数学分析　第三章
函数极限

由于 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 等同于 $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) - A] = 0$，因此函数极限的性质与无穷小量的性质在本质上是相同的. 所以有人把"数学分析"也称为"无穷小分析".

§5 无穷大量与无穷小量

*点击以上标题可直接前往对应内容

无穷小量

定义1

设 f 在点 x_0 的某邻域 $U^{\circ}(x_0)$ 内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, 则称 f 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

若 f 在点 x_0 的某个空心邻域内有界，则称 f 为 $x\to x_0$ 时的有界量.

类似地可以分别定义 f 为

$$x\to x_0^+,\ x\to x_0^-,\ x\to\infty,\ x\to+\infty,\ x\to-\infty$$

时的无穷小量和有界量.

例如: $x-1$为$x\to 1$时的无穷小量;

$\sqrt{1-x^2}$ 为 $x\to 1^-$ 时的无穷小量;

$\dfrac{\sin x}{x}$为$x\to\infty$时的无穷小量;

$\sin x$为$x\to\infty$时的有界量.

显然，无穷小量是有界量. 而有界量不一定是无穷小量.

对于无穷小量与有界量，有如下关系:

1. 两个(类型相同的)无穷小量的和，差，积仍是无穷小量.

2. 无穷小量与有界量的乘积仍为无穷小量.

性质1可由极限的四则运算性质直接得到.

下面对性质 2 加以证明.

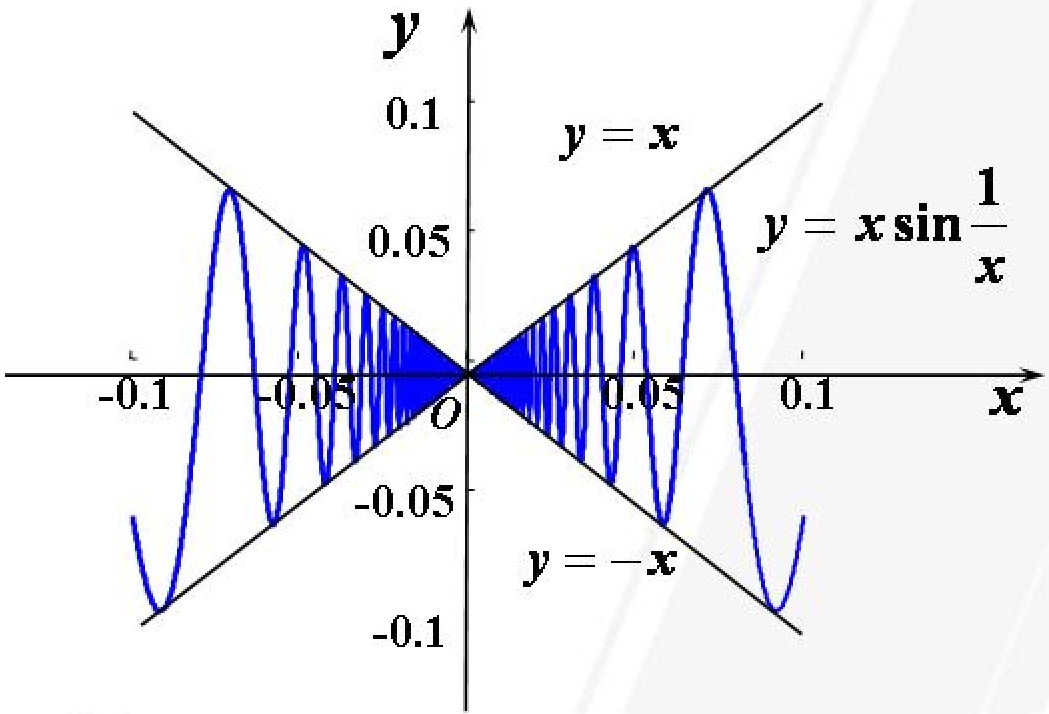
设$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0, |g(x)| \le M, x \in U^{\circ}(x_0)$. 对于任意的$\varepsilon > 0$, 因为$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, 所以存在$\delta > 0$, 使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时, $|f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M+1}$, 从而

$$|f(x)g(x)| < \varepsilon.$$

这就证明了 $f(x)g(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小量.

