数学分析　第四章
函数的连续性

§1 连续函数的概念

连续函数是数学分析中着重讨论的一类函数.

一、函数在一点的连续性

二、间断点的分类

三、区间上的连续函数

*点击以上标题可直接前往对应内容

函数在一点的连续性

定义1

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，且

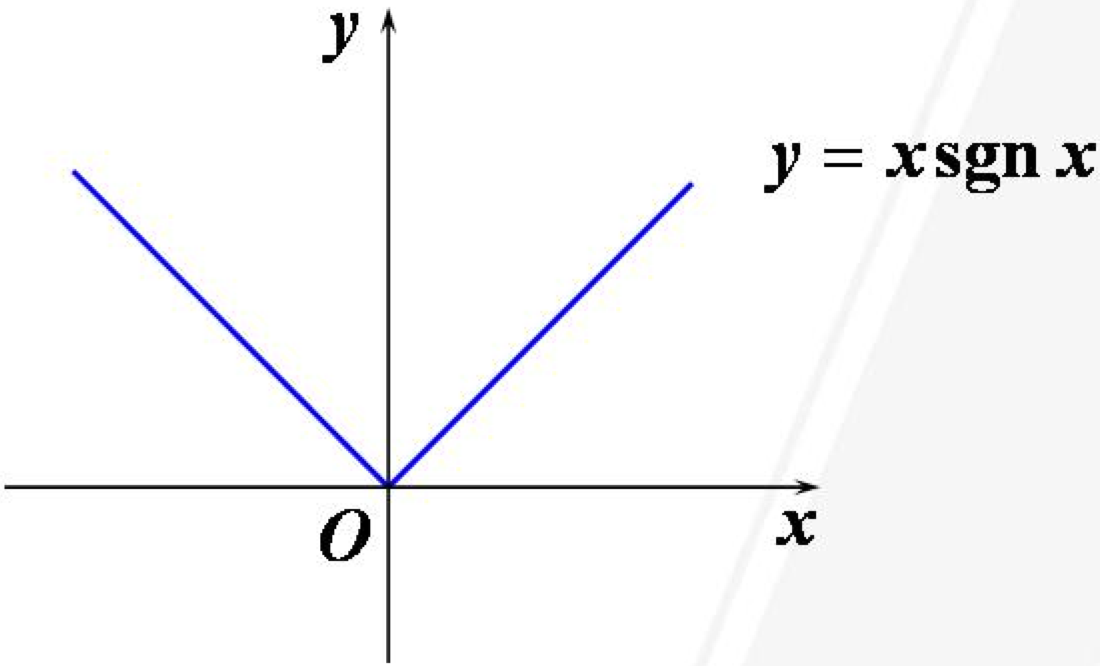
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{1}$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

由定义1知，我们是通过函数的极限来定义连续性的，换句话说连续就是指 $f(x)$ 在点 x_0 的极限不仅存在，而且其值恰为 $f(x)$ 在点 x_0 的函数值 $f(x_0)$.

例如：$f(x)=x\operatorname{sgn}x$ 在 $x=0$ 处连续，这是因为

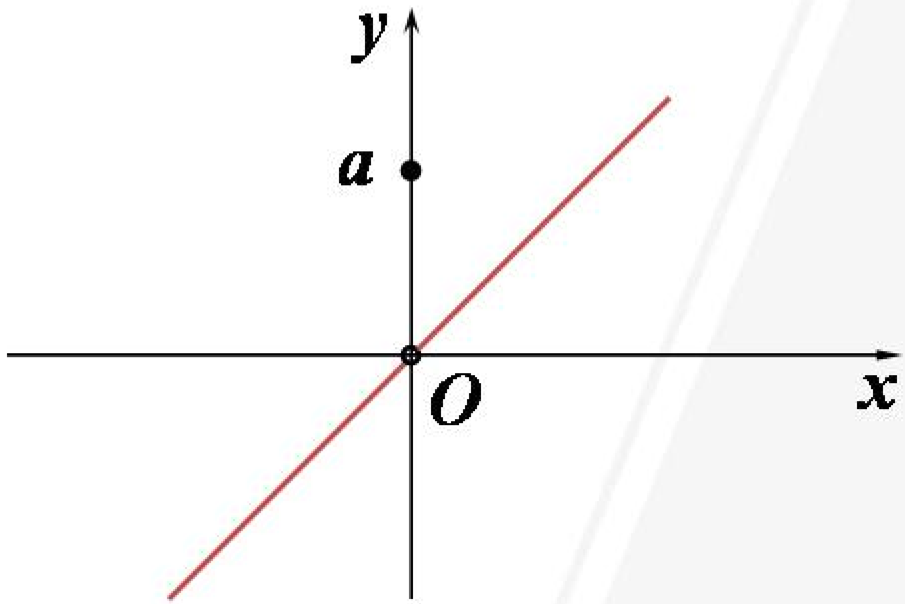
$$\lim_{x\to 0} x\operatorname{sgn}x = 0 = f(0).$$



又如：函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases} \quad (a\neq 0)$$

在$x=0$处不连续，这是因为$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0\neq f(0)$.



