数学分析　第三章
函数极限

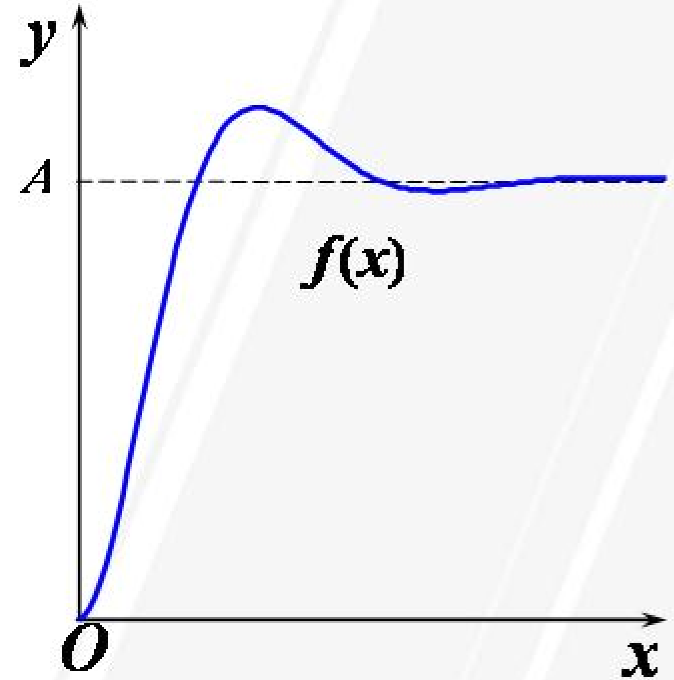
在本章,我们将讨论函数极限的基本概念和重要性质.作为数列极限的推广,函数极限与数列极限之间有着密切的联系,它们之间的纽带就是归结原理.

§1 函数极限概念

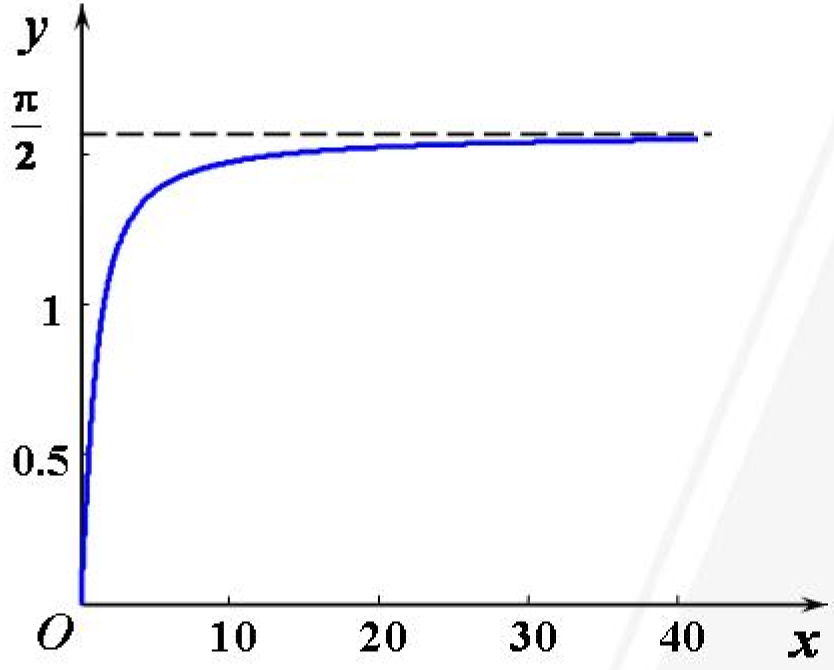
*点击以上标题可直接前往对应内容

x趋于∞时的函数极限

设函数$f(x)$定义在$[a,+\infty)$上，当 x 沿着 x 轴的正向无限远离原点时，函数$f(x)$也无限地接近A，我们就称$f(x)$当x趋于$+\infty$时以A为极限.



例如 函数 $y=\arctan x$，当 x 趋于$+\infty$时，以$\dfrac{\pi}{2}$为极限.



定义1

设 f 为定义在$[a,+\infty)$上的一个函数. A 为常数.

