数学分析 第一章
实数集与函数

"数学分析研究的是实数集上定义的函数，因此我们首先要掌握实数的基本概念与性质.

§1 实数

一、实数的十进制小数表示

二、实数的大小

三、实数的四则运算

四、实数的阿基米德性

五、实数的稠密性

六、实数与数轴上的点一一对应

七、实数的绝对值与三角形不等式

*点击以上标题可直接前往对应内容

记号与术语

$\mathbf{R}$: 实数集

$\mathbf{R}_+$: 正实数集

$\mathbf{R}_-$: 负实数集

$\mathbf{Q}$: 有理数集

$\mathbf{Z}$: 整数集

$\mathbf{N}$: 自然数集(包含0)

$\mathbf{N}_+$: 正整数集

$\forall$: 任意

$\exists$: 存在

实数的十进制小数表示

1. 任何一个实数都可以用十进制小数表示.

若 $x \in \mathbf{R}_+$, 则 $x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$;

$x \in \mathbf{R}_-$, 则 $x = -a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$.

其中 $a_0 \in \mathbf{N}, a_n \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}, n = 1, 2, \cdots$.

2. 有限小数 $x = a_0.a_1a_2\cdots a_k$ (其中$a_k \neq 0$), 又可表示为

$$x = a_0.a_1a_2\cdots a_{k-1}(a_k - 1)99\cdots$$

$$= a_0.a_1a_2\cdots a_{k-1}(a_k - 1)\dot{9}.$$

若实数都用无限小数表示，则表达式是唯一的.

即：若 $x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$

$y = b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots,$

则 $x = y \Leftrightarrow a_n = b_n, n = 0, 1, 2, \cdots.$

用无限小数表示实数，称为正规表示.

3. $\mathbf{Q} = \{x \mid x = \dfrac{m}{n}$,其中 $m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\}$ 表示有理数集.

$\forall x \in \mathbf{Q}$, x 可用循环十进制小数表示，

如 $\dfrac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}.$

一般，若$x=\dfrac{m}{n}$，则 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_k\dot{a}_{k+1}\cdots\dot{a}_{k+p}$，

其中 $p<n$.

反之，若$x=a_0.a_1a_2\cdots a_k\dot{a}_{k+1}\cdots\dot{a}_{k+p}$，

则 $x=a_0+\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{a_i}{10^i}+\dfrac{1}{10^p-1}\sum\limits_{j=1}^{p}\dfrac{a_{k+j}}{10^{k+j-p}}\in\mathbf{Q}.$

4. 无理数为无限不循环小数.

如:$\pi=3.1415926\cdots$;

$x=0.1010010001\cdots$.

实数的大小

定义1

$\forall x, y \in \mathbf{R}_+$， 若

$$x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,\ y = b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$$

是正规的十进制小数表示，规定

$$x > y \Leftrightarrow a_0 > b_0 \text{ 或} \exists n \in N_+, \text{使}$$

$$a_0.a_1a_2\cdots a_n = b_0.b_1b_2\cdots b_n, \text{而} a_{n+1} > b_{n+1}.$$

$\forall x, y \in \mathbf{R}_-$，规定 $x > y \Leftrightarrow -x < -y$.

$\forall x \in \mathbf{R}_+$， $y \in \mathbf{R}_-$，规定 $y < 0 < x$.

实数的大小关系有以下性质:

(1) $x > y, x = y, x < y$.

三者必有其中之一成立，且只有其中之一成立.

(2) 若 $x > y$, $y > z$, 则 $x > z$.

即大小关系具有传递性.

实数的四则运算

有理数集 **Q** 对加、减、乘、除（除数不为 0）是封闭的.

实数集 **R** 对加、减、乘、除（除数不为 0）亦是封闭的.

实数的四则运算与大小关系, 还满足:

(1) $\forall x, y \in \mathbf{R}, \lambda \in \mathbf{R}_+$, 若 $x < y$, 则 $\lambda x < \lambda y$.

(2) $\forall x_1 < x_2, y_1 < y_2$, 则 $x_1 + y_1 < x_2 + y_2$.

实数的阿基米德性

实数具有阿基米德性:

$\forall a, b \in \mathbf{R}_+$, $\exists n \in \mathbf{N}_+$, 使得 $nb > a$.

理由如下：设

$$a = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots, \quad a_0 = k \in \mathbf{N},$$

则 $a \le k + 1 < 10^{k+1}$.

