1.2 向量场与切丛

1.2.1 求导的方向

上一节中我们解决了流形上的函数是否可微的问题, 接下来我们要考虑的是如何求导. 我们接着上一节自然的想法, 给定一点 $p \in M$, 对包含 p 的坐标卡 (U_α, ϕ_α), 定义

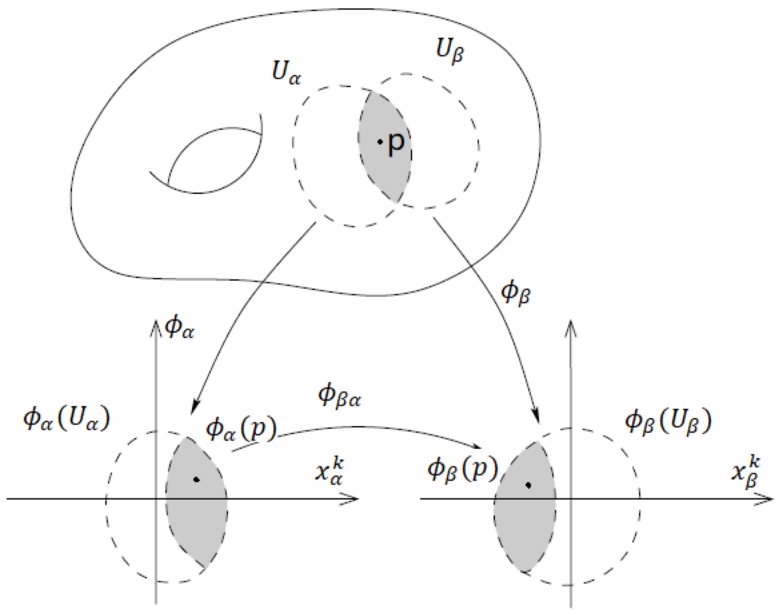
$$\left(\frac{\partial}{\partial x^k} f\right)(p) := \frac{\partial}{\partial x_\alpha^k}\left(f \circ \phi_\alpha^{-1}\right)\left(\phi_\alpha(p)\right), \tag{1.20}$$

其中 $(x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^n)$ 是 $\phi(U_\alpha)$ 所在的 n 维欧氏空间的坐标. 在上面的公式中，$\phi_\alpha(p) \in \mathbb{R}^n$, 所以右边是在欧氏空间中求导，是有意义的.

但这时我们遇到了另一个问题，即定义依赖于坐标卡的选取. 如果我们在包含 p 的不同的坐标卡下求导，是否可以求出同一个函数?

我们不妨验证一下, 当 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ 时, 由(1.12), (1.13)及链式法则可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_\alpha^k}\left(f \circ \phi_\alpha^{-1}\right)\left(\phi_\alpha(p)\right) &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha^k}\left(f \circ \phi_\beta^{-1}\right)\left(\phi_{\beta\alpha}\left(\phi_\alpha(p)\right)\right) \\
&= \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\beta^l}\left(f \circ \phi_\beta^{-1}\right)\left(\phi_{\beta\alpha}\left(\phi_\alpha(p)\right)\right) \cdot \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}\left(\phi_\alpha(p)\right) \\
&\neq \frac{\partial}{\partial x_\beta^k}\left(f \circ \phi_\beta^{-1}\right)\left(\phi_\beta(p)\right).
\end{aligned} \tag{1.21}$$



我们不妨用矩阵的形式将上述求和式写出

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^1} \\ \frac{\partial}{\partial x_\alpha^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^1}{\partial x_\alpha^1} & \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^2}{\partial x_\alpha^1} & \cdots & \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^n}{\partial x_\alpha^1} \\ \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^1}{\partial x_\alpha^2} & \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^2}{\partial x_\alpha^2} & \cdots & \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^n}{\partial x_\alpha^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^1}{\partial x_\alpha^n} & \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^2}{\partial x_\alpha^n} & \cdots & \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^n}{\partial x_\alpha^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_\beta^1} \\ \frac{\partial}{\partial x_\beta^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_\beta^n} \end{pmatrix}, \tag{1.22}$$