函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x$ 在点 $x=0$ 处不连续，这是因为极限 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn} x$ 不存在.

由极限的定义，定义1可以叙述为：对于任意正数 ε，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon. \qquad (2)$$

注意到（2）式在 $x=x_0$ 时恒成立，因此 $0<|x-x_0|<\delta$ 可改写为 $|x-x_0|<\delta$，这样就得到函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的 $\varepsilon-\delta$ 定义.

定义2

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义. 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$, 时

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

下面是连续性的另外一种表达形式. 请比较.

设 $\Delta x = x - x_0$,

$$\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

则函数在点 x_0 连续的充要条件是 :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \qquad (3)$$

这里我们称 Δx 是自变量(在 x_0 处)的增量, Δy为相应的函数(在 y_0 处)的增量

例1 证明 $f(x)=xD(x)$ 在 $x=0$ 处连续，其中 $D(x)$ 为狄利克雷函数.

证 因为 $f(0)=0$, $|D(x)|\le 1$, $\lim\limits_{x\to 0} x=0$, 所以

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} xD(x)=0=f(0).$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

注意:上述极限式绝不能写成

$$\lim_{x\to 0} xD(x)=\lim_{x\to 0} x\lim_{x\to 0} D(x)=0.$$

由上面的定义和例题应该可以看出: 函数在点 x_0 有极限与在点 x_0 连续是有区别的. 首先 $f(x)$ 在点 x_0 连续，那么它在点 x_0 必须要有极限(这就是说, 极限存在是函数连续的一个必要条件), 而且还要求这个极限值只能是函数在该点的函数值.

类似于左、右极限，下面引进左、右连续的概念.

定义3

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个右邻域 $U_+(x_0)$ (左邻域$U_-(x_0)$) 有定义，若

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)\quad \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)\right),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 右(左)连续.

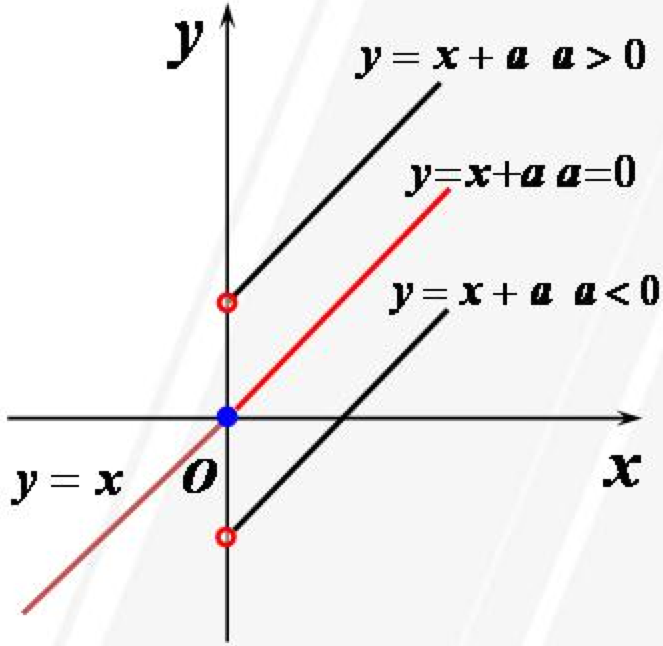
很明显, 由左、右极限与极限的关系以及连续函数的定义可得:

定理4.1

函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件是: f 在点 x_0 既是左连续，又是右连续.

例2 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ x+a, & x>0 \end{cases}$$ 在 $x=0$ 处的连续性.



解 因为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x=0=f(0),$$

所以 f 在 $x=0$ 处左连续.

又因为

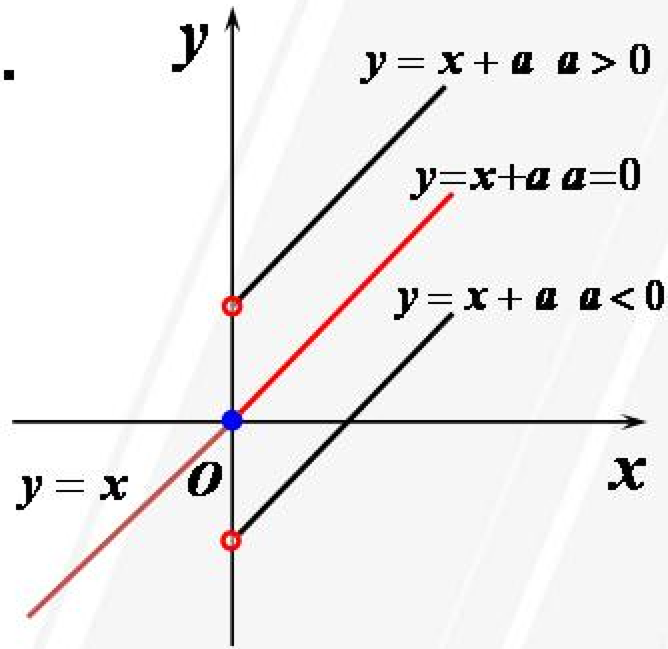
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+a)=a,$$

所以，当 $a\neq 0$ 时，f 在 $x=0$ 处不是右连续的；

当 $a=0$ 时，f 在 $x=0$ 处是右连续的.