例如: x 为 $x \to 0$ 时的无穷小量, $\sin\dfrac{1}{x}$ 为 $x \to 0$ 时的有界量, 那么 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 为 $x \to 0$ 时的无穷小量.

从几何上看, 曲线 $y = x\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 近旁发生无限密集的振动, 其振幅被两条直线 $y = \pm x$ 所限制.



应当注意，下面运算的写法是错误的：

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = 0.$$

无穷小量阶的比较

两个相同类型的无穷小量，它们的和、差、积仍是无穷小量，但是它们的商一般来说是不确定的. 这与它们各自趋于零的速度有关. 为了便于考察两个无穷小量之间趋于零的速度的快慢，我们给出如下定义.

设当 $x \to x_0$ 时，$f(x), g(x)$ 均是无穷小量 .

1. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, 则称 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 是关于 $g(x)$ 的高阶无穷小量，记作

$$f(x)=o(g(x))\ (x\to x_0).$$

当 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量时，我们记

$$f(x)=o(1)\ (x\to x_0).$$

例如：$1-\cos x=o(x)\ (x\to 0)$;

$$\sin x=o(1)\ (x\to 0);$$

$$x^{k+1}=o(x^k)\ (x\to 0,k>0).$$

2. 若存在正数 M 和 L，使得在 x_0 的某一空心邻域 $U^\circ(x_0)$ 内，有

$$L \le \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le M,$$

则称 $f(x)$与 $g(x)$是 $x \to x_0$ 时的同阶无穷小量.

根据函数极限的保号性，特别当

$$\lim_{x \to x_0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = c \ne 0$$

时，这两个无穷小量一定是同阶的.

例如: 当 $x \to 0$时, $1-\cos x$ 与 x^2是同阶无穷小量;

当 $x \to 0$ 时，x 与 $x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$ 是同阶无穷小量.

3. 若两个无穷小量在 $U^{\circ}(x_0)$ 内满足: $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \le L$,

则记 $f(x) = O(g(x))\ \ (x \to x_0)$.

$f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的有界量时，我们记

$$f(x) = O(1)\ \ (x \to x_0).$$

应当注意，若 $f(x), g(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的同阶无穷小量，当然有

$$f(x) = O(g(x))\ \ (x \to x_0).$$

反之不一定成立, 例如

$$x \sin \frac{1}{x} = O(x)\ \ (x \to 0).$$

但是这两个无穷小量不是同阶的.

注意：这里的 $f(x)=o(g(x))$ 与 $f(x)=O(g(x))$ $(x\to x_0)$ 和通常的等式是不同的，这两个式子的右边，本质上只是表示一类函数. 例如 $o(g(x))$ $(x\to x_0)$ 表示 $g(x)$ 的所有高阶无穷小量的集合. 也就是说，这里的“=”类似于“$\in$”.

4. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的等价无穷小量，记作

$$f(x)\sim g(x)\ (x\to x_0).$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 所以 $\sin x\sim x(x\to 0)$;

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=1$, 所以 $\arctan x\sim x(x\to 0)$;

同样还有 $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2\ (x\to 0)$.

根据等价无穷小量的定义，显然有如下性质：

若 $f(x) \sim g(x)\,(x \to x_0),\, g(x) \sim h(x)\,(x \to x_0),$

那么 $f(x) \sim h(x)\,(x \to x_0)$. 这是因为

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = 1 .$$

前面讨论了无穷小量阶的比较, 值得注意的是，并

不是任何两个无穷小量都可作阶的比较. 例如

$\dfrac{\sin x}{x}$ 与 $\dfrac{1}{x^2}$ 均为 $x \to +\infty$ 时的无穷小量，却不能按照前面讨论的方式进行阶的比较. 这是因为

$$\frac{\dfrac{\sin x}{x}}{\dfrac{1}{x^2}} = x\sin x \ (x \to +\infty)$$

是一个无界量，并且 $(2n\pi)\sin(2n\pi) \to 0$.

