

## 数学分析 第一章 实数集与函数

“学过数列极限概念后，自然会产生两个问题：一是怎么知道一个数列是收敛的？即极限的存在性问题；二是如何计算数列的极限？其中，判断数列是否收敛，这在极限理论中占有非常重要的地位。

### §3 数列极限存在的条件

- 一、单调有界定理
- 二、柯西收敛准则

\*点击以上标题可直接前往对应内容

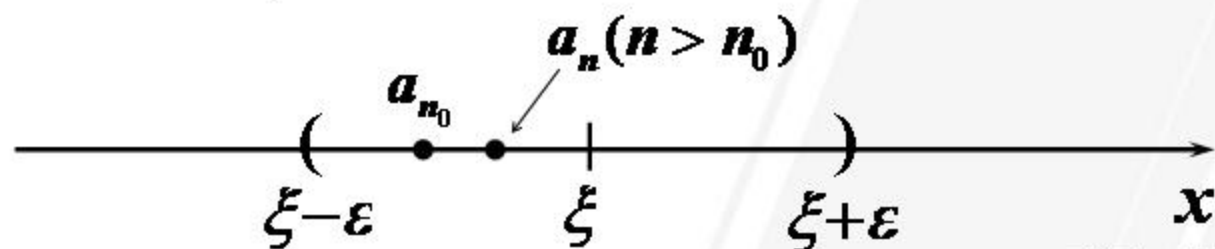
# 单调有界定理

## ① 定理2.9

单调有界数列必有极限.

**证** 该命题的几何意义是十分明显的.

不妨设  $\{a_n\}$  单调增, 有上界. 由确界定理, 存在  $\sup\{a_n\} = \xi$ . 由上确界的定义, 对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $a_{n_0}$ , 使  $a_{n_0} > \xi - \varepsilon$ . 故当  $n > n_0 (= N)$  时,



后退 前进 目录 退出



$$\xi - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq \xi < \xi + \varepsilon,$$

这就证明了  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi$ .

**例1** 设  $a_1 = \sqrt{2}, \dots, a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_n, \dots,$   
求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**解** 显然  $a_n > 0$ . 因  $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ , 故  $a_2 > a_1$ ; 设  
 $a_n > a_{n-1}$ , 则有

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sqrt{2 + a_n} - \sqrt{2 + a_{n-1}} \\ &= \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{2 + a_n} + \sqrt{2 + a_{n-1}}} > 0, \end{aligned}$$



所以  $\{a_n\}$  递增. 下面再来证明此数列有上界.

显然,  $a_1 = \sqrt{2} < 2$ , 设  $a_n < 2$ , 则

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + 2} = 2.$$

由此得到  $\{a_n\}$  有上界 2, 故极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  存在.

于是由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + a_n}$ , 可得

$$A^2 = 2 + A, \text{ 并解出 } A = 2, A = -1.$$

由极限的不等式性, 知道  $A > 0$ , 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2.$$



**例2** 下面的叙述错在哪儿？

“设  $a_n = 2^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 则

$$a_{n+1} = 2^{n+1} = 2a_n.$$

因为显然有  $a_n > 0$ , 所以  $\{a_n\}$  递增. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ,

从而得出

$$A = 2A \Rightarrow A = 0,$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = 0.$ ”



以前知道圆周率  $\pi$  是一个重要的无理数, 现在来介绍另一个重要的无理数  $e$ .

考察数列  $\{e_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$  的收敛性.

利用二项式展开, 得

$$\begin{aligned} e_n &= 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{n!} \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right), \end{aligned} \quad (1)$$



$$\begin{aligned}
 e_{n+1} = & 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \\
 & + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \\
 & + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).
 \end{aligned}$$

把 $e_n$ 和 $e_{n+1}$ 的展开式作比较就可发现, $e_n$ 的展开式有 $n+1$ 项,其中的每一项都比 $e_{n+1}$ 的展开式的前 $n+1$ 项中对应项小,而 $e_{n+1}$ 的最后一项大于零,因此  $e_n < e_{n+1}$ ,  $n=1,2,\dots$ . 从而 $\{e_n\}$ 是单调增数列,且



$$e_n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}. \quad (2)$$

由此  $e_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$

这就证明了  $\{e_n\}$  又是有界数列. 于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n$  存在.