我们经常将上面的方阵简记为

$$\left(\frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}\right)_{(k,l)}. \tag{1.23}$$

观察式子左右两边, 我们发现在更换坐标卡后, 求导总体上差了一个 $\phi_{\beta\alpha}$ 在 $\phi_\alpha(p)$ 处的 Jacobi 矩阵. 我们可以将这个式子理解为函数 f 关于两个坐标卡求导, 实际上是求导的方向发生了变化, 如果我们可以将两个方向 “粘” 成一个新的方向, 之前的定义就合理了, 这个方向我们也可以称之为向量场（vector field）.

对一个一般的求导方向 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_\alpha^k \frac{\partial}{\partial x_\alpha^k}$, 由(1.22), 我们有

$$\sum_{k=1}^{n} a_\alpha^k \frac{\partial}{\partial x_\alpha^k} = \left(a_\alpha^1, \cdots, a_\alpha^n\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^1} \\ \frac{\partial}{\partial x_\alpha^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n} \end{pmatrix} = \left(a_\alpha^1, \cdots, a_\alpha^n\right) \left(\frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}\right)_{(k,l)} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_\beta^1} \\ \frac{\partial}{\partial x_\beta^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_\beta^n} \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

根据(1.24), 我们可以给出下面的向量场的定义.

定义 1.2.1. 设 M 是一个带有光滑结构 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ 的光滑流形, M 上的一个向量场 X 是一族偏导数 $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} a_\alpha^k \frac{\partial}{\partial x_\alpha^k}\right\}_{\alpha\in I}$, 满足对 $\forall \alpha \in I$, $a_\alpha^k \in C^\infty\left(\phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right)$, 而且若 $m \in U_\alpha \cap U_\beta$,

$$a_\beta^l(\phi_\beta(m)) = \sum_{k=1}^{n} a_\alpha^k(\phi_\alpha(m)) \cdot \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}\left(\phi_\alpha(m)\right). \tag{1.25}$$

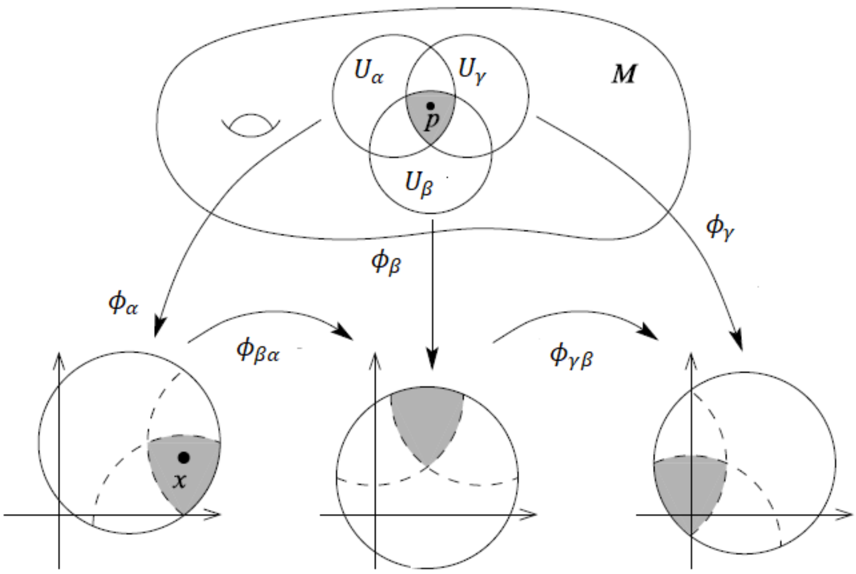
这样一来, 我们用向量场的定义解决了两个关于不同坐标卡求偏导时的相容性, 因此在关于向量场给定的方向求偏导时, 得到的结果是不依赖于坐标卡的选取的. 这相当于我们在不同的坐标卡上对不同的方向求偏导。

