数学分析　第三章
函数极限

在这一节中，介绍函数极限存在的条件.

§3 函数极限存在的条件

一、归结原则

二、单调有界定理

三、柯西收敛准则

*点击以上标题可直接前往对应内容

归结原则

定理3.8

设 f 在 $U^\circ(x_0,\eta)$ 有定义. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是: 对于在 $U^\circ(x_0,\eta)$ 内以 x_0 为极限的任何数列 $\{x_n\}$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 都存在, 并且相等.

证 (必要性) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 则对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

设 $\{x_n\}\subset U^\circ(x_0,\eta)$, $x_n\to x_0$, 那么对上述 δ, 存在 N, 当 $n>N$ 时, 有 $0<|x_n-x_0|<\delta$,

所以 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$. 这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

(充分性)(下面的证法很有典型性)

设某个 $\{y_n\}\subset U^{\circ}(x_0,\eta)$, $y_n\to x_0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n)=A\ .$$

若 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时, 不以 A 为极限, 则存在正数 ε_0, 对于任意正数 δ, 存在 $x_\delta\in U^{\circ}(x_0,\delta)$, 使得

$$|f(x_\delta)-A|\ge\varepsilon_0.$$

现分别取

$$\delta_1=\eta, \delta_2=\frac{\eta}{2}, \cdots, \delta_n=\frac{\eta}{n}, \cdots,$$

存在相应的 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots,\quad x_n\in U^{\circ}(x,\delta_n),$

使得

$$|f(x_n)-A|\geq\varepsilon_0,\ \ n=1,2,\cdots.$$

另一方面, $0<|x_n-x_0|<\delta_n=\dfrac{\eta}{n}$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

这与 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$ 矛盾.

注　归结原则有一个重要应用:

若存在 $\{x_n\},\{y_n\}\subset U^{\circ}(x_0)$, $x_n\to x_0$, $y_n\to x_0$, 但是

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A\neq B=\lim_{n\to\infty}f(y_n),$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

例1 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ 都不存在.

解 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}\to 0$, $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\to 0$, 有

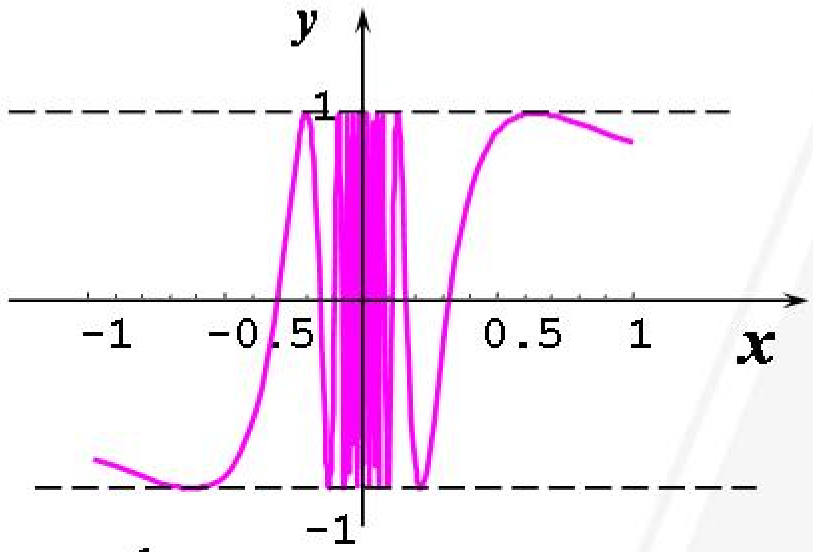
$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=0\neq 1=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{y_n},$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$,不存在.

同理可取 $x_n=2n\pi\to\infty$, $y_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\to\infty$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\cos x_n=1\neq 0=\lim_{n\to\infty}\cos y_n,$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ 不存在.