记此极限为  $e$ , 即

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

---


$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right), \quad (1)$$



\*例3 设  $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ ,  $n = 1, 2, \cdots$ ,

证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = e$ .

证 显然  $\{s_n\}$  是单调增数列, 且由例2中的(2)式,

$$\begin{aligned} e_n &\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &= s_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3, \end{aligned}$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  存在且由极限的保不等式性,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

又对任意  $n > m$ ,



$$\begin{aligned}
 e_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \\
 &\quad + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\
 &> 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \\
 &\quad + \cdots + \frac{1}{m!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right),
 \end{aligned}$$

因此,在上式中两边令  $n \rightarrow \infty$ , 得

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!} = s_m.$$

当  $m \rightarrow \infty$  时,由极限的保不等式性,  $e \geq \lim_{m \rightarrow \infty} s_m$ .



从而

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right).$$

由公式  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right)$ , 可以较快地算出  $e$  的近似值.

由于  $0 < s_{n+m} - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!}$ ,

令  $m \rightarrow \infty$ , 得到  $0 < e - s_n \leq \frac{1}{n!n}, n = 1, 2, \cdots$ .

取  $n = 10$ ,  $e \approx s_{10} \approx 2.7182818$ , 其误差

$$0 < e - s_{10} \leq \frac{1}{10 \cdot 10!} < 10^{-7}.$$



**例4** 设  $S$  是有界数集. 证明: 若  $\sup S = a \notin S$ , 则存在严格单调增数列  $\{x_n\} \subset S$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

**证** 因  $a$  是  $S$  的上确界, 故对  $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in S$ , 使得  $x > a - \varepsilon$ . 又因  $a \notin S$ , 故  $x < a$ , 从而有

$$a - \varepsilon < x < a.$$

现取  $\varepsilon_1 = 1$ , 则  $\exists x_1 \in S$ , 使得

$$a - \varepsilon_1 < x_1 < a.$$

再取  $\varepsilon_2 = \min\{\frac{1}{2}, a - x_1\}$ , 则  $\exists x_2 \in S$ , 使得

$$a - \varepsilon_2 < x_2 < a,$$

且有  $x_2 > a - \varepsilon_2 \geq a - (a - x_1) = x_1$ .



一般地,按上述步骤得到  $x_{n-1}$  之后,取

$$\varepsilon_n = \min\left\{\frac{1}{n}, a - x_{n-1}\right\},$$

则存在  $x_n \in S$ ,使得

$$a - \varepsilon_n < x_n < a,$$

且有  $x_n > a - \varepsilon_n \geq a - (a - x_{n-1}) = x_{n-1}$ .

于是得到数列  $\{x_n\} \subset S$ ,它是严格单调的,满足

$$a - \varepsilon_n < x_n < a,$$

因此,  $|x_n - a| < \varepsilon_n \leq \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$ .

这就证明了  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .



**例5** 任何数列都存在单调子列.

**证** 设数列为  $\{a_n\}$ , 下面分两种情况进行讨论:

1. 若对任何正整数  $k$ , 数列  $\{a_{k+n}\}$  有最大项. 设  $\{a_{1+n}\}$  的最大项为  $a_{n_1}$ . 因为  $\{a_{n_1+n}\}$  亦有最大项, 设其最大项为  $a_{n_2}$ . 显然有  $n_2 > n_1$ , 且因为  $\{a_{n_1+n}\}$  是  $\{a_{1+n}\}$  的一个子列, 故

$$a_{n_2} \leq a_{n_1};$$

同理存在  $n_3 > n_2$ , 使得

$$a_{n_3} \leq a_{n_2};$$

.....

这样得到了一个单调递减的子列  $\{a_{n_k}\}$ .



2. 至少存在某个正整数 $k$ , 数列 $\{a_{k+n}\}$ 没有最大项.

先取 $n_1 = k + 1$ , 因为 $\{a_{k+n}\}$ 没有最大项, 故 $a_{n_1}$ 后面总存在 $a_{n_2}$  ( $n_2 > n_1$ ), 使得

$$a_{n_2} > a_{n_1};$$

同理存在 $a_{n_2}$ 后面的项 $a_{n_3}$  ( $n_3 > n_2$ ), 使得

$$a_{n_3} > a_{n_2};$$

.....

这样得到了一个单调递增的子列 $\{a_{n_k}\}$ .