综上所述， 当 $a=0$ 时, f 在 $x=0$ 处连续;

当 $a\neq 0$ 时,在 $x=0$ 处不连续.



$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+a)=a,$$

间断点的分类

定义4

设函数 f 在 x_0 的某(空心)邻域 $(U^\circ(x_0))$ 内有定义. 若 f 在点 x_0 无定义, 或者在点 x_0 有定义但却在该点不连续, 那么称点 x_0 为函数的一个间断点或不连续点.

由此, 根据函数极限与连续之间的联系, 如果 f 在点 x_0 不连续, 则必出现下面两种情况之一:

(i) f 在点 x_0 无定义或者在点 x_0 的极限不存在;

(ii) f 在点 x_0 有定义且极限存在, 但极限值却不等于 $f(x_0)$.

根据上面的分析, 我们对间断点进行如下分类:

1. 可去间断点: 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在, 而 f 在点 x_0 无定义, 或者有定义但 $f(x_0)\neq A$, 则称 x_0 是 f 的一个可去间断点.

2. 跳跃间断点: 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=B$ 都存在, 但 $A\neq B$, 则称点 x_0 为 f 的一个跳跃间断点.

可去间断点和跳跃间断点统称为**第一类间断点.**

注 x_0 是 f 的跳跃间断点与函数 f 在点 x_0 是否有定义无关.

3. 第二类间断点: 若 f 在点 x_0 的左、右极限至少有一个不存在, 则称 x_0 是 f 的一个第二类间断点.

例3 试证函数 $f(x)=\begin{cases}1 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$处不连续，

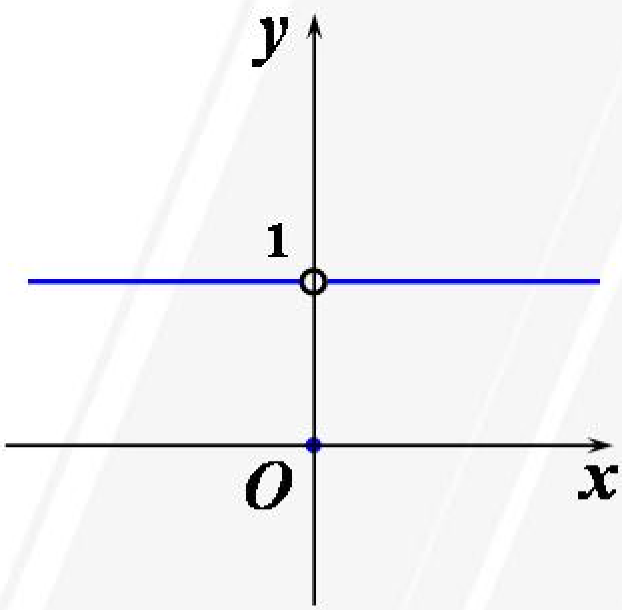
并且 $x=0$ 是 $f(x)$ 的一个可去间断点.

证 因为

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1\neq f(0),$$

所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的

一个可去间断点.



注 1. 对于任意函数 $g(x)$，若它在 $x = x_0$ 处连续，那么函数

$$F(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq x_0 \\ A, & x = x_0 \end{cases}$$

在 $A \neq g(x_0)$ 时，x_0 恒为 $F(x)$ 的一个可去间断点.

2. 若点 x_0 是 $f(x)$ 的可去间断点，只要重新定义 $f(x)$ 在点 x_0 的值为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$，那么它就在点 x_0 连续.

例4 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e^{1/x}+1}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在$x=0$处是否连续？若不连续，是什么类型的间断点？

解 因为

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{e^y+1}=0=f(0),$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{y\to-\infty}\frac{1}{e^y+1}=1\neq f(0),$$

所以$f(x)$在$x=0$处右连续而不左连续，从而不连续.

由于其左、右极限都存在，因此是跳跃间断点.

例5 试问 $x=0$ 是函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 的哪一类间断点？

解 因为由归结原理可知，

$$\lim_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x} \text{ 与 } \lim_{x\to 0^-}\sin\frac{1}{x}$$

均不存在，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的一个第二类间断点.

区间上的连续函数

若函数 f 在区间I上的每一点都连续, 则称 f 为 I 上的连续函数. 对于闭区间或半闭区间的端点, 函数在该点连续是指相应的左连续或右连续.

例如, $y = c$, $y = x^n$ (n为正整数)以及 $y = \sin x$ 都是$\mathbf{R}$上的连续函数; 而函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 是区间$[-1, 1]$上的连续函数, 在 $x = -1$, $x = 1$ 处的连续分别指右连续和左连续.

如果函数 f 在 $[a, b]$ 上的不连续点都是第一类的，并且不连续点只有有限个，那么称 f 是 $[a, b]$ 上的一个按段连续函数. 从几何上看，按段连续曲线就是由若干个小区间上的连续曲线合并而成(当然可能要添加或改变某些分段点处的值).

复习思考题

试证: $xD(x)$ 仅在 $x=0$ 处连续.