从几何上看，$y=\sin\dfrac{1}{x}$ 的图象在 $x=0$ 附近作无比密集的等幅振荡，当然不会趋于一个固定的值. 为了让读者更好地掌握其他五类极限的归结原则，我们写出 $x\to x_0^+$ 时的归结原则如下：

定理3.9

设 $f(x)$ 在 x_0 的某空心右邻域 $U_+^\circ(x_0)$ 有定义，则

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \Leftrightarrow \begin{cases} \text{任给 } \{x_n\}\subset U_+^\circ(x_0),\ x_n\to x_0, \\ \text{必有 } \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A. \end{cases}$$

作为一个例题, 下面给出定理 3.9 的另一种形式.

例 2 设 $f(x)$在 x_0 的某空心右邻域 $U_+^\circ(x_0,\eta)$上有定义. 那么 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 的充要条件是任给严格递减的 $\{x_n\}\subset U_+^0(x_0,\eta)$, $x_n\to x_0$，必有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

证　必要性应该是显然的. 下面我们证明充分性. 假若 $x \to x_0^+$ 时, $f(x)$ 不以 A 为极限. 则存在正数 ε_0, $\forall \delta > 0$, 存在 $x_\delta \in U_+^\circ(x_0, \delta)$, 使 $|f(x_\delta) - A| \ge \varepsilon_0$.

取 $\delta_1 = \eta$, $\exists\, x_1$, $0 < x_1 - x_0 < \delta_1$, $|f(x_1) - A| \ge \varepsilon_0$;

$$\delta_2 = \min\{\frac{\eta}{2}, x_1 - x_0\},$$

$\exists\, x_2$, $0 < x_2 - x_0 < \delta_2$, $|f(x_2) - A| \ge \varepsilon_0$;

......

$$\delta_n = \min\{\frac{\eta}{n}, x_{n-1} - x_0\},$$

$\exists\, x_n$, $0 < x_n - x_0 < \delta_n$, $|f(x_n) - A| \ge \varepsilon_0$;　......

这样就得到一列严格递减的数列 $\{x_n\} \subset U_+^\circ(x_0, \eta)$, $x_n \to x_0$, 但 $|f(x_n) - A| \ge \varepsilon_0$, 这与条件矛盾.

单调有界定理

定理3.10

设 f 为定义在 $U_+^\circ(x_0)$ 上的单调有界函数,

则右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在.

（相信读者也能够写出关于 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ 的单调有界定理.）

证　不妨设 f 在 $U_+^\circ(x_0)$ 递减. 因为 $f(x)$ 有界, 故 $\sup\limits_{x\in U_+^\circ(x_0)} f(x)$ 存在, 设为 A. 由确界定义, 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x^* \in U_+^\circ(x_0)$, 使

$$A-\varepsilon < f(x^*) \le A.$$

令 $\delta = x^* - x_0$，当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时，由 $f(x)$ 的递减性，

$$A-\varepsilon < f(x^*) \le f(x) \le A < A+\varepsilon.$$

这就证明了

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A.$$

对于单调函数，归结原则的条件就要简单得多.

例3 设 $f(x)$ 在 $U_+^\circ(x_0,\eta)$ 上单调, 则 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在的充要条件是存在一个数列

$$\{x_n\}\subset U_+^\circ(x_0,\eta),\ x_n\to x_0,$$

使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在.

证 必要性可直接由归结原则得出, 下面证明充分性.

