数学分析　第一章
实数集与函数

§3 函数概念

函数的概念，在中学数学中我们已有了初步的了解. 本节将作进一步的讨论.

*点击以上标题可直接前往对应内容

函数的定义

定义1

D与M是$\mathbf{R}$中非空数集, 若有对应法则f, 使D内每一个数x, 都有惟一的一个数$y \in M$与它相对应，则称f是定义在D上的函数, 记作

$$f : D \to M,$$
$$x \mapsto y.$$

D称为f的定义域;

$f(D)=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$称为$f$的值域;

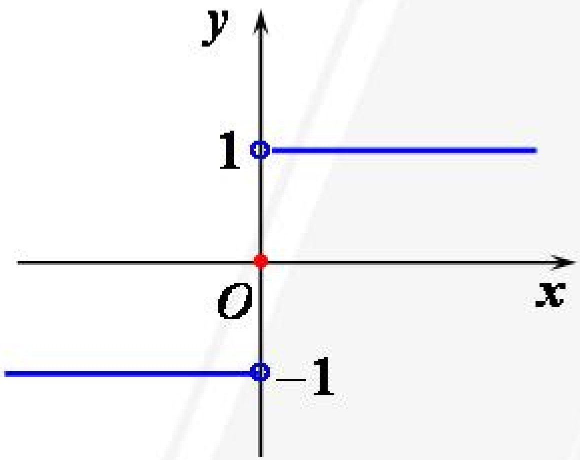
$G = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为 f 的图象.

注1 函数由定义域 D 和对应法则 f 二要素完全决定，因此若给出函数的定义域和对应法则,也就确定了函数. 它与自变量与因变量的符号无关.

注2 表示函数有多种方法，常见的有：解析法、列表法和图象法. 解析法表示函数时，若没有特别指明其定义域，则一般约定其定义域为使该解析式有意义的自变量的全体(即存在域).

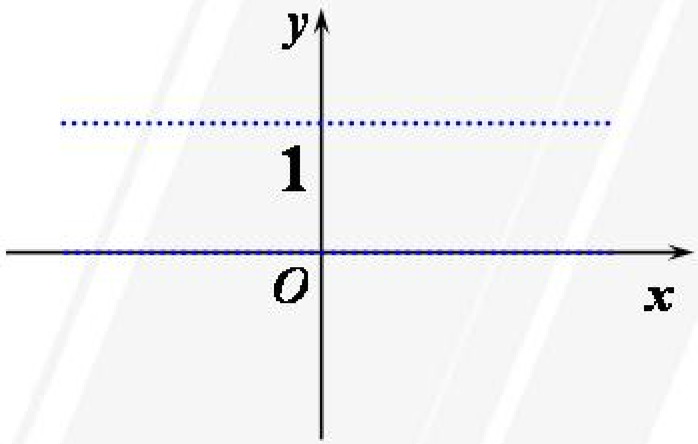
例1 符号函数

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



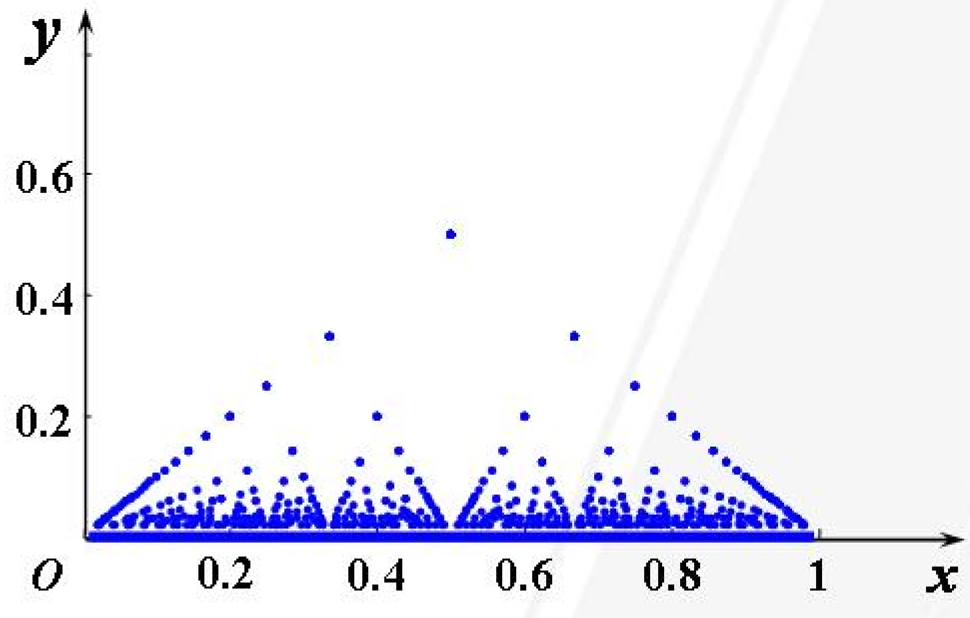
例2 狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, x \in Q \\ 0, x \notin Q \end{cases}$$



例3 黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & \text{当 } x=\dfrac{p}{q}\ \left(p,q\in\mathbf{N}_+,\ \dfrac{p}{q}\text{ 既约真分数}\right);\\[2ex] 0, & x=0,1 \text{ 或 } x\in(0,1)\setminus Q.\end{cases}$$



狄利克雷(Dirichlet,P.G.L. 1805－1859, 德国)

黎曼(Riemann,B. 1826－1866,德国)

函数的四则运算

设函数 f 的定义域为 D_f，函数 g 的定义域为 D_g.