若对于任意正数 $\varepsilon>0$, 存在$M(\geq a)$, 使得

当$x>M$ 时,

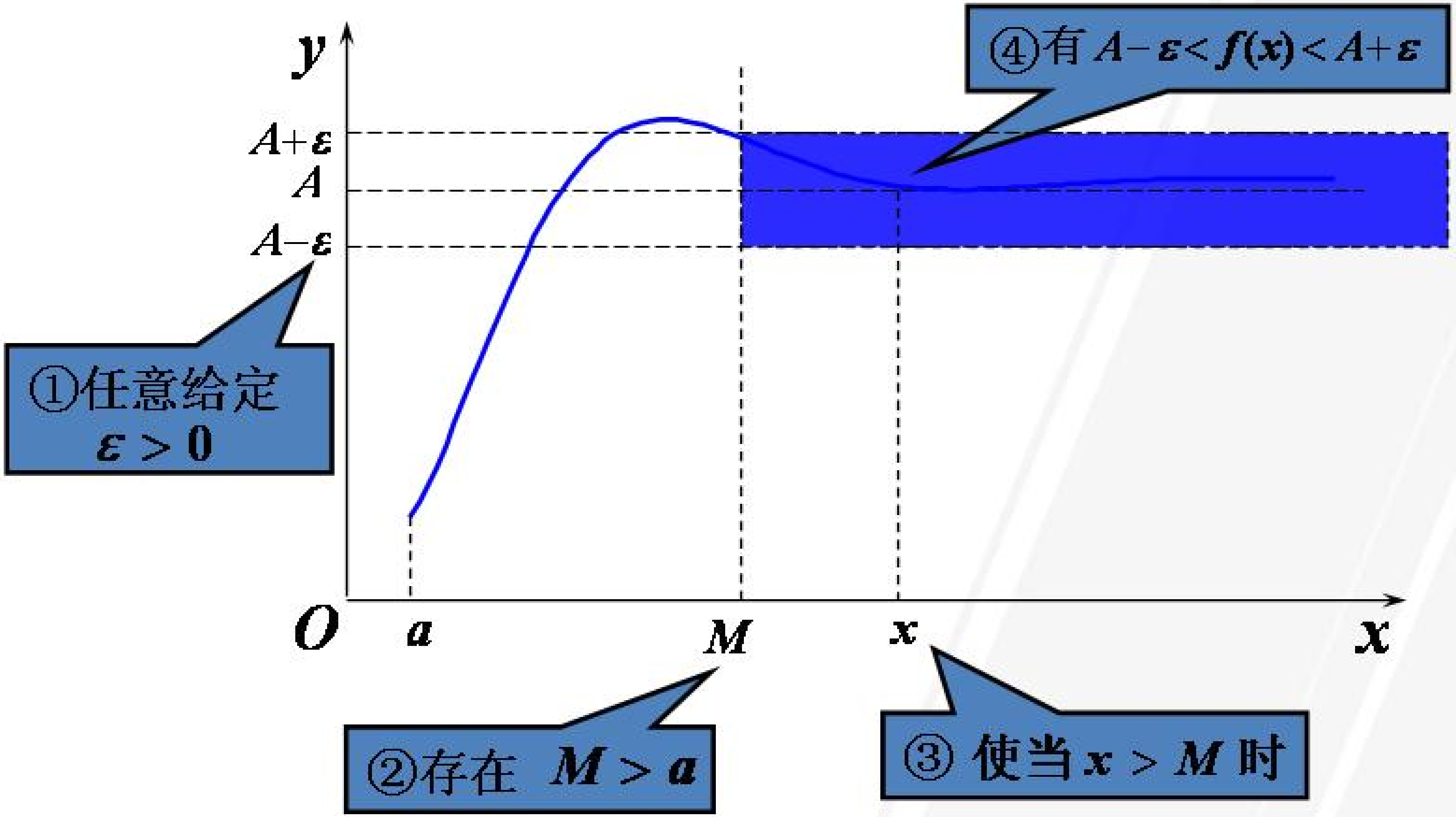
$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 当 x 趋于 $+\infty$时以 A 为极限.

