数学分析 第二章
数列极限

“数列极限是整个数学分析最重要的基础之一，它不仅与函数极限密切相关，而且为今后学习级数理论提供了极为丰富的准备知识.

§1 数列极限的概念

一、数列的定义

二、一个经典的例子

三、收敛数列的定义

四、按定义验证极限

五、再论“ε-N”定义

六、一些例子

*点击以上标题可直接前往对应内容

数列的定义

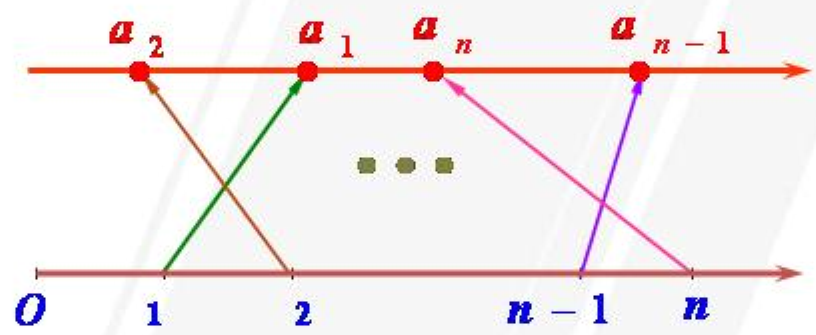
若函数 f 的定义域为全体正整数的集合 $\mathbf{N}_+$，则称

$$f:\mathbf{N}_+\to\mathbf{R} \text{ 或 } f(n),\ n\in\mathbf{N}_+$$

为数列. 因为$\mathbf{N}_+$的所有元素可以从小到大排列出来，所以我们也将数列写成

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots,$$

或简记为 $\{a_n\}$. 这里 a_n 称为数列 $\{a_n\}$ 的通项.



一个经典的例子

古代哲学家庄周所著的《庄子·天下篇》引用了一句话:“一尺之棰,日取其半,万世不竭”. 它的意思是:一根长为一尺的木棒,每天截下一半,这样的过程可以无限制地进行下去.

我们把每天截下部分 (或剩下部分) 的长度列出:

第一天截下 $\frac{1}{2}$, 第二天截下 $\frac{1}{2^2}, \cdots$, 第n天截下 $\frac{1}{2^n}, \cdots$.

这样就得到一个数列:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots, \text{或} \left\{\frac{1}{2^n}\right\}.$$

其通项$\frac{1}{2^n}$随着 n 的无限增大而无限趋于 0 .

收敛数列的定义

一般地说，对于数列 $\{a_n\}$，若当 n 无限增大时，a_n 能无限地接近某个常数 a，则称 $\{a_n\}$ 收敛于 a.

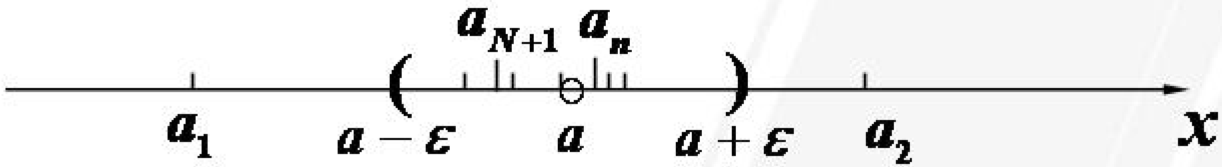
定义1

设 $\{a_n\}$ 为一个数列，a 为一个常数，若对于任意的正数 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，使当 $n>N$ 时，

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，又称 a 为数列 $\{a_n\}$ 的极限.

记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$（或 $a_n\to a,\ n\to\infty$）.



若$\{a_n\}$不收敛，则称$\{a_n\}$为发散数列.

注 定义1 这种陈述方式，通常称为“ε - N”定义.

按定义验证极限

为了加深对数列收敛定义的了解, 下面结合例题加以说明.

