数学分析　第三章
函数极限

§4 两个重要的极限

在本章，我们将讨论两个重要的极限

一、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

二、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$

*点击以上标题可直接前往对应内容

命题1 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

证 因为 $\sin x<x<\tan x\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}. \tag{1}$$

不等式中的三个表达式均是偶函数，故当 $0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$ 时，(1) 式仍成立.

因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos x}=1$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

即 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

例1 求 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$.

解 令 $t=x-\pi$, 则 $\sin x=\sin(t+\pi)=-\sin t$,

所以

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{t}=-1.$$

例2 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}$.

解 令 $t=\arctan x,\ x=\tan t$, 则

$$\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\tan t}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t}\cdot\lim_{t\to0}\cos t=1$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

命题2 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

证 我们只需证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \quad 和 \quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

设两个分段函数分别为:

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n,\quad n\le x<n+1,\quad n=1,2,\cdots;$$

$$g(x)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\quad n\le x<n+1,\quad n=1,2,\cdots.$$

显然有

$$f(x)\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le g(x),\ x\in[1,+\infty).$$

因为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e},$$

所以由函数极限的迫敛性，得到

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}. \qquad (2)$$

当 $x<0$ 时，设 $x=-y,\ y>0$，则

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}.$$

因为当 $x\to-\infty$ 时，$y\to+\infty$, 所以

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=\mathrm{e}.$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$

注 若令 $t=\frac{1}{x}$, 则 $x\to\infty$ 时, $t\to 0$. 由此可得

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}. \qquad (3)$$

在实际应用中，公式(2)与(3)具有相同作用.

例4 求$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

解 由公式 (3),

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^2=e^2$$

例5 求$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$

解 $$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1-x)^{-\frac{1}{x}}\right]^{-1}=e^{-1}$$

例6 求 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$.

解 因为 $\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e$,

$$\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}-\frac{n}{n-1}}\geq\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}-2}.$$

而 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, $\frac{n-1}{n^2}\to 0$, 所以由归结原则,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}}=e.$$

再由迫敛性，求得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n=\mathrm{e}.$$