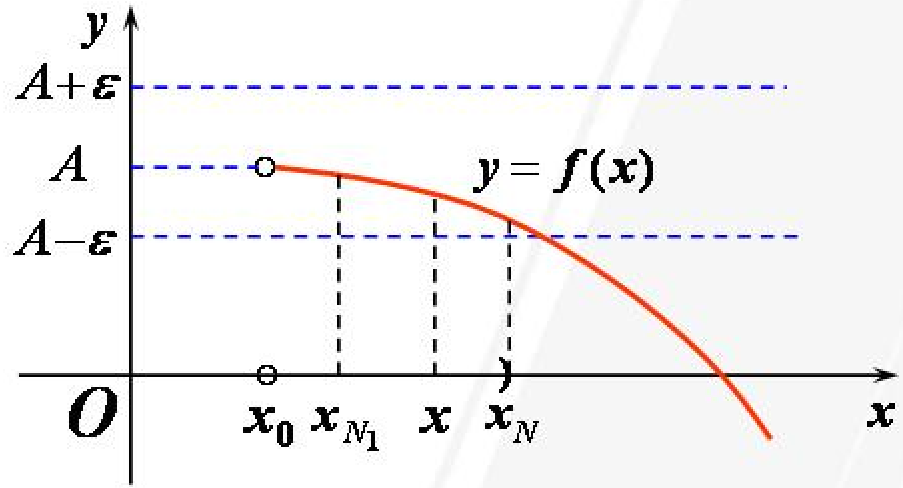
假设 $f(x)$ 递减.

设 $\{x_n\}\subset U_+^\circ(x_0,\delta')$, $x_n\to x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

故$\forall \varepsilon > 0, \exists N,$

当$n \geq N$时, 有

$A-\varepsilon < f(x_n) < A+\varepsilon.$



对于任意 $x \in U_+^\circ(x_0, x_N - x_0)$, $A-\varepsilon < f(x_N) \leq f(x).$

又因为$x_n \to x_0 < x$, 所以$\exists N_1(> N)$, 使 $x_{N_1} < x$,

从而 $f(x) \leq f(x_{N_1}) < A+\varepsilon$. 因此

$$A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A.$

柯西收敛准则

这里 仅给出 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 的柯西收敛准则, 请读者自行写出其他五种极限类型的柯西收敛准则，并证明之.

定理3.11

设 $f(x)$ 在 $+\infty$ 的某个邻域 $\{x \mid x > M\}$ 上 有定义, 则极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在的充要条件是：任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $X\,(> M)$, 对于任意 $x_1, x_2 > X$, 都有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

证（必要性）设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, 则对于任意 $\varepsilon>0$,

存在 $X(>M)$, 对一切 $x>X$,

$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

所以对一切 $x_1,x_2>X$, 有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le|f(x_1)-A|+|f(x_2)-A|<\varepsilon.$$

(充分性) 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $X\left(>M\right)$, 对一切 $x_1,x_2>X$, 有

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\varepsilon.$$

任取 $\{x_n\}$, $x_n\to+\infty$, 则存在 N, 当 $n>N$ 时, $x_n>X$.

又当 $n,m>N$ 时，$x_n,x_m>M$，故

$$\left|f(x_n)-f(x_m)\right|<\varepsilon.$$

这就是说 $\{f(x_n)\}$ 是柯西列，因此收敛.

若存在 $\{x_n\},\{y_n\}$，$x_n\to+\infty$，$y_n\to+\infty$，使

$$f(x_n)\to A,\ f(y_n)\to B,\ B\neq A,$$

则令 $\{z_n\}$ 为 $x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,x_n,y_n,\cdots$，显然 $z_n\to+\infty$.

但 $\{f(z_n)\}$ 发散，矛盾.

这样就证明了对于任意的 $\{x_n\}$，$x_n\to+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 存在且相等. 由归结原则，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

注 由柯西准则可知, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在的充要条件是 $\exists\varepsilon_0>0$, 以及 $\{x_n\},\{y_n\}$, 虽然

$$x_n\to+\infty,\ \ y_n\to+\infty,$$

但是

$$|f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon_0.$$

例如, 对于 $y=\sin x$, 取 $\varepsilon_0=1$,

$$x_n=2n\pi\to+\infty,\quad y_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}\to+\infty,$$

但是 $|\sin x_n-\sin y_n|=1\ge\varepsilon_0$.

这说明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在.

复习思考题

定理3.8 中的条件“并且相等”这几个字是否可以省略?