



局部指标定理与 Bismut-Cheeger η -形式

刘博^{1,2,3}

1. 华东师范大学数学科学学院, 上海 200241;
2. 华东师范大学数学与工程应用教育部重点实验室, 上海 200241;
3. 华东师范大学上海核心数学与实践重点实验室, 上海 200241

E-mail: bliu@math.ecnu.edu.cn

收稿日期: 2024-08-18; 接受日期: 2024-12-30; 网络出版日期: 2025-03-14

国家自然科学基金 (批准号: 12225105 和 11931007)、国家重点研发计划 (批准号: 2024YFA1013203)、上海市核心数学与实践重点实验室 (批准号: 22DZ2229014) 资助项目

摘要 本文介绍局部 Atiyah-Singer 指标定理及其诸多推广, 并对 Bismut-Cheeger η -形式的最新进展及其在微分 K 理论中的应用作进一步的讨论.

关键词 局部指标定理 Dirac 算子 η -不变量 η -形式 微分 K 理论

MSC (2020) 主题分类 58J20, 58J28, 58J35, 19L50, 53C27, 58J30

1 引言

Atiyah-Singer 指标定理^[18]是 20 世纪最重要的数学定理之一, 它将微分几何中的 Gauss-Bonnet-Chern 定理^[94]、复几何中的 Hirzebruch-Riemann-Roch 定理^[133]和拓扑学中的 Hirzebruch 符号差 (signature) 定理^[133]这三个在各自领域中处在举足轻重地位的大定理置于了一个统一的框架中. 几十年来, 受到诸多数学学科甚至理论物理中很多思想的影响, 大量新工具、新方法被引入到指标定理的研究当中. 这些新工具、新方法拓展了我们的认知边界, 使得我们能够应用研究指标定理的想法来尝试解决很多数学方向中出现的问题, 构建更多有用的理论框架. 这些成果、思想以及由此诞生的指标理论在很多数学方向乃至量子场论与弦论中都有着重要应用和深刻影响.

具体而言, Atiyah-Singer 指标定理指的是对偶数维紧致流形 X 上复向量丛间的线性椭圆微分算子 D , 其由方程解空间维数定义的解析指标与其通过拓扑方法定义的拓扑指标相等:

$$D \text{ 的解析指标} = D \text{ 的拓扑指标}, \quad (1.1)$$

其中上式的两项正好对应了分析与拓扑中的研究对象. 所以可以认为指标定理在分析与拓扑之间搭建了桥梁.

英文引用格式: Liu B. The local index theorem and the Bismut-Cheeger η -form (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 1–56, doi: 10.1360/SSM-2024-0247

在后续的研究中, 相对于一般的线性椭圆算子, 一类特殊的算子—Dirac 算子—受到了最多的关注. 一方面, Dirac 算子的指标定理可以将指标写作由曲率构造的微分形式的积分, 将分析、拓扑与几何建立联系, 而且前面提到的三大定理都是 Dirac 算子指标定理的特例 (参见第 2.3 小节的讨论). 另一方面, 根据拓扑 K 理论的知识, 一般线性椭圆微分算子的指标定理可以通过 Dirac 算子的指标定理直接得到 (参见文献 [18, 命题 3] 和 [142, 注记 13.11]). 对于偶数维紧致流形上的 Dirac 算子 $D_X^\mathcal{E}$ (见定义 2.4), 其指标定理写作

$$\text{ind}(D_{X,+}^\mathcal{E}) = \int_X \widehat{A}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}(\mathcal{E}/S, \nabla^\mathcal{E}). \quad (1.2)$$

上式中每一项的定义参见第 2.2 小节. 注意到 (1.2) 中被积的微分形式由流形与向量丛上的度量、联络这些几何量定义 (见 (2.21) 和 (2.26)). 当几何发生变化时, 微分形式自然会变化. 而左端算子的指标是一个与几何无关的拓扑量. 也就是说, 无论这个微分形式局部如何随几何变化, 其积分作为一个整体永远固定不变. 我们熟知的微分几何中的 Gauss-Bonnet 定理就是这个局部 - 整体思想的最早的范例.