下面介绍一个非常有用的定理：

定理3.12

设函数 f, g, h 在 $U^{\circ}(x_0)$ 内有定义，且

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to x_0).$$

(1) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)h(x) = A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)h(x) = A$；

(2) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{h(x)}{f(x)} = A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{h(x)}{g(x)} = A$.

证 (1) 因为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)h(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$，所以

$$\lim_{x \to x_0} g(x)h(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} f(x)h(x) = A.$$

(2) 可以类似地证明.

定理 3.12 告诉我们，在求极限时，乘积中的因子可用等价无穷小量代替，这是一种很有用的方法.

例1 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{\sin 2x}$.

解 因为 $\arctan x \sim x$，$\sin 2x \sim 2x \quad (x \to 0)$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

例2 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\dfrac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

无穷大量

定义2

设函数 f 在 $U^\circ(x_0)$ 有定义，若对于任给 $G>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $x\in U^\circ(x_0;\delta)\subset U^\circ(x_0)$ 时，有

$$|f(x)|>G,$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷大量，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

若定义中的 $|f(x)|>G$ 改为 $f(x)>G$ 或 $f(x)<-G$，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \text{ 或 } \lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty.$$

相应地称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的正无穷大量和负无穷大量.

类似地可以定义如下的无穷大量:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty.$$

请读者自行写出它们的定义.

例3 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty.$

证 $\forall G>0$, 取$\delta=\dfrac{1}{\sqrt{G}}$, 当 $0<|x|<\delta$ 时，$\dfrac{1}{x^2}>G$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty.$

例4 当 $a>1$ 时，证明 $\lim\limits_{x\to +\infty}a^x=+\infty.$

证 $\forall G>0$ (不妨设 $G>1$), 取 $M=\log_a G$，由对数函数 $\log_a x$ 的严格递增性，当 $x>M$ 时，$a^x>G$，

这就证明了 $\lim\limits_{x\to +\infty}a^x=+\infty.$

例5 证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty.$

证 对 $\forall G>0$, 要找到 $\delta>0$, 使得 $\forall 0<x<\delta$, 有

$$\ln x<-G.$$

由于 $\ln x$ 单调增, 只要取 $\delta=\mathrm{e}^{-G}>0$ 即可.

例6 设 $\{a_n\}$ 递增，无上界. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty.$

证 因为 $\{a_n\}$ 无上界，所以任给 $G>0$，存在 n_0，使 $a_{n_0}>G$. 又因 $\{a_n\}$ 递增, 故当 $n>n_0$ 时，有 $a_n\ge a_{n_0}>G$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty.$

从无穷大量的定义与例3、例4和例5可以看出：

无穷大量不是很大的一个数，而是具有非正常极限的变量．很明显，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，那么 $f(x)$ 在 x_0 的任何一个邻域内无界．但值得注意的是：若 $f(x)$ 在 x_0 的任何邻域内无界 (称 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无界量)，并不能保证 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 的无穷大量.

例如： $f(x)=x\sin x$ 在 ∞ 的任何邻域内无界，但却不是 $x\to\infty$ 时的无穷大量．事实上，对

$$x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad y_n = 2n\pi, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

有

$$f(x_n) \to \infty, \quad f(y_n) \to 0.$$

因而 $f(x)$ 不是 $x \to \infty$ 时的无穷大量.

两个无穷大量也可以定义阶的比较 .

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$.

1. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$，则称 $f(x)$ 是关于 $g(x)$ 的高阶无穷大量.

2. 若存在正数 L, K 和正数 δ，使 $x\in U^{\circ}(x_0,\delta)$ 时，

$$L\le\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\le K,$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的一个同阶无穷大量.

3. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的等价无穷大量，记为

$$f(x)\sim g(x),\quad x\to x_0.$$

下述定理反映了无穷小量与无穷大量之间的关系，直观地说：无穷大量与无穷小量构成倒数关系.

定理3.13

(1) 若 f 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量，且不等于零，则 $\dfrac{1}{f}$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷大量.