**i** 定理2.10 (致密性定理)

任何有界数列必有收敛子列.

**证** 设数列 $\{a_n\}$ 有界,由例5可得有一个单调子列 $\{a_{n_k}\}$ .

显然 $\{a_{n_k}\}$ 是有界的,再由单调有界定理推得 $\{a_{n_k}\}$ 收敛.

# 柯西收敛准则

## i 定理2.11

数列  $\{a_n\}$  收敛的充要条件是:

对于任意正数  $\varepsilon$ , 存在  $N > 0$ , 当  $n, m > N$  时, 有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

柯西准则的充要条件可用另一

种形式表达为:  $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$

当  $n > N$  时, 对任意  $p \in \mathbf{N}_+$ , 都有

$$|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon.$$

满足上述条件的数列称为柯西列.



柯西 (Cauchy, A.L.  
1789—1857, 法国)



**证（充分性）** 先证明数列有界. 取  $\varepsilon_0 = 1$ , 因为  $\{a_n\}$  是柯西列, 所以存在  $N_0$ ,  $n > N_0$  时有

$$|a_n - a_{N_0+1}| < 1.$$

令  $M = \max\{|a_1|, \dots, |a_{N_0}|, |a_{N_0+1}| + 1\}$ , 则对一切  $n$  有  $|a_n| \leq M$ .

由致密性定理,  $\{a_n\}$  有收敛子列  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \xi$ . 由条件, 对

任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N$ , 当  $n, m > N$  时有  $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

在上式中取  $a_m = a_{n_k}$ ,  $k$  充分大时, 有  $n_k > N$ , 令  $k \rightarrow \infty$

$$|a_n - \xi| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

即数列  $\{a_n\}$  收敛.



**(必要性)** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ . 由极限定义,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  
 $\exists N > 0$ , 当  $n, m > N$  (或  $n, m \geq N$ ) 时, 有

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由此推得

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &\leq |a_n - A| + |a_m - A| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$



例7 设  $x_n = \frac{\sin 1}{2^1} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

证明  $\{x_n\}$  收敛.

证  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N = \frac{-\log \varepsilon}{\log 2}$ , 当  $n > m > N$  时, 有

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \left| \frac{\sin(m+1)}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n} \right| \\ &\leq \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{m+1}} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-m-1}} \right) \\ &= \frac{2}{2^{m+1}} \left( 1 - \frac{1}{2^{n-m}} \right) \leq \frac{1}{2^m} < \varepsilon \Rightarrow \{x_n\} \text{ 收敛.} \end{aligned}$$



**例6** 设  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \cdots$ . 证明  $\{x_n\}$  发散.

**证** 取  $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ ,  $\forall N > 0$ ,  $\exists n_0 = N$ ,  $m_0 = 2N$ , 使得

$$\begin{aligned} |x_{n_0} - x_{m_0}| &= \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{2N} \\ &\geq \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \cdots + \frac{1}{2N} \\ &= \frac{1}{2} = \varepsilon_0. \end{aligned}$$

由柯西收敛准则的否定陈述, 可知  $\{x_n\}$  发散.



**例8** 设数列满足条件： $|a_{n+1} - a_n| < r^n, n = 1, 2, \dots$ ，其中  $r \in (0, 1)$ . 证明  $\{a_n\}$  收敛.

**证** 若  $n < m$ , 则

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &\leq |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_{n+2}| + \dots + |a_{m-1} - a_m| \\ &\leq r^n + r^{n+1} + \dots + r^{m-1} = \frac{r^n - r^m}{1-r} < \frac{r^n}{1-r}. \end{aligned}$$

由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1-r} = 0$ , 于是  $\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N, \left| \frac{r^n}{1-r} \right| < \varepsilon$ .

若  $m > n > N$ , 也有

$$|a_n - a_m| \leq \left| \frac{r^n}{1-r} \right| < \varepsilon.$$

由柯西准则,  $\{a_n\}$  收敛.



**注** 柯西收敛准则的意义在于：可以根据数列通项本身的特征来判断该数列是否收敛，而不必依赖于极限定义中的那个极限值  $A$ 。这一特点在理论上特别有用，大家将会逐渐体会到它的重要性。



# 复习思考题



1. 对于数列是否收敛的各种判别法加以总结.
2. 试给出 $\{a_n\}$ 不是柯西列的正面陈述.