接下来我们又遇到了一个问题：如果有三个坐标卡覆盖 $m \in M$, $m \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$, 不同坐标卡变换之间是否会有冲突？按数学的语言，

$$a_\beta^l(\phi_\beta(m)) = \sum_{k=1}^{n} a_\alpha^k(\phi_\alpha(m)) \cdot \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}\left(\phi_\alpha(m)\right) \tag{1.26}$$

$$a_\gamma^l(\phi_\gamma(m)) = \sum_{k=1}^{n} a_\beta^k(\phi_\beta(m)) \cdot \frac{\partial \phi_{\gamma\beta}^l}{\partial x_\beta^k}\left(\phi_\beta(m)\right) \tag{1.27}$$

$$a_\gamma^l(\phi_\gamma(m)) = \sum_{k=1}^{n} a_\alpha^k(\phi_\alpha(m)) \cdot \frac{\partial \phi_{\gamma\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}\left(\phi_\alpha(m)\right) \tag{1.28}$$



如果通过前两个公式得到的 $(a^1_\gamma, \cdots, a^n_\gamma)$ 与 $(a^1_\alpha, \cdots, a^n_\alpha)$ 的关系与 (1.28) 不同，那么我们向量场的定义就会出问题。我们来看一下会不会出问题。

由转移映射的定义, $\phi_{\gamma\alpha} = \phi_{\gamma\beta} \circ \phi_{\beta\alpha}$, 再由求导的链式法则可以得到

$$\frac{\partial \phi^l_{\gamma\alpha}}{\partial x^k_\alpha}(\phi_\alpha(m)) = \sum_{t=1}^{n} \frac{\partial \phi^l_{\gamma\beta}}{\partial x^t_\beta}(\phi_\beta(m)) \cdot \frac{\partial \phi^t_{\beta\alpha}}{\partial x^k_\alpha}(\phi_\alpha(m)). \tag{1.29}$$

写成矩阵形式, 就是

$$\left(\frac{\partial \phi^l_{\gamma\alpha}}{\partial x^k_\alpha}(\phi_\alpha(m))\right)_{(k,l)} = \left(\frac{\partial \phi^t_{\beta\alpha}}{\partial x^k_\alpha}(\phi_\alpha(m))\right)_{(k,t)} \left(\frac{\partial \phi^l_{\gamma\beta}}{\partial x^t_\beta}(\phi_\beta(m))\right)_{(t,l)}. \tag{1.30}$$

把公式 (1.26), (1.27) 写成向量形式, 并把 (1.26) 代入 (1.27) 中，我们

有

$$
\begin{aligned}
&\left(a_\gamma^1\left(\phi_\gamma(m)\right), \cdots, a_\gamma^n\left(\phi_\gamma(m)\right)\right) \\
&\qquad = \left(a_\beta^1\left(\phi_\beta(m)\right), \cdots, a_\beta^n\left(\phi_\beta(m)\right)\right)\left(\frac{\partial \phi_{\gamma\beta}^l}{\partial x_\beta^t}(\phi_\beta(m))\right)_{(t,l)} \\
&= \left(a_\alpha^1\left(\phi_\alpha(m)\right), \cdots, a_\alpha^n\left(\phi_\alpha(m)\right)\right)\left(\frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^t}{\partial x_\alpha^k}(\phi_\alpha(m))\right)_{(k,t)}\left(\frac{\partial \phi_{\gamma\beta}^l}{\partial x_\beta^t}(\phi_\beta(m))\right)_{(t,l)} \\
&\qquad = \left(a_\alpha^1\left(\phi_\alpha(m)\right), \cdots, a_\alpha^n\left(\phi_\alpha(m)\right)\right)\left(\frac{\partial \phi_{\gamma\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}(\phi_\alpha(m))\right)_{(k,l)}.
\end{aligned}
\tag{1.31}
$$

该式即为 (1.28) 的向量表示形式.

因为 (1.26), (1.27) 可以推出 (1.28), 由归纳法, 对对任意多个相交于某点的坐标卡, 向量场的定义都是相容的.