(2) 若 g 为 $x\to x_0$ 时的无穷大量，则 $\dfrac{1}{g}$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

(1) 若 f 为 $x \to x_0$ 时的无穷小量，且不等于零，则 $\dfrac{1}{f}$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷大量.

证 这里仅证明定理的(1). 对于任意正数 G, 因为 f 为 $x \to x_0$ 时的无穷小量，所以存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x)| < \frac{1}{G}, \quad \text{即} \quad \left|\frac{1}{f(x)}\right| > G$$

这就证明了 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.

例7 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b\neq 0$， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$，证明

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\infty.$$

证 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b\neq 0$，由极限的保号性，存在 $\delta_1>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，有

$$|f(x)|\geq \frac{|b|}{2}.$$

又因为 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$，所以对于任意正数 G，存在 $\delta_2>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，

$$|g(x)|>\frac{2}{|b|}G.$$

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，就有

$$|f(x)g(x)| \geq \frac{|b|}{2}\cdot\frac{2}{|b|}G=G$$

即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\infty.$$

注 对于函数$f(x)=x$，$g(x)=\frac{1}{x}$，当$x\to 0$时，有

$$\lim_{x\to 0} f(x)g(x)=1\neq\infty.$$

这就说明了当$b=0$时结论不一定成立.

例8 设 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的无界量. 证明: 存在 $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty.$$

证 因为 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 为无界量, 所以 $\forall G > 0$, $\forall \delta > 0$, 存在x_δ, $0 < |x_\delta - x_0| < \delta$, 使得

$$|f(x_\delta)| > G.$$

于是

对$G_1 = 1$, $\delta_{,1} = 1$, $\exists x_1$, $0 < |x_1 - x_0| < 1$,

$$|f(x_1)| > 1;$$

对$G_2 = 2$, $\delta_{,1} = \dfrac{1}{2}$, $\exists x_2$, $0 < |x_2 - x_0| < \dfrac{1}{2}$,

$$|f(x_2)|>2; \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

对 $G_N=n,\delta_n=\dfrac{1}{n}$, $\exists x_n$, $0<|x_n-x_0|<\dfrac{1}{n}$,

$$|f(x_n)|>n; \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由此得到一列 $\{x_n\}$，满足 $x_n\neq x_0$, $x_n\to x_0$, 且

$$\lim_{x\to\infty} f(x_n)=\infty.$$

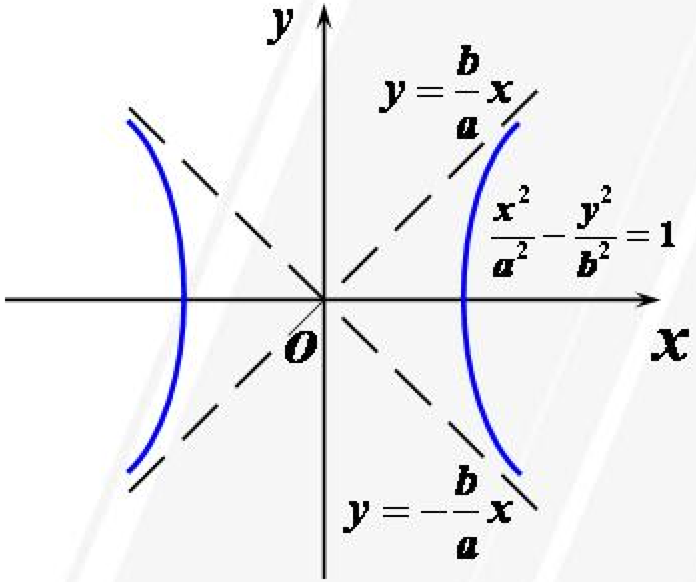
注　例8的证明提供了选取符合要求的点列的一种方法. 熟练地掌握这种方法, 对提高解题能力是有益处的.

渐近线

作为函数极限的一个应用，我们来讨论曲线的渐近线问题.