例1 用定义验证: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0.$

分析 对于任意正数 ε, 要使 $\left|\dfrac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$, 只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

证 对于任意 $\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, 当 $n>N$ 时, 有

$\left|\dfrac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0.$

例2 用定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (0<|q|<1).$

分析 对于任意的正数 ε，要使 $|q^n - 0| < \varepsilon$，只要

$$n > \frac{\log \varepsilon}{\log|q|}$$ 即可.

证 $\forall \varepsilon > 0$(不妨设 $0<\varepsilon<1$)，取 $N = \left[\dfrac{\log\varepsilon}{\log|q|}\right]$，

当 $n>N$ 时，有

$$|q^n - 0| < \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0.$

例3 用定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{3n^2-n-7}=\dfrac{1}{3}$.

分析 任给 $\varepsilon>0$, 由

$$\left|\frac{n^2}{3n^2-n-7}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{n+7}{3(3n^2-n-7)}\right|,$$

当 $n\geq 7$ 时, $n+7\leq 2n$, $3n^2-n-7\geq 3n^2-2n\geq 2n^2$,

故要使 $\left|\dfrac{n+7}{3(3n^2-n-7)}\right|\leq\dfrac{2n}{6n^2}=\dfrac{1}{3n}<\varepsilon$ 成立,

只要 $n>\dfrac{1}{3\varepsilon}$ 即可.

注意 解这个不等式是在 $n\geq 7$ 的条件下进行的.

证 对于任意的正数 ε，取 $N=\max\left\{7,\left[\frac{1}{3\varepsilon}\right]\right\}$,

当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{n^2}{3n^2-n-7}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n^2-n-7}=\frac{1}{3}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n^2-n-7}=\frac{1}{3}.$$

例4 用定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, 其中 $a>0$.

证 这里只验证 $a>1$ 的情形（$0<a<1$ 时自证）.

设 $\alpha_n=a^{\frac{1}{n}}-1$. 因为 $a=(1+\alpha_n)^n\geq 1+n\alpha_n$, 所以

$$\alpha_n=\sqrt[n]{a}-1\leq\frac{a-1}{n}$$

故对于任意正数 ε, 取 $N=\left[\dfrac{a-1}{\varepsilon}\right]$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon.$$

因此证得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

再论 “ε - N” 定义

从定义及上面的例题我们可以看出:

1. ε 的任意性: 定义中的 ε 用来刻画数列 $\{a_n\}$ 的通项与定数 a 的接近程度. 显然正数 ε 愈小,表示 a_n 与 a 接近的程度愈高; ε 是任意的, 这就表示 a_n 与 a 可以任意接近.

要注意, ε 一旦给出, 在接下来计算 N 的过程中, 它暂时看作是确定不变的.

此外，又因 ε 是任意正数，所以 $2\varepsilon, 3\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}, \cdots$ 等均可看作任意正数，故定义 1 中的不等式

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

可以用 $|a_n - a| < K\varepsilon$（K 为某一正常数）来代替.

再有，我们还可以限定 ε 小于某一个正数（比如 $\varepsilon < 1$）. 事实上，对 $0 < \varepsilon < 1$ 若能验证 $\{a_n\}$ 满足定义 1，那么对 $\varepsilon \geq 1$ 自然也可以验证成立.

2. N 的相对性: 从定义1 中又可看出，随着 ε 的取值不同，N 当然也会不同．但这并不意味着 N 是由 ε 惟一确定．例如，当 $n > N$ 时，有

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

则当 $n > N_1 = 2N$ 时，对于同样的 ε，更应有

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

也就是说，在这里只是强调 N 的存在性，而不追求 N 的"最佳性".

3. 极限的几何意义

从几何上看, “$n > N$ 时有 $|a_n - a| < \varepsilon$”,实际上就是所有下标大于 N 的 a_n 全都落在邻域 $U(a;\varepsilon)$之内,而在 $U(a;\varepsilon)$ 之外, $\{a_n\}$ 至多只有有限项(N 项).

