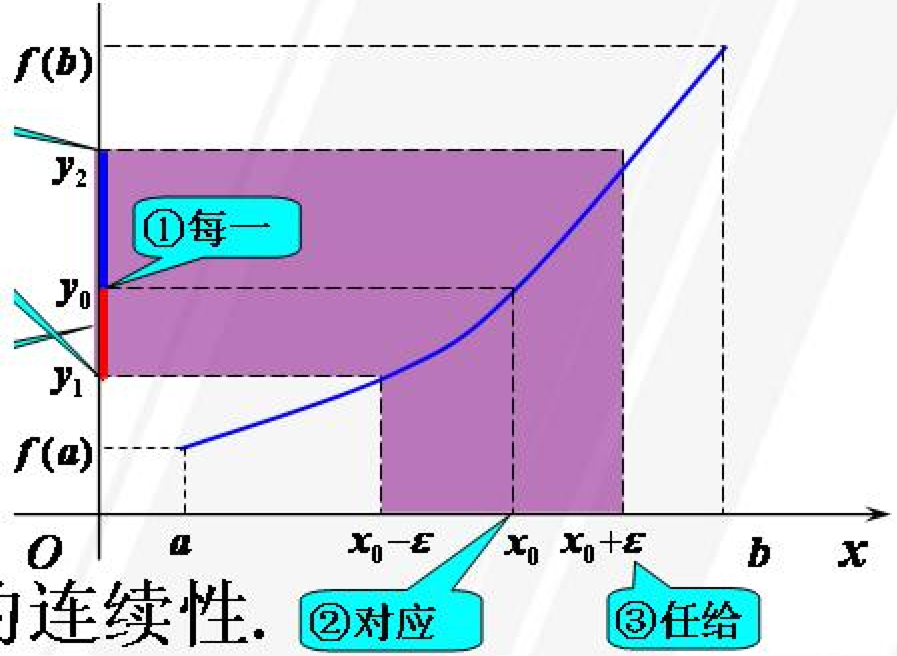
令 $$\delta = \min\{y_2 - y_0, y_0 - y_1\} > 0,$$

当 $(y_1 \le) y_0 - \delta < y < y_0 + \delta (\le y_2)$ 时,

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2),$$

即 $f^{-1}(y_0) - \varepsilon < x < f^{-1}(y_0) + \varepsilon.$

这就说明了 $x = f^{-1}(y)$ 在 $(f(a), f(b))$ 上连续



可类似地证明该函数在端点的连续性.

例6 由于 $f(x)=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续且严格增，因此它的反函数 $y=\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上也是连续且严格增. 关于其它的反三角函数

$$y=\arccos x,\ y=\arctan x,\ y=\operatorname{arccot} x,$$

均可得到在定义域内连续的结论.

例7 由于 $y=x^n$(n为正整数) 在 $[0,+\infty)$上连续且严格增，那么其反函数 $y=x^{\frac{1}{n}}$在 $[0,+\infty)$上亦为连续且严格增.

一致连续性

在本段中，我们将介绍一致连续性这个及其重要的概念.

定义2

设 $f(x)$ 为定义在区间 I 上的函数, 如果对于任意的正数 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任意 $x_1, x_2\in I$, 只要 $|x_1-x_2|<\delta$, 就有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续.

首先来看两个例题.

例8 证明 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续 .

证 因为对任意的 $x_1, x_2 \in [1,+\infty)$，有

$$\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right| = \frac{|x_2-x_1|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}} \le |x_2-x_1|,$$

所以对任意的正数 $\varepsilon>0$, 只要取 $\delta=\varepsilon$,

当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 有

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}| \le |x_2-x_1| < \varepsilon,$$

所以 $\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

例9 证明 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内不一致连续.

