数学分析　第三章
函数极限

§2 函数极限的性质

在前面一节中引进的六种类型的函数极限，它们都有类似数列极限的一些性质. 这里仅以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 为代表叙述并证明这些性质，至于其它类型的性质与证明，只要相应作一些修改即可.

一、$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的基本性质

二、范例

*点击以上标题可直接前往对应内容

$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$的基本性质

定理3.2（惟一性）

若 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 则此极限惟一.

证 不妨设 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ 以及 $\lim_{x\to x_0} f(x)=B$.

由极限的定义，对于任意的正 ε, 存在正数 δ_1, δ_2,

当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时,

$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{1}$$

当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时,

$$|f(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，(1) 式与 (2) 式均成立，所以

$$|A-B|\le|A-f(x)|+|f(x)-B|<\varepsilon.$$

由ε的任意性，推得 $A=B$.

这就证明了极限是惟一的.

$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{1}$$

定理3.3（局部有界性）

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则存在 $U^{\circ}(x_0)$，$f(x)$ 在 $U^{\circ}(x_0)$上有界.

证 取$\varepsilon = 1$，存在$\delta > 0$，当$0 < |x - x_0| < \delta$时，

$$|f(x) - A| < 1.$$

由此得

$$|f(x)| < |A| + 1.$$

这就证明了$f(x)$在某个空心邻域$U^{\circ}(x_0,\delta)$上有界.

注:

(1) 试与数列极限的有界性定理（定理 2.3）作一

比

(2) 有界函数不一定存在极限;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}=1$, 但 $\dfrac{1}{x}$ 在 $(0, 2)$ 上并不是有界的. 这

说明定理中 “局部” 这两个字是关键性的.

定理3.4（局部保号性）

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$ (或 <0), 则对任何正 $r<A$ (或 $r<-A$)，存在 $U^\circ(x_0)$, 使得对一切 $x\in U^\circ(x_0)$, 有

$$f(x)>r>0 \ (\text{或}\ f(x)<-r<0\ ).$$

证 不妨设 $A>0$. 对于任何 $r\in(0,A)$, 取 $\varepsilon=A-r$, 存在$\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

由此证得 $f(x)>A-\varepsilon>r$.

定理3.5（保不等式性）

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在，且在某邻域 $U^\circ(x_0)$ 内有 $f(x)\le g(x)$, 则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x).$$

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, 则对于任意 $\varepsilon>0$, 分别存在正数 δ_1,δ_2, 使当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，有 $f(x)>A-\varepsilon$;

而当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，有 $g(x)<B+\varepsilon$.

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，满足

$$A-\varepsilon<f(x)\le g(x)<B+\varepsilon,$$

从而有 $A<B+2\varepsilon$. 因为 ε 是任意正数，所以证得

$$A\le B.$$

定理3.6（迫敛性）

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，且在 x_0 的某个空心邻域 $U^\circ(x_0)$ 内有

$$f(x)\le h(x)\le g(x).$$

那么 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$.

证 因 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$, 所以对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon,\quad A-\varepsilon<g(x)<A+\varepsilon.$$

再由定理的条件，又

$$A-\varepsilon<f(x)\le h(x)\le g(x)<A+\varepsilon.$$

这就证明 $h(x)$ 在点 x_0 的极限存在，并且就是 A.

定理3.7（四则运算法则）

若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在，则

$f\pm g, f\cdot g$ 在点 x_0 的极限也存在，且

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

(3) 又若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$，则 $\dfrac{f}{g}$ 在点 x_0 的极限也存在，

并有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

这个定理的证明类似于数列极限中的相应定理, 这里将证明留给读者. 在下一节学过归结原则之后, 就可以知道这些定理是显然的.

范例

例1 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, 所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\arctan x\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot 0=0$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

解 由取整函数的性质，$\dfrac{1}{x}-1<\left[\dfrac{1}{x}\right]\le\dfrac{1}{x}$. 当 $x>0$ 时，有 $1-x<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\le 1$，由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$，因此由迫敛性得 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$；又当 $x<0$ 时，有 $1<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\le 1-x$，同理得 $\lim\limits_{x\to 0^-} x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$. 于是求得

$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1.$$

例 3 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(x\tan x-1)$.

解 因为

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan x=\tan\frac{\pi}{4}=1,$$

所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(x\tan x-1)=\frac{\pi}{4}\cdot 1-1=\frac{\pi}{4}-1.$$

例4 求证 $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1\ (a>1)$.

证 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}=1$，所以 $\forall\varepsilon>0, \exists N$,

当 $n\ge N$ 时，有 $1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{n}}<a^{\frac{1}{n}}<1+\varepsilon$，特别又有

$$1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{N}}<a^{\frac{1}{N}}<1+\varepsilon.$$

取 $\delta=\dfrac{1}{N}$，当 $0<|x-0|<\delta$ 时，

$$1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{N}}<a^{x}<a^{\frac{1}{N}}<1+\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$ 得证.

复习思考题

1. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ 存在，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在，试问极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ 是否必定不存在？

2. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，这时是否必有

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x))=A\ ?$$