反过来, 如果对于任意正数ε, 落在 $U(a;\varepsilon)$之外至多只有有限项, 设这些项的最大下标为 N, 这就表示当 $n > N$ 时, $a_n \in U(a;\varepsilon)$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

以上是定义 1 的等价说法, 写成定义就是:

定义2

任给 $\varepsilon>0$ ，若在 $U(a;\varepsilon)$ 之外至多只有 $\{a_n\}$ 的有限多项，则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a.

这样，$\{a_n\}$ 不以 a 为极限的定义也可陈述为：存在 $\varepsilon_0>0$，使得在 $(a-\varepsilon_0, a+\varepsilon_0)$ 之外有 $\{a_n\}$ 中的无限多项.

注 $\{a_n\}$无极限（即发散）的等价定义为：

$\{a_n\}$不以任何实数 a 为极限.

4.无穷小数列和无穷大数列

定义2

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,则称 $\{a_n\}$ 为无穷小数列.

例如 $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$ 和 $\left\{\dfrac{n!}{n^n}\right\}$ 是无穷小数列.

当 $|q|<1$ 时, $\{q^n\}$ 是无穷小数列.

以下定理显然成立, 请读者自证.

定理2.1

数列$\{a_n\}$收敛于a的充要条件是:

$\{a_n - a\}$ 是无穷小数列.

定义3

设 $\{a_n\}$ 是一数列, 若对任意 $G>0$, 总存在正整数 N, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|a_n|>G$, 则称 $\{a_n\}$ 是无穷大数列, 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

若 $|a_n|>G$, 改为 $a_n>G$ 或 $a_n<-G$, 则称 $\{a_n\}$ 是正无穷大数列或负无穷大数列, 分别记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \text{或} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

一些例子

为了更好地理解“$\varepsilon - N$”定义, 再举一些例题.

例5 证明$\{(-1)^n\}$发散.

证 对于任意实数 a, 取 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$, 使$\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ 满足当 $a \le 0$ $(a \ge 0)$时, 在 $(a - \dfrac{1}{2}, a + \dfrac{1}{2})$ 之外有无限多个偶数项（奇数项）. 所以由定义1', $\{a_n\}$ 不以 a 为极限. 又因 a 是任意的, 所以$\{a_n\}$发散.

例6 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0.$

解 $|a|>1$ 时, $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\dfrac{|a|^{[|a|]+1}}{\varepsilon[|a|]!}$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|=\frac{\overbrace{|a|\cdots|a|}^{[|a|]}\;\overbrace{|a|\cdots|a|}^{n-[|a|]}}{1\cdot2\cdots[|a|][|a|+1]\cdots n}\le\frac{|a|^{[|a|]}}{[|a|]!}\cdot\frac{|a|}{n}<\varepsilon.$$

当 $0<|a|\le1$ 时, 取 $N=\dfrac{1}{\varepsilon}$, 当 $n>N$ 时, $\left|\dfrac{a^n}{n!}\right|\le\dfrac{1}{n}<\varepsilon$,

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0.$

注 这里我们将 N 取为正数，而非正整数. 实际上 N 只是表示某个时刻，保证从这一时刻以后的所有项都能使不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立即可.

例7 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{1}{n} = 0$.

证 我们用两种方法来证明.

1) 任给正数 ε，取 $N = \dfrac{1}{\varepsilon}$，当 $n > N$ 时，

$$\left|\sin\frac{1}{n} - 0\right| \le \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

2) 任给正数 ε, 限制 $\varepsilon<1$. 由

$$\left|\sin\frac{1}{n}-0\right|=\sin\frac{1}{n}<\sin(\arcsin\varepsilon)=\varepsilon,$$

可知只需取 $N=\dfrac{1}{\arcsin\varepsilon}$ 即可.

注 这里假定 $0<\varepsilon<1$ 是必要的, 否则 $\arcsin\varepsilon$ 便没有定义.

复习思考题

1. 极限定义中的“$\forall\varepsilon, \exists N$”是否可以写成“$\exists N, \forall\varepsilon$”，为什么?

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$，反之是否成立?

3*. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\sigma: N \to N$ 是一个一一映射. 请依据极限定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty} a_{\sigma(n)} = A$.