证 首先我们根据一致连续的定义来叙述 $f(x)$ 在区间 I 上不一致连续的定义：

存在 $\varepsilon_0>0$, 对任意正数 δ（无论 δ 多么小), 总存在 $x_1, x_2\in I$, 虽然 $|x_1-x_2|<\delta$ ，但仍有

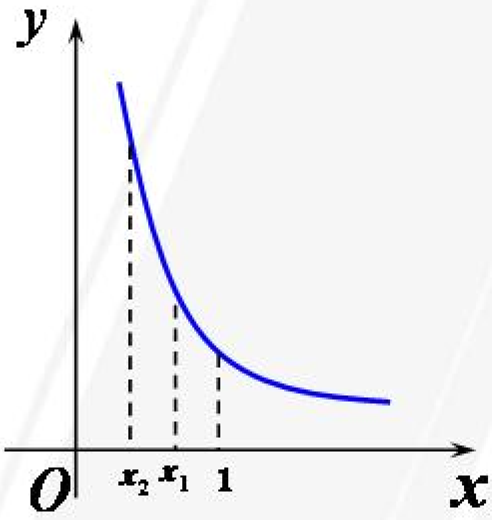
$$|f(x_1)-f(x_2)|\ge \varepsilon_0.$$

现在来验证函数 $y=\dfrac{1}{x}$, $x\in(0,1)$ 确实不是一致连续的.

取$\varepsilon = 1$，对任意正数$\delta\ (\delta < \frac{1}{2})$,

令 $x_1 = \delta, x_2 = \frac{\delta}{2}$，虽$|x_1 - x_2| < \delta$,

但 $\left|\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right| = \frac{1}{\delta} > 1.$



这就说明$y = \frac{1}{x}$在$(0,1)$内不一致连续.

试问, 函数$f(x)$在区间I上一致连续与$f(x)$在区间I上连续的区别究竟在哪里?

答:(1) 首先, 对于 $\varepsilon > 0$, 如果 $f(x)$在区间 I上连续, 那么, δ 不仅与ε有关, 而且还与所讨论的点x_0有关, 即 $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$. 而$f(x)$在区间$I$上一致连续. 则 δ仅与ε 有关.

比如 $y = \dfrac{1}{x}$在 $x_0 \in (0, 1)$连续, 对于任意正数ε, 所得

$\delta = \min\left\{\dfrac{2\varepsilon}{x_0^2}, \left|\dfrac{x_0}{2}\right|\right\}$,显然它与$\varepsilon$, x_0都有关. 在例8中已证得$y = \sqrt{x}$在 $[1, +\infty)$上一致连续. 这是由于 $\varepsilon = \delta$, δ与x_0无关.

(2) 函数 $f(x)$ 在每一点 $x_0 \in I$ 连续, $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0)$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

若 $\delta(\varepsilon, x_0)$ 在 x_0 的变化过程中有一个正下界(当然这个下界只与 ε 有关, 而与 x_0 无关), 则此时 $f(x)$ 在区间 I 上就一致连续了.

下述定理是连续函数在闭区间上的又一整体性质.

定理4.9

若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$上一致连续.

这个定理告诉我们: 定义在闭区间上的函数, 连续和一致连续是等价的.

证 首先用致密性定理来证明该定理. 在下述证明过程中, 选子列的方法值得大家仔细探究.

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不一致连续, 即存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对于一切 $\delta > 0$ (无论 δ 多么小), 总是存在 $x', x'' \in [a, b]$, 虽然 $|x' - x''| < \delta$, 但

$$|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0.$$

现分别取

$$\delta = 1, \exists\, x_1', x_1'' \in [a, b], |x_1' - x_1''| < 1,$$

$$|f(x_1') - f(x_1'')| \ge \varepsilon_0\,;$$

$$\delta = \frac{1}{2}, \exists\, x_2', x_2'' \in [a, b], |x_2' - x_2''| < \frac{1}{2},$$

$$|f(x_2') - f(x_2'')| \ge \varepsilon_0\,; \quad \cdots\cdots$$

$$\delta_n = \frac{1}{n}, \exists\, x_n', x_n'' \in [a, b], |x_n' - x_n''| < \frac{1}{n},$$