在中学里我们已经知道双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$



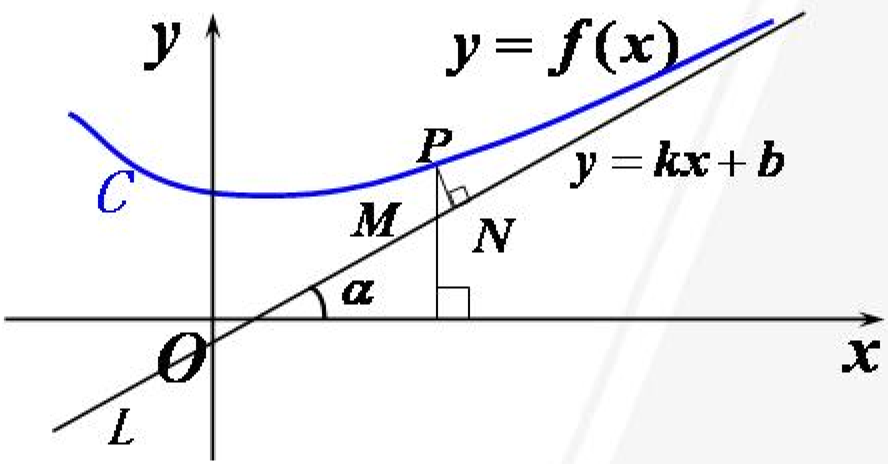
它的渐近线方程为

$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$

下面给出渐近线的一般定义.

定义4

设 L 是一条直线. 若曲线 C 上的动点 P 沿曲线无限远离原点时, 点 P 与 L 的距离趋于零, 则称直线 L 为曲线 C 的一条渐近线(如图).



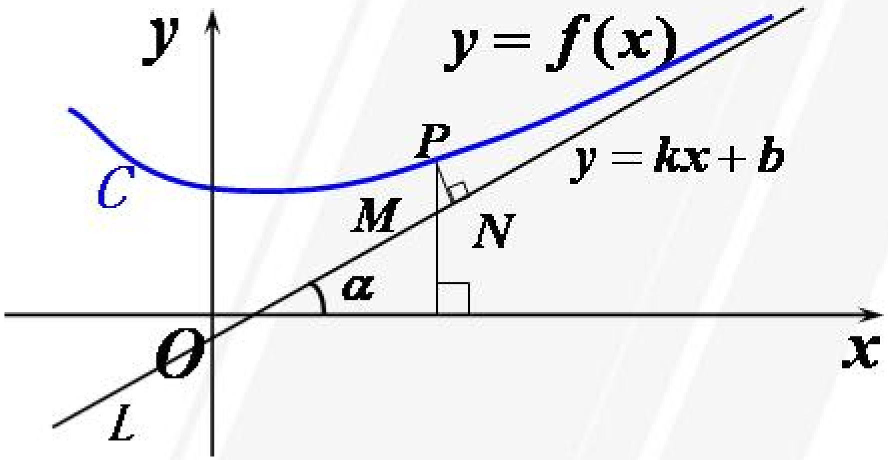
首先，我们来看如何求曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

如图所示，设斜渐近线 L 的方程为 $y=kx+b$. 曲线上的动点 $P(x,y)$ 至直线 L 的距离为

$$|PN|=|PM|\cdot|\cos\alpha|=\frac{|f(x)-kx-b|}{\sqrt{1+k^2}}.$$

由渐近线的定义，$x\to+\infty$ 时（或 $x\to-\infty$，$x\to\infty$ 时），$PN\to 0$，即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-kx-b}{\sqrt{1+k^2}}=0,$$