记为

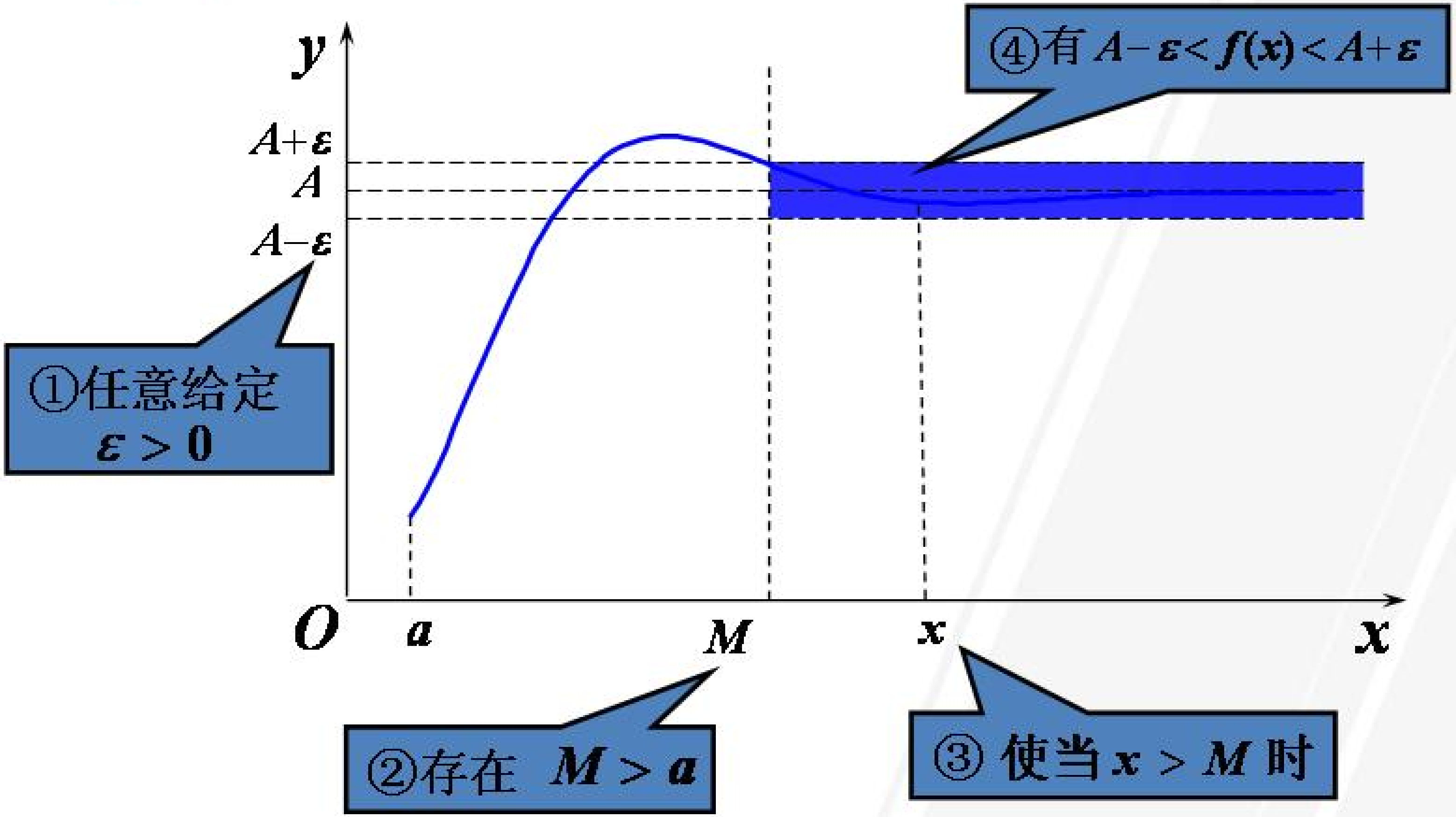
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad 或者 \quad f(x)\to A \ (x\to+\infty).$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 的几何意义



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$的几何意义

ε更小



注 数列可视为定义在正整数集上的函数. 请大家比较数列极限定义与函数极限定义之间的相同点与不同点.

例1 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0.$

证 任给 $\varepsilon>0$, 取 $M=\dfrac{1}{\varepsilon}$, 当 $x>M$ 时,

$$|f(x)-0|=\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon,$$

所以(由定义1),

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

例2 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}.$

证 任给 $\varepsilon > 0\,(\varepsilon < \dfrac{\pi}{2})$, 取 $M = \tan(\dfrac{\pi}{2} - \varepsilon)$.

因为 $\arctan x$ 严格增, 当 $x > M$ 时,

$$\left| f(x) - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

$$< \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \varepsilon) = \varepsilon.$$

这就是说 $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}.$

定义2

设 $f(x)$定义在$(-\infty,b]$上，A是一个常数 .
若对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $M>0$，当 $x<-M(<b)$ 时

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时以 A 为极限，
记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$$

或 $f(x)\to A\ (x\to-\infty)$.

