数学分析 第一章
实数集与函数

§4 具有某些特性的函数

本节将着重讨论函数的有界性、单调性、奇偶性与周期性.

一、有界函数

二、单调函数

三、奇函数与偶函数

四、周期函数

*点击以上标题可直接前往对应内容

有界函数

定义1

设 f 定义在 D 上.

若 $\exists M \in \mathbf{R}, \forall x \in D, f(x) \le M$，则称 f 在 D 上有上界；

若 $\exists L \in \mathbf{R}, \forall x \in D, f(x) \ge L$，则称 f 在 D 上有下界；

若 $\exists M \in \mathbf{R}, \forall x \in D, |f(x)| \le M$，则称 f 在 D 上有界.

易证 f 在 D 上有界 $\Leftrightarrow$ f 在 D 上既有上界又有下界

若 $\forall M \in \mathbf{R}, \exists x_0 \in D, f(x_0) > M$，则称 f 在 D 上无上界；

若 $\forall L \in \mathbf{R}, \exists x_0 \in D, f(x_0) < L$，则称 f 在 D 上无下界；

若 $\forall M \in \mathbf{R}, \exists x_0 \in D, |f(x_0)| > M$，则称 f 在 D 上无界.

例1 证明: $f(x)=\tan x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2})$上无上界,有下界.

证 取$L=0$, 则$\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}), f(x)\geq L$, 因此 f 在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 上有下界. $\forall M\in \mathbf{R}$, 取$x_0=\arctan(M+1)$, 则 $x_0\in[0,\frac{\pi}{2})$, 且$\tan x_0=M+1>M$, 因此 f 在 $[0,\frac{\pi}{2})$上无上界.

例2 设函数 $f(x), g(x)$ 是 D 上的正值有界函数.

证明： $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\} \le \sup\limits_{x\in D}\{f(x)\}\sup\limits_{x\in D}\{g(x)\}$.

证 $\forall x \in D$, 有 $0 \le f(x) \le \sup\{f(x)\}$,

$$0 \le g(x) \le \sup\{g(x)\}$$

因此 $f(x)g(x) \le \sup\{f(x)\}\sup\{g(x)\}$,

由 x 的任意性, 可知 $\sup\{f(x)\}\sup\{g(x)\}$

是 $\{f(x)g(x)\}$ 的一个上界,

因此 $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\} \le \sup\limits_{x\in D}\{f(x)\}\sup\limits_{x\in D}\{g(x)\}$.

例3 设 $f(x), g(x)$ 在 D 上有界, 证明:

$$\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\le\inf_{x\in D}\{f(x)\}+\sup_{x\in D}\{g(x)\}.$$

证 $\forall\varepsilon>0,\exists x_0\in D$, 使 $f(x_0)<\inf_{x\in D}\{f(x)\}+\varepsilon.$

又 $g(x_0)\le\sup_{x\in D}\{g(x)\}$, 故

$$f(x_0)+g(x_0)<\inf_{x\in D}\{f(x)\}+\sup_{x\in D}\{g(x)\}+\varepsilon.$$

因此

$$\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}<\inf_{x\in D}\{f(x)\}+\sup_{x\in D}\{g(x)\}+\varepsilon$$

由ε的任意性 $\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\le\inf_{x\in D}\{f(x)\}+\sup_{x\in D}\{g(x)\}.$

单调函数

定义2

设 f 是定义在 D 上的函数.

若 $\forall x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 < x_2$ 时,

(i) 有 $f(x_1) \le f(x_2)$, 则称 f 为 D 上的增函数;

特别有 $f(x_1) < f(x_2)$ 时, 称 f 为严格增函数.

(ii) 有 $f(x_1) \ge f(x_2)$, 则称 f 为 D 上的减函数;

特别有 $f(x_1) > f(x_2)$ 时, 称 f 为严格减函数.

不难知道, 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是正值严格增的, 则 $f(x)g(x)$ 也是正值严格增的.

例4 任意 $n \in \mathrm{N}_+$，$y_{2n-1} = x^{2n-1}$ 在 R 上严格增;

$y_{2n} = x^{2n}$ 在 R_+ 上严格增,在 R_- 上严格减.

证 由$y_1 = x$在R_+上为正值严格增. 可知$y_2 = y_1 y_1$在R_+上亦正值严格增 由归纳法，若已证y_n在R_+上为正值严格增，可知$y_{n+1} = y_1 y_n$在R_+上亦正值严格增.

