数学分析 第二章
数列极限

§2 收敛数列的性质

本节首先考察收敛数列这个新概念有哪些优良性质，然后学习怎样运用这些性质.

*点击以上标题可直接前往对应内容

惟一性

定理2.2

若 $\{a_n\}$ 收敛, 则它只有一个极限.

证 设 a 是 $\{a_n\}$ 的一个极限. 下面证明对于任何定数 $b \neq a$, b 不能是 $\{a_n\}$ 的极限.

若 a, b 都是 $\{a_n\}$ 的极限, 则对于任何正数 $\varepsilon>0$, $\exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, 有

$$|a_n - a| < \varepsilon; \qquad (1)$$

$\exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时, 有

$$|a_n - b| < \varepsilon. \qquad (2)$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时 (1), (2)同时成立,

从而有

$$|a - b| \le |a_n - a| + |a_n - b| < 2\varepsilon.$$

因为 ε 是任意的，所以 $a = b$.

有界性

定理2.3

若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 为有界数列,
即存在 $M>0$, 使得 $|a_n|\le M$, $n=1, 2,\cdots$.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 对于正数 $\varepsilon=1$, $\exists N$, $n>N$时, 有

$$|a_n-a|<1, \text{ 即 } a-1<a_n<a+1.$$

若令 $M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,|a-1|,|a+1|\}$,

则对一切正整数 n, 都有 $|a_n|\le M$.

注 数列 $\{(-1)^n\}$ 是有界的, 但却不收敛. 这就说明有界只是数列收敛的必要条件, 而不是充分条件.

保号性

定理2.4

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，对于任意两个实数 b, c，$b < a < c$，存在 N，当 $n > N$ 时，$b < a_n < c$.

证 取 $\varepsilon = \min\{a-b, c-a\} > 0$，$\exists N$，当 $n > N$ 时，

$$b \le a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \le c, \text{ 即 } b < a_n < c.$$

注 若 $a > 0$（或 $a < 0$），我们可取 $b = \dfrac{a}{2}$（或 $c = \dfrac{a}{2}$），则 $a_n > \dfrac{a}{2} > 0$（或 $a_n < \dfrac{a}{2} < 0$）.

这也是称该定理为保号性定理的原因.

例1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$

证 对任意正数 ε，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1/\varepsilon)^n}{n!}=0$， 所以由

定理 2.4，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，

$$\frac{(1/\varepsilon)^n}{n!}<1,\ \text{即}\ \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$

保不等式性

定理2.5

设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均为收敛数列，如果存在正数 N_0，当 $n>N_0$ 时，有 $a_n\le b_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. 若 $b<a$，取 $\varepsilon=\dfrac{a-b}{2}$，

由保号性定理，存在 $N>N_0$，当 $n>N$ 时，

$$a_n>a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2},\quad b_n<b+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2},$$

故 $a_n>b_n$，导致矛盾. 所以 $a\le b$.

注 若将定理 2.5 中的条件 $a_n \le b_n$ 改为 $a_n < b_n$,

也只能得到 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

这就是说, 即使条件是严格不等式, 结论却不一定是严格不等式.

例如, 虽然 $\dfrac{1}{n} < \dfrac{2}{n}$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} = 0$.

迫敛性 (夹逼原理)

定理2.6

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都以 a 为极限, 数列 $\{c_n\}$ 满足:

存在 N_0, 当 $n > N_0$ 时, 有 $a_n \le c_n \le b_n$, 则

$$\{c_n\} \text{ 收敛, 且 } \lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

证 对任意正数 ε, 因为 $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, 所以分别存在 N_1, N_2, 使得当 $n > N_1$ 时, $a - \varepsilon < a_n$;

当 $n > N_2$ 时, $b_n < a + \varepsilon$. 取 $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$,

当 $n > N$ 时, $a - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < a + \varepsilon$.

这就证得: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a.$

例2 求数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的极限.

解 设$h_n=\sqrt[n]{n}-1\geq 0$, 则有

$$n=(1+h_n)^n\geq\frac{n(n-1)}{2}h_n^2\quad(n\geq 2),$$

故 $1\leq\sqrt[n]{n}=1+h_n\leq 1+\sqrt{\frac{2}{n-1}}$. 又因

$$\lim_{n\to\infty}1=\lim_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)=1,$$

所以由迫敛性，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

四则运算法则

定理2.7

若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 为收敛数列，则 $\{a_n+b_n\}$, $\{a_n-b_n\}$, $\{a_n\cdot b_n\}$ 也都是收敛数列，且有

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$，当 b_n 为常数 c 时，

$\lim\limits_{n\to\infty} cb_n = c\lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

(3) 若 $b_n\neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$，则 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 也收敛，且

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty} a_n \Big/ \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

证明 (1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 N，

当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$, $|b_n - b| < \varepsilon$, 所以

$$|a_n \pm b_n - (a \pm b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon,$$

由 ε 的任意性, 得到

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n.$$

证明 (2) 因$\{b_n\}$收敛，故$\{b_n\}$有界，设$|b_n| \le M$.