定义3

设 $f(x)$定义在∞的某个邻域 $U(\infty)$内，A是一个常数. 若对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $M>0$, 当$|x|>M$时

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时以 A 为极限，

记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A$$

或 $f(x)\to A\ (x\to\infty)$.

例3 证明 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0.$

证 对于任意正数 $\varepsilon\ (0<\varepsilon<1)$, 取 $M=-\ln\varepsilon$,

当 $x<-M=\ln\varepsilon$ 时

$$\left|e^x-0\right|=e^x<\varepsilon.$$

这就是说

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

例4 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x^2}=0.$

证 对于任意正数 ε, 可取$M=\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}$, 当$|x|>M$ 时, 有

$$\left|\frac{1}{1+x^2}-0\right|<\frac{1}{x^2}<\varepsilon,$$

所以结论成立.

从定义1、2 、3 不难得到:

定理3.1

$f(x)$定义在 ∞ 的一个邻域内，则

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充要条件是:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

例如 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}, \lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2},$

则由定理 3.1, $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

x趋于x_0 时的函数极限

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某空心邻域 $U^\circ(x_0)$ 内有定义.

下面我们直接给出函数 $f(x)$当 $x \to x_0$ 时以常数 A 为极限的定义.

x趋于x_0 时的函数极限

定义1

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某空心邻域 $U^{\circ}(x)$内有定义，A是一个常数. 如果对于任意正数ε, 存在正数δ, 当$x \in U^{\circ}(x_0,\delta) \subset U^{\circ}(x_0)$时,

$$|f(x)-A| < \varepsilon,$$

则称$f(x)$当 $x \to x_0$ 时以 A 为极限. 记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

或者 $f(x) \to A \ (x \to x_0)$.

例5 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}.$

分析 对于任意正数ε, 要找到$\delta>0$, 当$0<|x-1|<\delta$ 时，使

$$\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|$$

$$=\frac{\left|\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right|}{2\sqrt{2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}=\frac{|x-1|}{2\sqrt{2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})^2}<\varepsilon. \quad (*)$$

因
$$\frac{|x-1|}{2\sqrt{2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})^2}\le|x-1|,$$

只要$|x-1|<\varepsilon$, (*)式就能成立，故取$\delta=\varepsilon$即可.

证 任给正数ε, 取$\delta=\varepsilon$, 当$0<|x-1|<\delta$时,

$$\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|\le|x-1|<\varepsilon,$$

这就证明了

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

例6 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} x^2 = x_0^2$.

分析 要使

$$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0| < \varepsilon,$$

可以先限制 $|x - x_0| < 1$, 因为此时有

$$|x + x_0| = |x - x_0 + 2x_0| \le |x - x_0| + 2|x_0|$$

$$< 1 + 2|x_0|,$$

所以 $|x^2 - x_0^2| \le (1 + 2|x_0|)|x - x_0|$, 故只要

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}.$$

证 $\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{1+2|x_0|}\right\}$，当$0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|x^2-x_0^2|<\varepsilon.$$

这就证明了

$$\lim_{x\to x_0}x^2=x_0^2.$$

$$|x^2-x_0^2|\le(1+2|x_0|)|x-x_0|$$

注 在例5、例6中, 我们将所考虑的式子适当放大, 其目的就是为了更简洁地求出 δ, 或许所求出的 δ 不是“最佳”的, 但这不影响我们解题的有效性.

例7 证明:

$$(1)\ \lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0;$$

$$(2)\ \lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0.$$

证 首先，在右图所示的单位圆内，

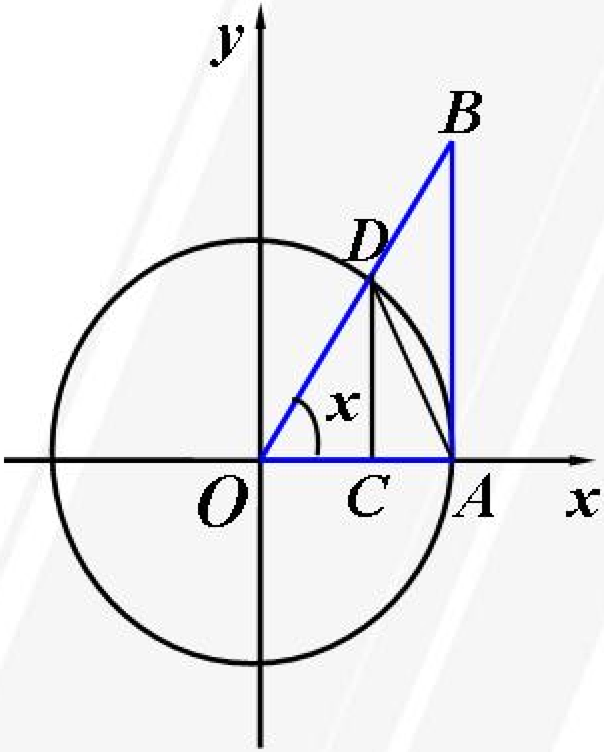
$$(1)\ \lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0;$$

当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，显然有

$$S_{\Delta OAD}<S_{扇形OAD}<S_{\Delta OAB},$$

即

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x,$$



故 $\sin x<x<\tan x\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right).$

因为当$x\ge\dfrac{\pi}{2}$时，$\sin x\le 1<x$，

故对一切$x>0$，有$\sin x<x$.

又因为 $\sin x$, x 均是奇函数, 故

$$|\sin x| \le |x|, \quad x \in \mathbf{R}.$$

上式中的等号仅在$x = 0$时成立.

对于任意正数ε, 取$\delta = \varepsilon$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right|$$

$$\le |x - x_0| < \varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$.

同理可证: $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$.

例8 证明: $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x_0^{\,2}}\ (|x_0|<1).$

证 因为

$$\left|\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x_0^{\,2}}\right|=\frac{|x-x_0||x+x_0|}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x_0^{\,2}}}$$

$$\le\frac{2|x-x_0|}{\sqrt{1-x_0^{\,2}}},$$

则 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon\sqrt{1-x_0^2}}{2}$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$$\left|\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x_0^{\,2}}\right|\le\frac{2|x-x_0|}{\sqrt{1-x_0^2}}<\varepsilon.$$

这就证明了所需的结论.

在上面例题中，需要注意以下几点：

1. 对于δ，我们强调其存在性. 换句话说，对于固定的ε，不同的方法会得出不同的δ，不存在哪一个更好的问题.

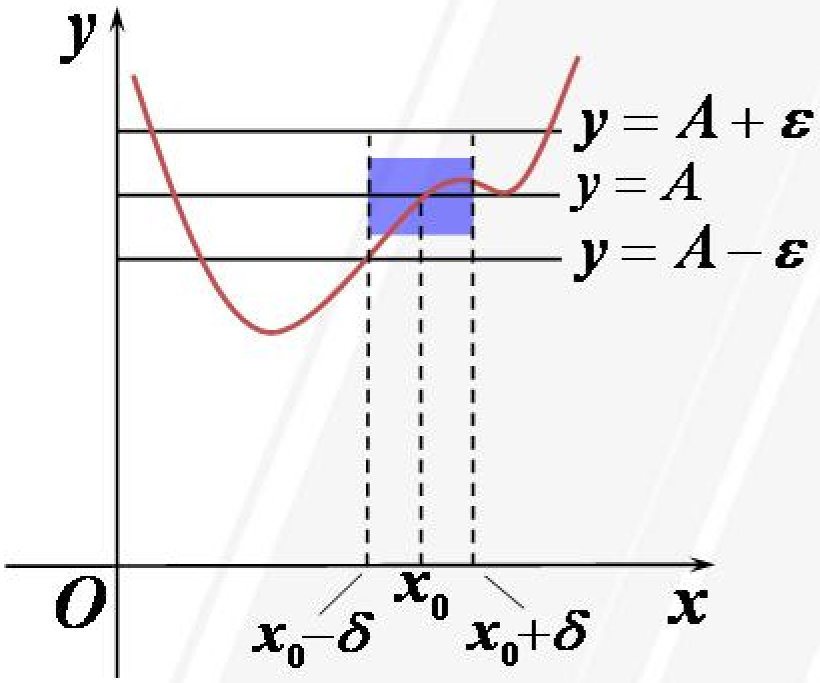
2. δ是不惟一的，一旦求出了δ，那么比它更小的正数都可以充当这个角色.

3. 正数ε是任意的，一旦给出，它就是确定的常数. 有时为了方便，需要让ε小于某个正数. 一旦对这样的ε能找到相应的δ，那么比它大的ε，这个δ当然也能满足要求.