若 $x_1 < x_2 < 0$, 则 $0 < -x_2 < -x_1$, 于是

$$(-x_2)^{2n} < (-x_1)^{2n},\ (-x_2)^{2n-1} < (-x_1)^{2n-1},$$

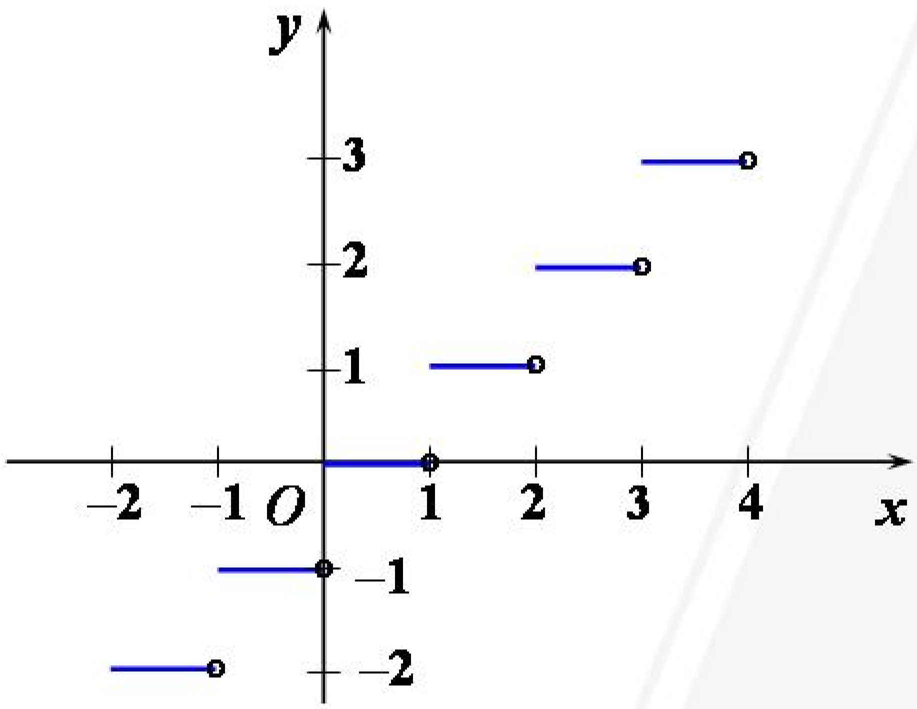
即 ${x_2}^{2n} < {x_1}^{2n}$, ${x_2}^{2n-1} > {x_1}^{2n-1}$. 这就证明了 y_{2n} 在 $\mathbf{R}_-$ 上严格减, 而 y_{2n-1} 在 $\mathbf{R}_-$ 上严格增.

若 $x_1 \le 0 < x_2$ 或 $x_1 < 0 \le x_2$, 则

$$x_1^{2n-1} \le 0 < x_2^{2n-1} \text{ 或 } x_1^{2n-1} < 0 \le x_2^{2n-1},$$

这证明了 y_{2n-1} 在 $\mathbf{R}$ 上严格增.

例5 易证函数 $y=[x]$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，但非严格增.



定理1.2

设 $y = f(x), x \in D$ 为严格增函数,则 f 必有反函数 f^{-1},且 f^{-1} 在其定义域 $f(D)$ 上也是严格增函数.

类似地, 严格减函数 f 必有反函数 f^{-1}, 且 f^{-1} 在其定义域上也是严格减函数.

证 设 f 在 D 上严格增, 则 $\forall y \in f(D)$ 只有一个 $x \in D$, 使 $f(x) = y$.

事实上, 若 $\exists x_1 < x_2$, 使 $f(x_1) = y = f(x_2)$, 则与 f

的严格增性质相矛盾. 再证 f^{-1}必是严格增的:

$$\forall\, y_1, y_2 \in f(D),\quad y_1 < y_2,$$

$$x_1 = f^{-1}(y_1),\ x_2 = f^{-1}(y_2),$$

由于 $y_1 < y_2$ 及 f 的严格增性,必有 $x_1 < x_2$, 即 $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, 因此 f^{-1}也是严格增函数.

例6 由于 $y_n = x^n$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上严格增, 因此 y_n 的反函数 $z_n = x^{1/n}$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上严格增, 故对任意有理数 $r = \dfrac{n}{m}$, $y = x^r$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上亦为严格增.

例7 证明：$y=a^x$ 当 $a>1$ 时，在 R 上严格增；当 $0<a<1$ 时，在 R 上严格减.