而局部指标定理 (具体细节参见第 2.4 小节) 是局部 - 整体思想的一个更好的体现. 记 $\exp(-tD_X^{\mathcal{E},2})$, $t > 0$ 为 $D_X^{\mathcal{E},2}$ 对应的热算子, $\exp(-tD_X^{\mathcal{E},2})(x, y)$ 为对应的热核. 对于超迹 Tr_s (参见 (2.18)), 有

$$\text{Tr}_s[\exp(-tD_X^{\mathcal{E},2})] = \int_X \text{Tr}_s[\exp(-tD_X^{\mathcal{E},2})(x, x)] dx. \quad (1.3)$$

由 McKean-Singer 公式可知上式的左端与 t 没有关系. 根据谱理论, 可得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Tr}_s[\exp(-tD_X^{\mathcal{E},2})] = \text{ind}(D_{X,+}^\mathcal{E}). \quad (1.4)$$

所以由 (1.2), 可得

$$\int_X \text{Tr}_s[\exp(-tD_X^{\mathcal{E},2})(x, x)] dx = \int_X \widehat{A}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}(\mathcal{E}/S, \nabla^\mathcal{E}). \quad (1.5)$$

一般情形下, $\exp(-tD_X^{\mathcal{E},2})(x, x)$ 显然与 t 有关. 事实上, 对于 $t \rightarrow 0^+$, 热核渐近公式 [167, 178] 指出

$$\exp(-tD_X^{\mathcal{E},2})(x, x) \sim \sum_{k=-\dim X/2}^{\infty} a_k t^k. \quad (1.6)$$

基于 (1.5) 和 (1.6), McKean 和 Singer [162] 提出了“奇迹消除 (miraculous cancellation) 猜想”: 当 $t \rightarrow 0$ 时, (1.5) 两端积分内部的积分项在最高次时相等¹⁾, 即当 $t \rightarrow 0$ 时, 若 $k < 0$, 则 (1.6) 中的 a_k 的超迹会奇迹般地消失, 且 $\text{Tr}_s[a_0] dx$ 恰等于 (1.5) 右端的积分项在最高次微分形式上的分量. 后来, 在多位数学家的努力下, 这一猜想最终被证明 (参见文献 [9, 28, 32, 121, 122, 124, 126, 139, 171, 172, 190]), 变成了现在的局部 Atiyah-Singer 指标定理:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \text{Tr}_s[\exp(-tD_X^{\mathcal{E},2})(x, x)] dx = [\widehat{A}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}(\mathcal{E}/S, \nabla^\mathcal{E})]_{(n)}, \quad (1.7)$$

其中 $[\alpha]_{(n)}$ 表示微分形式 α 在 n 形式上的分量, $n = \dim X$. 通过比较 (1.5) 与 (1.7), 我们会发现局部指标定理是原始 Atiyah-Singer 指标定理的加强. 而且这个局部技术让我们能够得到并分析更多更复杂的不变量.

1) McKean 和 Singer [162] 只对 de Rham-Hodge 算子 $D_X^\mathcal{E} = d + d^*$ 提出了奇迹消除猜想, 这个猜想随后被 Patodi [171] 证明, 是局部指标定理的先声. 关于这段历史, 可参见一篇精彩的综述文献 [201].

1986 年, Bismut [36] 应用 Quillen [174] 引入的超联络将上述方法推广到算子簇情形, 证明了算子簇情形的局部指标定理. 随后, Bismut 与他的合作者们发展了一套解析局部化技术 [31, 35, 37–50, 52–80], 将局部指标理论推进到一个新的阶段. 在算子簇情形局部指标定理的证明中, Bismut 引入了现称作 Bismut 超联络的算子 (当流形簇退化为一个流形时, Bismut 超联络就是 Dirac 算子). Bismut 指出将 Dirac 算子替换为 Bismut 超联络后, 对应的 (1.3)、(1.4) 和 (1.7) 仍然成立, 但这种情形下 (1.3) 的左端只在上同调意义下与 t 无关. 此时, 作为参数空间上的微分形式, 其左端 $t \rightarrow 0$ 的极限与 $t \rightarrow +\infty$ 的极限会相差一个可被具体构造的微分形式的外微分. 这个微分形式被称为 Bismut-Cheeger η -形式 (具体细节参见第 3.5 小节). 从另外的角度观察, η -形式是 η -不变量的高维推广且会自然出现在 η -不变量的绝热极限公式中 (Bismut 和 Cheeger 2021 年共同获得了邵逸夫数学奖, 他们所有合作的成果均与 η -形式相关).