按照这样的定义, 沿着 X 方向对 f 求导我们记为 Xf. 从这个角度看, 向量场 X 实际上定义了一个映射

$$X : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, \mathbb{R}), \tag{1.32}$$

且这个映射是合理定义的.

1.2.2 切向量丛

向量场到底是什么？在前面的定义中，向量场是以求导为目的引入，在每一块坐标卡上定义，再以某种规则粘起来的东西. 这就自然出现了一个问题：这样拼起来的东西到底是什么？在数学中我们熟悉的是三段论式的定义，有大前提和小前提，但我们这里是一个构造的定义，我们是不是可以按照数学习惯，先找一个大空间然后把向量场看作空间中满足某种性质的元素或部分？或者用通俗一点的话说，我们能不能给向量场找到一个家？我们现在给向量场建造一个家。

设 M 是带有光滑结构 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ 的光滑流形, 记 $\bigsqcup\limits_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{R}^n)$ 是 $\{U_\alpha \times \mathbb{R}^n\}_\alpha$ 的不交并. 定义关系 " $\sim$ ", 使得

$$\left(x, (a_\alpha^1, \cdots, a_\alpha^n)\right) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n \sim \left(y, (a_\beta^1, \cdots, a_\beta^n)\right) \in U_\beta \times \mathbb{R}^n \tag{1.33}$$

当且仅当 $x=y$, 且 $\forall 1\le l\le n$,

$$a_\beta^l=\sum_{k=1}^n a_\alpha^k\cdot\frac{\partial\phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}(x) \tag{1.34}$$

或写成向量形式

$$\left(a_\beta^1,\cdots,a_\beta^n\right)=\left(a_\alpha^1,\cdots,a_\alpha^n\right)\left(\frac{\partial\phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}(x)\right)_{(k,l)}. \tag{1.35}$$

可以验证 ”$\sim$” 是一个等价关系, 即满足自反性、对称性和传递性.

我们定义如下映射

$$\begin{aligned} X|_{U_\alpha}=\sum_{k=1}^n a_\alpha^k(x)\frac{\partial}{\partial x_\alpha^k}:U_\alpha&\to U_\alpha\times\mathbb{R}^n\\ x&\mapsto\left(x,(a_\alpha^1(x),\cdots,a_\alpha^n(x))\right)\end{aligned} \tag{1.36}$$

$$\begin{aligned} X|_{U_\beta}=\sum_{l=1}^n a_\beta^l(x)\frac{\partial}{\partial x_\beta^l}:U_\beta&\to U_\beta\times\mathbb{R}^n\\ y&\mapsto\left(y,(a_\beta^1(y),\cdots,a_\beta^n(y))\right)\end{aligned} \tag{1.37}$$

这样的映射可以“粘”成一个合理定义的映射：

$$X:M\to\bigsqcup_\alpha(U_\alpha\times\mathbb{R}^n)/\sim$$

箭头右边的空间就可以看作向量场所在的“大空间”, 于是我们有了“切向量丛”（vector field）的定义.

定义 1.2.2. $TM:=\bigsqcup_\alpha(U_\alpha\times\mathbb{R}^n)/\sim$ 称为光滑流形 M 上的切向量丛.

由前面拼接式的定义我们可以得到 TM 是一个拓扑流形. 事实上 TM 甚至是一个光滑流形. 注意到我们一直在假设 M 是一个光滑流形.

记 $\pi:TM\to M,\ (m,v)\mapsto m$ 为投影映射. 由(1.33)可得，π 是合理定义的。

定义 1.2.3. 对 $m \in M$, $T_mM := \pi^{-1}(m)$ 称为 M 在 m 点的**切空间**. 对向量场 X，$X(m) \in T_mM$ 称为 M 在 m 点的一个**切向量**.