从而

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx].$$

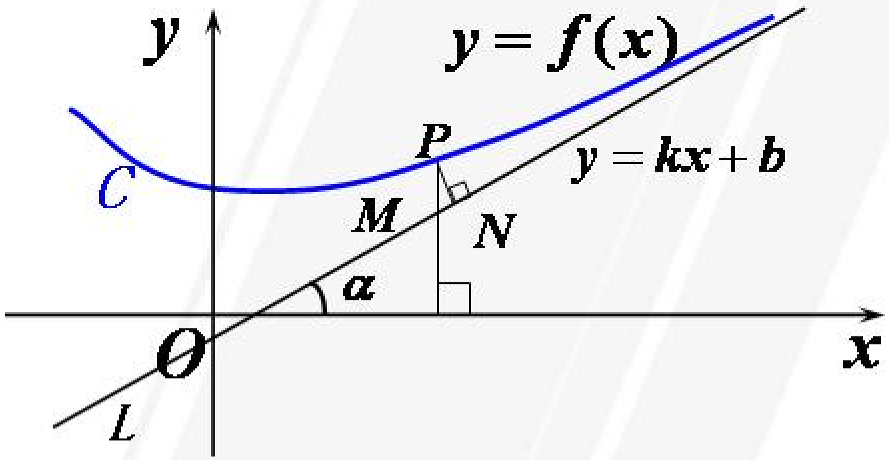
又

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-kx}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x}=0,$$

所以,

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-kx-b}{\sqrt{1+k^2}}=0,$$



这样就确定了斜渐近线的两个参数：

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx].$$

这是沿 x 轴正向的渐近线的方程. 显然沿 x 轴负向的斜渐近线的斜率和截距分别为

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx].$$

同样也可以求出沿着 $x\to\infty$ 的渐近线方程.

注 特别当 $k=0$ 时，该渐近线称为水平渐近线.

显然，曲线 $y=f(x)$ 有水平渐近线的充要条件是

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A\,(\neq\infty)$$

$$(\lim_{x\to-\infty} f(x)=A,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=A).$$

若函数 $f(x)$满足

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$$

$$(\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\infty \text{ 或} \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\infty),$$

则称 $x=x_0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线.

例9 求曲线 $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$ 的渐近线.

解 设 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}=\dfrac{x^3}{(x+3)(x-1)}$，易见

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to -3} f(x)=\infty.$$

并且 $f(x)$ 在其他点处均有有限极限，所以求得铅直渐近线为:

$$x=1,\ x=-3.$$

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{(x+3)(x-1)}=1$，得 $k=1$；

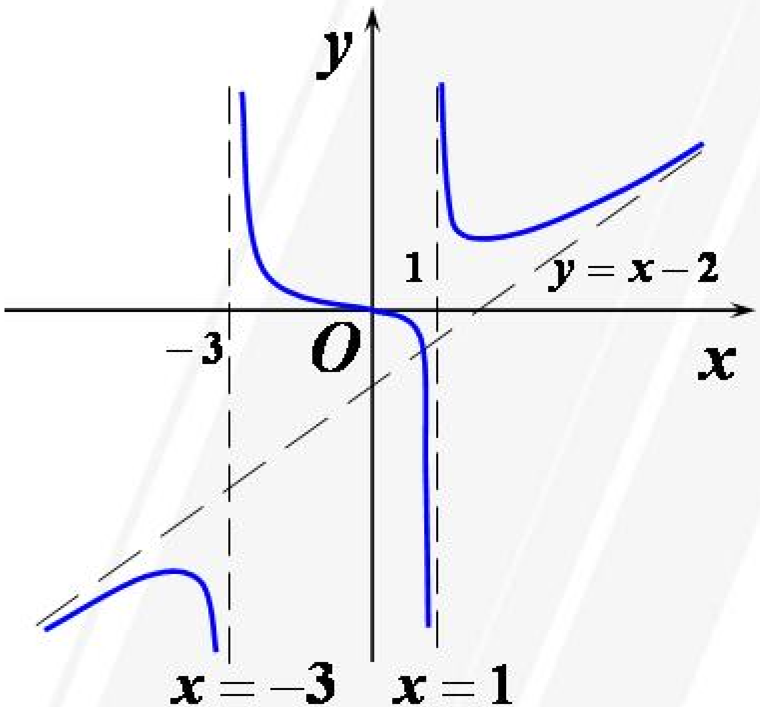
$$f(x)-x=\frac{x^3}{x^2+2x-3}-x$$

$$=\frac{-2x^2+3x}{x^2+2x-3},$$

得 $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-x]=-2$.

于是求得斜渐近线方程为

$y=x-2$.（如右图所示）



复习思考题

1. 两个无穷大量的和、差与积是否仍是无穷大量?

2. 下面的运算是否正确?

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - x}{x^3} = 0;$

(2) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x}{x} = 1.$