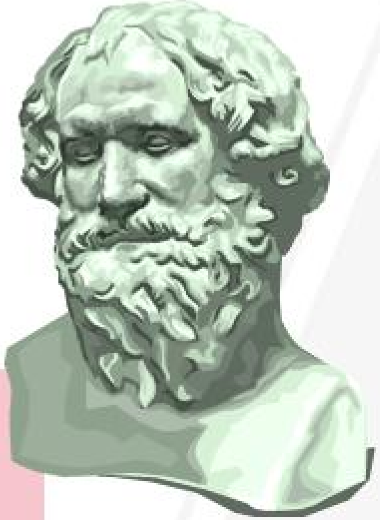
设 $b = b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$, b_p为第一个不为零的正整数,

令 $n = 10^{p+k+1}$, 则 $nb \ge 10^{k+1} > a$.

例1 若 $b>0$, 则 $\exists n\in \mathbf{N}_+$, 使得 $\dfrac{1}{n}<b$.

证 令 $a=1$, 由阿基米德性, $\exists n\in \mathbf{N}_+$, 使 $nb>1$, 即

$$\frac{1}{n}<b.$$



阿基米德 (Archimedes, 287B.C.—212B.C. , 希腊)

实数的稠密性

1. 任意两个不相等的实数 a 与 b 之间，必有另一个实数 c. 例如 $c=\dfrac{a+b}{2}$.

2. 任意两个不相等的实数 a 与 b 之间，既有有理数又有无理数.

证 若 $a<b$，则由例 1，存在 $n\in\mathbf{N}_+$，使

$$\frac{1}{n}<\frac{1}{2}(b-a).$$

设 k 是满足 $\frac{k}{n} \le a$ 的最大的正整数，即 $\frac{k+1}{n} > a$.

于是，$a < \frac{k+1}{n} < \frac{k+2}{n} < b$，则 $\frac{k+1}{n}$，$\frac{k+2}{n}$ 是 a 与 b 之间的有理数，而 $\frac{k+1}{n} + \frac{\pi}{4n}$ 是 a 与 b 之间的无理数.

例2 若$a, b \in \mathbf{R}$，对 $\forall \varepsilon > 0$，$a < b + \varepsilon$，则 $a \le b$.

证 倘若$a > b$，设$\varepsilon = a - b > 0$，则 $a = b + \varepsilon$，与 $a < b + \varepsilon$ 矛盾.

实数与数轴上的点一一对应

实数集 R与数轴上的点可建立一一对应关系.

1. 这种对应关系，粗略地可这样描述:

设 P 是数轴上的一点(不妨设在0的右边)，若 P 在整数 n与 $n+1$之间，则 $a_0=n$.

把$(n,n+1]$十等分,若点 P 在第 i 个区间,则 $a_1=i$.

类似可得到 a_n，$n=2,3,\cdots$. 这时,令点 p 对应于

$$a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots.$$

反之,任何一实数也对应数轴上一点.

2.实数集与数轴上点的一一对应关系反映了实数的完备性，我们将在后面有关章节中作进一步讨论.

实数的绝对值与三角形不等式

1. 实数 a 的绝对值 $|a|$ 定义为:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}.$$

2. 实数的绝对值性质:

(1) $|a| = |-a| \geq 0$; 当且仅当 $a = 0$ 时 $|a| = 0$.

(2) $-|a| \leq a \leq |a|$.

(3) $|a| < h \Leftrightarrow -h < a < h$, $|a| \leq h \Leftrightarrow -h \leq a \leq h$.

(4) $\big||a|-|b|\big| \le |a+b| \le |a|+|b|$. (三角形不等式).

(5) $|ab|=|a||b|$.

(6) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}\,(b\neq 0)$.

3. 三角形不等式 $|a|-|b|\le|a+b|\le|a|+|b|$的证明:

由$-|a|\le a\le|a|,-|b|\le b\le|b|$得

$$-(|a|+|b|)\le a+b\le|a|+|b|,$$

即$|a+b|\le|a|+|b|$.

又$|a|=|a-b+b|\le|a-b|+|b|$, 即$|a|-|b|\le|a+b|$.

复习思考题

1. 若 p 和 q 互素，为什么有理数 $\frac{p}{q}$ 一定可以表示为循环节不超过 q 的循环小数？

2. 为什么 1 和 0.99⋯ 表示同一个数？

3. 如何定义数集 E 在 $\mathbf{R}$ 中稠密？按你的定义证明

$$E=\{\frac{n}{2^m}: n\in\mathbf{Z}, m\in\mathbf{N}_+\}$$

在 $\mathbf{R}$ 中稠密.