根据投影映射和切向量丛的定义，下面命题的证明是显然的。

命题 1.2.4. *X 是光滑流形 M 上的一个向量场当且仅当 $X : M \mapsto TM$ 是一个满足 $\pi \circ X = \mathrm{Id}_M$ 的光滑映射.*

记

$$C^\infty(M, TM) = \{s : M \to T^*M \text{为光滑映射} | \pi \circ s = \mathrm{Id}_M\}. \tag{1.38}$$

所以我们可以得到 $X \in C^\infty(M, TM)$.

事实上, 很多书籍主要是采用上述命题中后面的方式来定义向量场.

在曲面论中，我们讨论过曲面上的切向量与切空间。这里我们定义了流形上的向量场与切空间。我们需要讨论一下当流形就是三维空间中的曲面时，二者之间的关系。

设 M 是一个三维空间中的正则参数曲面，则它是一个微分流形。对 $m \in M$, 考虑覆盖 m 的两个坐标卡 $(U_\alpha, \phi_\alpha), (U_\beta, \phi_\beta)$. 则 $\phi_\alpha^{-1}, \phi_\beta^{-1}$ 是 $U_\alpha \cap U_\beta$ 的两个参数表示。这两个参数表示之间的参数变换为

$$\phi_{\beta\alpha} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \tag{1.39}$$

考虑 M 上经过 m 点的一条光滑曲线 $\gamma(t)$，$\gamma(0) = m$, 设 $\phi_\alpha \circ \gamma(t) = (x_\alpha^1(t), x_\alpha^2(t))$, $\phi_\beta \circ \gamma(t) = (x_\beta^1(t), x_\beta^2(t))$. $\gamma(t)$ 在 m 点对应的切向量为 $\gamma'(0) \in \mathbb{R}^3$, 在 $\phi_\alpha(U_\alpha)$ 中对应的向量为 $((x_\alpha^1)'(0), (x_\alpha^2)'(0))$, 在 $\phi_\beta(U_\beta)$ 中对应的向量为 $((x_\beta^1)'(0), (x_\beta^2)'(0))$. 注意到

$$((x_\beta^1)'(0), (x_\beta^2)'(0)) = ((x_\alpha^1)'(0), (x_\alpha^2)'(0)) \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^1}{\partial x_\alpha^1} & \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^2}{\partial x_\alpha^1} \\ \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^1}{\partial x_\alpha^2} & \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^2}{\partial x_\alpha^2} \end{pmatrix} \tag{1.40}$$

此式正好对应于 (1.35) 式。

在流形的意义下,$\phi_\alpha(U_\alpha)$ 中的偏微分 $(x_\alpha^1)'(0)\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1} + (x_\alpha^2)'(0)\frac{\partial}{\partial x_\alpha^2}$ 与 $\phi_\beta(U_\beta)$ 中的偏微分 $(x_\beta^1)'(0)\frac{\partial}{\partial x_\beta^1} + (x_\beta^2)'(0))\frac{\partial}{\partial x_\beta^2}$ 粘合成了一个切向量 $X(m) \in T_mM$.

所以我们有两种切向量的对应：

$$
\begin{aligned}
(a_\alpha^1, a_\alpha^2) \in \phi_\alpha(U_\alpha) &\longleftrightarrow a_\alpha^1 \frac{\partial}{\partial x_\alpha^1} + a_\alpha^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha^2}, \\
(a_\beta^1, a_\beta^2) \in \phi_\beta(U_\beta) &\longleftrightarrow a_\beta^1 \frac{\partial}{\partial x_\beta^1} + a_\beta^2 \frac{\partial}{\partial x_\beta^2}.
\end{aligned}
\tag{1.41}
$$

但切向量 $\gamma'(0) \in \mathbb{R}^3$ 在流形中却没有对应。这是因为我们并不假设流形在另外更大的欧式空间中。

向量场有两个性质，若 $X \in C^\infty(M, TM)$，$X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$，$f, g \in C^\infty(M)$，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，则有:

(1)$X(\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot Xf + \beta \cdot Xg$,

(2)$X(f \cdot g) = f \cdot Xg + g \cdot Xf$.

习题

1. 证明 (1.33) 中的 $\sim$ 是一个等价关系。

2. 证明 TM 是一个微分流形.