对于任意 $\varepsilon > 0$, 当$n > N$时, 有

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{M+1}, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{|a|+1},$$

于是 $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab|$

$$\le |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b| < 2\varepsilon,$$

由ε的任意性，证得

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n.$$

证明 (3) 因为 $\dfrac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \dfrac{1}{b_n}$, 由(2), 只要证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

由于 $b \neq 0$, 据保号性, $\exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时,

$$|b_n| > \frac{|b|}{2}.$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $\exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时,

$$|b_n - b| < \frac{|b|^2}{2}\varepsilon,$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|=\left|\frac{b_n-b}{b_nb}\right|\le\frac{2}{|b|^2}|b_n-b|\le\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{b}$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$.

$$\frac{1}{|b_n|}<\frac{2}{|b|}.\qquad |b_n-b|<\frac{|b|^2}{2}\varepsilon,$$

一些例子

例3 用四则运算法则计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1 n + b_0},$$

其中 $m \le k,\ a_m b_k \ne 0.$

解 依据 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=0\ (\alpha>0)$, 分别得出:

(1) 当 $m=k$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1 n + b_0}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_m+a_{m-1}\frac{1}{n}+\cdots+a_1\frac{1}{n^{m-1}}+a_0\frac{1}{n^m}}{b_m+b_{m-1}\frac{1}{n}+\cdots+b_1\frac{1}{n^{m-1}}+b_0\frac{1}{n^m}}=\frac{a_m}{b_m}.$$

(2) 当 $m<k$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m+a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1 n+a_0}{b_k n^k+b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1 n+b_0}=0$$

所以

$$\text{原式}=\begin{cases}\dfrac{a_m}{b_m}, & m=k,\\ 0, & m<k.\end{cases}$$

例4 设 $a_n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

证 由于$a_n \geq 0$, 根据极限的保不等式性, 有$a \geq 0$.

对于任意$\varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$. 于是可得:

(1) $a = 0$ 时, 有 $|\sqrt{a_n} - 0| = \sqrt{a_n} < \sqrt{\varepsilon}$;

(2) $a > 0$ 时, 有

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}}.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ 得证.

例5 设 $a_n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

证 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, 根据极限的保号性, 存在 N, 当 $n>N$ 时, 有 $\dfrac{a}{2} < a_n < \dfrac{3a}{2}$, 即

$$\sqrt[n]{\frac{a}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3a}{2}}.$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{a}{2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3a}{2}} = 1$, 所以由极限的迫敛性, 证得 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

例6 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}\ (a\neq -1)$.

解 (1) $|a|<1$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=0$，所以由极限四则运算法则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a^n}{1+\lim\limits_{n\to\infty} a^n}=0$.

(2) $a=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

(3) $|a|>1$，因 $\lim\limits_{n\to\infty}(1/a^n)=0$，故得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/a^n}=\frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}(1/a^n)}=1.$$

例7 设 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为 m 个正数, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}.$$

证 设 $a = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$. 由

$$a \le \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \le \sqrt[n]{m}\, a,$$

与
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}\, a = \lim_{n\to\infty} a = a,$$

以及极限的迫敛性，得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = a = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}.$$

定义1

设 $\{a_n\}$ 为数列, $\{n_k\}$为$\mathbf{N}_+$的无限子集, 且

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots,$$

则数列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

称为 $\{a_n\}$ 的子列, 简记为 $\{a_{n_k}\}$.

注　由定义, $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ 的各项均选自 $\{a_n\}$, 且保持这些项在 $\{a_n\}$ 中的先后次序. $\{a_{n_k}\}$ 中的第 k 项是 $\{a_n\}$ 中的第 n_k 项, 故总有 $n_k \ge k$.

定理2.8

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是 $\{a_n\}$ 的任意子列 $\{a_{n_k}\}$ 都收敛.

证（充分性）因为$\{a_n\}$也是本身的一个子列，所以充分性显然成立.

（必要性）设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当$n > N$时, $|a_n - a| < \varepsilon$. 设 $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的任意一个子列. 因 $n_k \geq k$, 故$k > N$ 时, $n_k \geq k > N$, 也有 $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. 这就证明了

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

注 由定理 2.8 可知, 若一个数列的两个子列收敛于不同的值, 则此数列必发散.

例8 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a.$

证 (必要性) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N$ 时,

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

因为$2n > N, 2n-1 \geq N$,所以

$$|a_{2n-1} - a| < \varepsilon,\quad |a_{2n} - a| < \varepsilon.$$

(充分性) 设 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a$，则 $\forall \varepsilon > 0, \exists K$,

当 $k > K$ 时，$|a_{2k-1} - a| < \varepsilon$，$|a_{2k} - a| < \varepsilon$.

令 $N = 2K$, 当 $n > N$ 时，有 $|a_n - a| < \varepsilon$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

例9 若 $a_n=(-1)^n(1-\frac{1}{n})$. 证明数列 $\{a_n\}$ 发散.

解 显然

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1}=\lim_{k\to\infty}-(1-\frac{1}{2k-1})=-1;$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k}=\lim_{k\to\infty}(1-\frac{1}{2k})=1.$$

因此，数列 $\{a_n\}$ 发散.

复习思考题

1. 极限的保号性与保不等式性有什么不同?

2. 仿效例题5的证法, 证明: 若$\{a_n\}$为正有界数列, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n}=\sup\{a_n\}.$$