1. $f \pm g$ 的定义域为 $D_{f\pm g} = D_f \cap D_g$,

且 $\forall x \in D_f \cap D_g$, $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$.

2. $f \cdot g$ 的定义域为 $D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g$,

且 $\forall x \in D_f \cap D_g$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

3. $\dfrac{f}{g}$ 的定义域为 $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D^*$，其中 $D^* = \{x \mid x \in D_g$,

且 $g(x) \neq 0\}$, $\forall x \in D_{\frac{f}{g}}$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

复合函数

设函数 f 的定义域为 D_f,函数 g 的定义域为 D_g,

复合函数 $f\circ g$ 的定义域为

$$D_{f\circ g}=\{x\,|\,x\in D_g, \text{且}\ g(x)\in D_f\},\ \text{则}$$

$$\forall\, x\in D_{f\circ g},\ f\circ g(x)=f(g(x)).$$

例4 函数 $f(u)=\sqrt{u}, u\in[0,+\infty)$ 与函数 $g(x)$ $=1-x^2, x\in \mathbf{R}$ 的复合函数为 $y=f(g(x))=\sqrt{1-x^2}$,

其中 $D_{f\circ g}=[-1,1]$.

例5 设 $f(x)=x^2,\ g(x)=\arcsin x,\ h(x)=\ln x$. 则

$$(f\circ g\circ h)(x)=\arcsin^2(\ln x),\ D_1=[\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}];$$

$$(f\circ h\circ g)(x)=\ln^2(\arcsin x),D_2=(0,1];$$

$$(g\circ f\circ h)(x)=\arcsin(\ln^2 x),D_3=[\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}];$$

$$(g\circ h\circ f)(x)=\arcsin(\ln x^2),D_4=[\mathrm{e}^{-1/2},\mathrm{e}^{1/2}];$$

$$(h\circ f\circ g)(x)=\ln(\arcsin^2 x),D_5=[-1,0)\cup(0,1];$$

$$(h\circ g\circ f)(x)=\ln(\arcsin(x^2)),D_6=[-1,0)\cup(0,1].$$

其中 $D_k, k=1,\cdots,6$ 是相应复合函数的定义域.

反函数

若函数 f 的定义域为 D_f, 满足:

$$\forall y \in f(D), \exists \text{惟一 } x \in D, \text{ 使 } f(x) = y,$$

则存在函数 f^{-1}, $D_{f^{-1}} = f(D)$ 且 $\forall y \in f(D)$, $f^{-1}(y) = x$,其中 x 是使 $f(x) = y$ 的惟一的 $x \in D$.

注 反函数表示式 $f^{-1}(y) = x$ 中, y是自变量, x 是因变量. 由于函数与自变量、因变量记号无关, 因此一般反函数 f^{-1} 记为 $y = f^{-1}(x)$.

例6 双曲函数 sh x 和 ch x 定义如下：

$$\text{sh } x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),\ \text{ch } x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),\ x\in\mathbf{R}.$$

sh x 在 $\mathbf{R}$ 上严格增，因此 sh x 有反函数.

设 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$，得到 e^x 的一元二次方程

$$(e^x)^2-2ye^x-1=0.$$

解得 $x=\ln\left(y\pm\sqrt{y^2+1}\right)$，

因此 $y=\text{sh } x$ 的反函数为

$$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\ x\in\mathbf{R}.$$

ch x 在 $\mathbf{R}_+$ 和 $\mathbf{R}_-$ 的值域均为 $[1,+\infty)$, 在 $\mathbf{R}_+$ 上严格增, 在 $\mathbf{R}_-$ 上严格减.

设 $y=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$, 得到 e^x 的一元二次方程

$$(\mathrm{e}^x)^2-2y\mathrm{e}^x+1=0.$$

解得 $\quad x=\ln\left(y\pm\sqrt{y^2-1}\right),$

因此 ch x 在 $\mathbf{R}_+$ 和 $\mathbf{R}_-$ 的反函数分别为

$$y_1=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\ x\in[1,+\infty).$$

$$y_2=\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right),\ x\in[1,+\infty).$$

初等函数

定义1

以下六类函数称为基本初等函数

(1) 常量函数 $y = c$ (c为常数);

(2) 幂函数 $y = x^{\alpha}$ (α 为实数);

(3) 指数函数 $y = a^{x}$ $(a > 0, a \neq 1)$;

(4) 对数函数 $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$;

(5) 三角函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$,

$y = \tan x$, $y = \cot x$;

(6) 反三角函数 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$,

$y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$.

定义2

$\forall a>0, a\neq 1$, 定义

$$a^x=\begin{cases}\sup\left\{a^r \mid r\in Q, r<x\right\}, & a>1,\\ \inf\left\{a^r \mid r\in Q, r<x\right\}, & 0<a<1.\end{cases}$$

定义3

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所得到的函数, 称为初等函数.

狄利克雷函数与黎曼函数是非初等函数.

复习思考题

1. 函数 $f(x)$定义在 $[a, b]$上，$f(a) = 0, f(b)= 1$, $[0, 1]$

是否一定都在 f 的值域$f([a, b])$之中.

2. 验证黎曼函数 $R(x)$ 具有以下性质：

$\forall \varepsilon > 0, R(x) \geq \varepsilon$ 只有有限多个解.