证 设 $a>1$. $\forall x_1, x_2,\ x_1<x_2$. 由 Q 的稠密性，$\exists r_1, r_2 \in Q$，使 $x_1<r_1<r_2<x_2$，因此

$$a^{x_1}=\sup\{a^r \mid r\in Q,\ r<x_1\}\le a^{r_1}<a^{r_2}$$

$$\le \sup\{a^r \mid r\in Q, r<x_2\}=a^{x_2}.$$

类似可证 a^x 当 $0<a<1$ 时，在 R 上严格减.

由于 $y=\log_a x$ 是 $y=a^x$ 的反函数，因此

$y=\log_a x$ 当 $a>1$ 时，在 $\mathbf{R}_+$ 上严格增；

$y=\log_a x$ 当 $0<a<1$ 时，在 $\mathbf{R}_+$ 上严格减.

奇函数和偶函数

定义1

设D关于原点对称,即:$\forall x\in D$,必有$-x\in D$.

若$\forall x\in D$, $f(-x)=-f(x)$,称f为D上的奇函数.

若$\forall x\in D$, $f(-x)=f(x)$,称f为D上的偶函数.

显然,若记$G(f)$为f的图象,则 $f(x)$是奇函数或偶函数的充要条件是:

$$(x,y)\in G(f)\Leftrightarrow(-x,-y)\in G(f);$$

或 $$(x,y)\in G(f)\Leftrightarrow(-x,y)\in G(f).$$

例如 $y=\sin x,\ y=\tan x,\ y=x^{2n+1}$ 是奇函数,

而 $y=\cos x,\ y=x^{2n}$ 是偶函数.

$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 是奇函数 $y_1=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 的反函数，从而它也是奇函数.

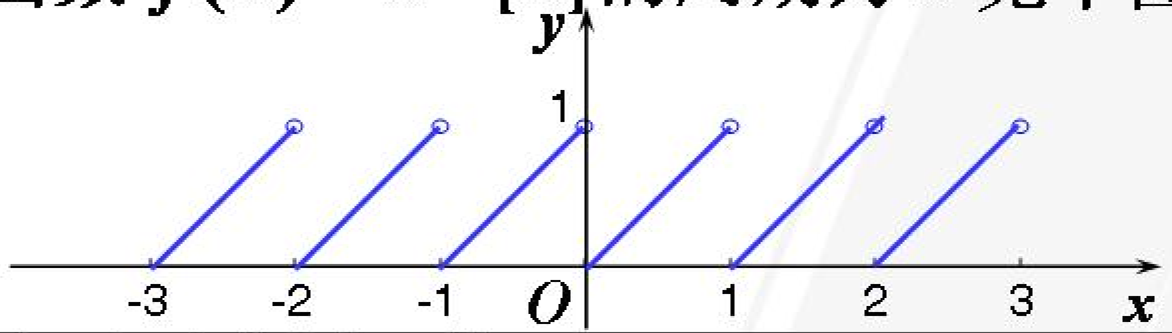
周期函数

定义4

设 f 为 D 上定义的函数. 若 $\exists\sigma > 0$, 使 $\forall x \in D$ 必有 $x \pm \sigma \in D$, 且 $f(x \pm \sigma) = f(x)$, 则称 f 为周期函数, σ 为 f 的一个周期.

若周期函数 f 的所有正周期中有一个最小的周期, 则称此最小正周期为 f 的基本周期, 简称周期.

例如函数 $f(x) = x - [x]$ 的周期为 1. 见下图.



例8 $\sin x$ 的周期为 2π， $\tan x$ 的周期为 π,

注1 周期函数的定义域不一定是R. 例如:

$$f(x)=\sqrt{\sin x}.$$

注2 周期函数不一定有最小周期. 例如狄利克雷函数以任意正有理数为周期，但没有最小周期.

例9 任意正有理数是狄利克雷函数 $D(x)$的周期.

证 设 $r\in \mathbf{Q}_{+}, x\in \mathbf{R}.$

若 $x\in \mathbf{Q}$, 则 $x+r\in \mathbf{Q}$, $D(x+r)=1=D(x)$;

若 $x\notin \mathbf{Q}$, 则 $x+r\notin \mathbf{Q}$, $D(x+r)=0=D(x)$.

因此, r 是 $D(x)$ 的一个周期.

复习思考题

1.$f(x)$在$[a,b]$上定义，是否一定存在某个区间$[a_0, b_0]\subset[a, b]$, 使$f(x)$在$[a_0, b_0]$上是单调函数？

2.构造在$[0,1]$上定义的函数$f(x)$,使其在任何$[a_0, b_0]\subset[0, 1]$上, $f(x)$无界.

3. 用肯定语句叙述下列概念：

(1) 非周期函数；(2) 非奇函数; (3) 非单调增函数.

4.两个周期函数的和函数一定是周期函数吗？