4. 函数极限的几何意义如图, 任给 $\varepsilon > 0$, 对于坐标平面上以 $y = A$ 为中心线, 宽为 2ε 的窄带,可以找到 $\delta > 0$, 使得曲线段

$$y = f(x),\ x \in U^{\circ}(x_0, \delta)$$

落在窄带内.



单侧极限

在考虑 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 时，x 既可以从 x_0 的左侧 $(x < x_0)$ 又可以从 x_0 的右侧 $(x > x_0)$ 趋向于 x_0. 但在某些时候,我们仅需(仅能)在 x_0 的某一侧来考虑，比如函数在定义区间的端点和分段函数的分界点等.

定义5

设 $f(x)$ 在 $U_+^\circ(x_0,\eta)$ ($U_-^\circ(x_0,\eta)$)有定义, A 为常数. 若对于任意正数 ε ,存在正数 δ ($\delta<\eta$), 当 $0<x-x_0<\delta$ ($0<x_0-x<\delta$)时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为函数 f 当 $x\to x_0^+$ ($x\to x_0^-$) 时的右(左)极限, 记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \ \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A\right).$$

右极限与左极限统称为单侧极限. 为了方便起见, 有时记

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+} f(x),\ \ f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

例7 讨论函数$\sqrt{1-x^2}$在$x=\pm 1$处的单侧极限.

解 因为$|x|\le 1,\ 1-x^2=(1+x)(1-x)\le 2(1-x)$,

所以$\forall \varepsilon>0$, 取$\delta=\dfrac{\varepsilon^2}{2}$, 当$1-\delta<x<1$时, 有

$$\left|\sqrt{1-x^2}-0\right|<\varepsilon.$$

这就证明了$\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{1-x^2}=0.$

同理可证$\lim\limits_{x\to -1^+}\sqrt{1-x^2}=0.$

由定义3.4和定义3.5，我们不难得到：

定理3.1′

设 $f(x)$ 在 $U^\circ(x_0)$ 有定义，则

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A.$$

注　试比较定理 3.1 与定理 3.1′.

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}x=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}x=-1$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}x$ 不存在.

例9 证明狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x=\text{有理数}\\ 0, & x=\text{无理数}\end{cases}$$

处处无极限.

证 对于任意的$x_0\in R$,以及任意实数A, 取$\varepsilon_0=\frac{1}{2}$.

对于任意的$\delta>0$, 若$|A|\geq\frac{1}{2}$, 取$x^*\in R-Q$, 满足

$$0<|x^*-x_0|<\delta,$$

则有

$$|D(x^*)-A|=|A|\geq\frac{1}{2}=\varepsilon_0.$$

若$|A|\leq\frac{1}{2}$, 取$x^*\in Q$, 满足$0<|x^*-x_0|<\delta$, 也有

$$|D(x^*)-A|=|1-A|\geq\frac{1}{2}=\varepsilon_0.$$

证毕.

例10 对于黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\ \ (p,q)=1,\\ 0, & x=\text{无理数以及}0,1\end{cases}.$$

证明: $\forall x_0\in(0,1),\ \lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0.$

证 $\forall \varepsilon>0$, 取一正整数 N, 使 $\dfrac{1}{N}<\varepsilon.$

因为在 $(0, 1)$ 中分母小于 N 的有理数至多只有

$K=\dfrac{N(N-1)}{2}$ 个，故可设这些有理数为

$$x_1,x_2,\cdots,x_n\ \ (n\le K).$$

这就是说，除了这 n 个点外，其他点的函数值都小于 ε. 所以

(1) 若 x_0 是 $x_1,\cdots,x_n$ 中的某一个，可设 $x_0 = x_i$，取 $\delta = \min\limits_{1\le k\le n,\ k\ne i}\{|x_k - x_0|\}$；

(2) 若 $x_0 \notin \{x_1,\cdots,x_n\}$，则取 $\delta = \min\limits_{1\le k\le n}\{|x_k - x_0|\}$.

于是，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对以上两种情形都有

$$|R(x)-0|<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to x_0} R(x)=0$.

注 有兴趣的读者可以证明:

$$\lim_{x\to 0^+} R(x) = \lim_{x\to 1^-} R(x) = 0.$$

复习思考题

我们已经知道，狄利克雷函数在每点都无极限. 能否构造一个函数，它仅在 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 处有极限.