$$|f(x_n') - f(x_n'')| \ge \varepsilon_0\,; \quad \cdots\cdots.$$

由此得到两列 $\{x_n'\}, \{x_n''\} \subset [a, b]$, 虽然

$$|x_n' - x_n''| < \frac{1}{n} \to 0,$$

但是总有

$$|f(x_n')-f(x_n'')|\geq\varepsilon_0.$$

因为 $\{x'_n\}$ 有界, 从而由致密性定理, 存在 $\{x'_n\}$ 的一个收敛子列 $\{x'_{n_k}\}$. 设 $\lim\limits_{k\to\infty}x'_{n_k}=x_0$.

因为 $a\leq x'_{n_k}\leq b$, 所以由极限的不等式性质

$$a\leq x_0\leq b.$$

因为 $\lim\limits_{k\to\infty}x''_{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty}(x''_{n_k}-x'_{n_k})+\lim\limits_{k\to\infty}x'_{n_k}=x_0$, 以及 f 连续, 连续, 所以由归结原理得到

$$\varepsilon_0\leq\lim_{k\to\infty}|f(x'_{n_k})-f(x''_{n_k})|=|\lim_{x\to x_0}f(x)-\lim_{x\to x_0}f(x)|=0,$$

矛盾.

例10 设区间 I_1 的右端点为 $c \in I_1$，区间 I_2 的左端点也为 c，并且 $c \in I_2$. 证明：若 $f(x)$ 分别在 I_1, I_2 上一致连续，则 $f(x)$ 在区间 $I_1 \cup I_2$ 上也一致连续.

证 对任意的 $\varepsilon > 0$，因为 $f(x)$ 在 I_1, I_2 上一致连续，所以分别存在 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$，使得

当 $x_1, x_2 \in I_1$，$|x_1 - x_2| < \delta_1$ 时，$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$，

当 $x_1, x_2 \in I_2$，$|x_1 - x_2| < \delta_2$ 时，$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$，则对于任意的 $x_1, x_2 \in I_1 \cup I_2$，当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时，有以下两种情形：

情形1. $x_1, x_2 \in I_1$ 或 $x_1, x_2 \in I_2$. 此时自然有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

情形2. $x_1 \in I_1,\ x_2 \in I_2$. 注意到

$$c \in I_1 \cap I_2, |x_1 - c| < \delta, |x_2 - c| < \delta,$$

可得

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le |f(x_1) - f(c)| + |f(x_2) - f(c)|$$

$$\le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

综上，证得 $f(x)$ 在区间 $I_1 \cup I_2$ 上一致连续.

注 例10的条件“$c \in I_1 \cap I_2$”是重要的. 比如

$$f(x)=\begin{cases}1, & 1 \le x \le 2\\ 0, & 2 < x \le 3\end{cases}$$

在区间 $[1, 2]$ 与区间 $(2, 3]$ 上分别一致连续，但在区间 $[1, 3]$ 上不连续, 当然也不一致连续.

例11 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，并且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A.$ 证明 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

证 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，所以对任意的正数 $\varepsilon>0$，存在 $X>a$，当 $x_1,x_2>X$ 时，有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon.$$

又 $f(x)$ 在 $[a,X+1]$ 上连续，故由定理4.9可知 $f(x)$ 在 $[a,X+1]$ 上一致连续. 因此对上述 ε，存在正数 $\delta\,(\delta<1)$，使对任意 $x_1,x_2\in[a,X+1]$，

只要 $|x_1 - x_2| < \delta$, 必有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

现对任何 $x_1, x_2 \in [a, +\infty), |x_1 - x_2| < \delta$, 讨论如下.

情形 1. $x_1, x_2 \in [a, X+1]$, 自然有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon;$$

情形2. 注意到 $\delta < 1$, 所以若情形1 不成立, 必然有

$$x_1 > X, x_2 > X,$$

于是

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

综上, 证得 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$上一致连续.