本文计划对局部指标定理的各种推广与 η -形式研究的近期进展作一综述, 并简要讨论 η -形式在微分 K 理论中的应用. 受篇幅与个人兴趣所限, 此综述将被限制在紧致流形的范畴内, 不会提及非紧致流形上指标理论的进展, 也不会涉及算子代数与非交换几何领域的相关内容. 为了叙述方便, 文中的一些结果并没有被推广至文献中的最一般的情形.

本文余下内容的安排如下. 第 2 节介绍 Clifford 模上 Dirac 算子的 Atiyah-Singer 指标定理与局部指标定理, 并应用其得到 Gauss-Bonnet-Chern 定理、Hirzebruch 符号差定理和 Hirzebruch-Riemann-Roch 定理. 第 3 节讨论指标定理的各种推广, 包括等变指标定理、Kirillov 公式、APS (Atiyah-Patodi-Singer) 指标定理、簇指标定理以及它们的某些共同推广. 第 4 节综述 Bismut-Cheeger η -形式的各种性质. 第 5 节简要介绍 η -形式在微分 K 理论中的应用.

注 1.1 如果没有其他说明, 我们总假设文中提到的流形为无边界的光滑流形, 带边流形为光滑带边流形. 本文经常会考虑纤维丛 $\pi: W \rightarrow B$ 中 W 上的微分形式沿纤维 X 的积分. 由于纤维有可能是奇数维, 我们需要约定积分的符号: 对 $\alpha \in \Omega^\bullet(B)$, $\beta \in \Omega^\bullet(W)$, 约定

$$\int_X (\pi^* \alpha) \wedge \beta = \alpha \wedge \int_X \beta. \quad (1.8)$$

本文使用的 Lie 括号均为超 Lie 括号, 即若 A 是一个 \mathbb{Z}_2 分次代数, $a, b \in A$,

$$[a, b] := ab - (-1)^{\deg(a)\deg(b)}ba. \quad (1.9)$$

若 $[a, b] = 0$, 称 a 与 b 超交换 (参见文献 [26, 第 1.3 小节]). 对于不分次空间 A , 总可以将其视作平凡的 \mathbb{Z}_2 分次空间 $A = A \oplus 0$.

2 Atiyah-Singer 指标定理

Atiyah-Singer 指标定理将数学的很多方向联系在了一起, 这也给了我们从很多角度来研究这个定理的机会. 到目前为止, 指标定理有很多种证明, 其中比较经典的证明有三种. 第一种是最早的配边证明 [18]; 第二种是 K 理论证明 [17, 19, 20, 22, 23]; 第三种是前面提到的热核证明, 即通过局部指标定理得到证明. 现在有很多学术专著对指标定理及相关内容作过系统的阐述. 关于配边证明, 可参见文献 [90, 170]; 关于 K 理论证明, 可参见文献 [81, 82, 142, 168, 180]; 关于热核证明, 可参见文献 [26, 82, 113, 126, 191, 203]. 关于指标理论的发展史, 可参见文献 [4, 117, 192, 202]. 关于指标定理证明所需的相关知识, 可参见文献 [120, 163, 177, 183, 192]. 本节主要采取文献 [26] 中的符号约定. 关于本节内容的细节, 可参见文献 [26, 第 3 和 4 章].

本节内容安排如下. 第 2.1 小节讨论 Euclid 空间上的 Dirac 算子, 为流形上 Dirac 算子的定义作铺垫. 第 2.2 小节在流形上定义 Clifford 模上的 Dirac 算子, 并给出 Dirac 算子的指标定理. 第 2.3 小节讨论指标定理在 4 个几何算子上的应用. 第 2.4 小节给出局部指标定理的表述.

2.1 Euclid 内积空间上的 Dirac 算子

在 n 维 Euclid 空间 \mathbb{R}^n 中, Laplace-Beltrami 算子定义为

$$\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}. \quad (2.1)$$

而 Dirac 算子来源于对 Laplace-Beltrami 算子开根号的尝试.

我们用待定系数法来看这个问题. 设 D 是 Euclid 空间中的一个常系数一阶微分算子,

$$D = c_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + c_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad (2.2)$$

则

$$D^2 = \sum_{i < j} (c_i c_j + c_j c_i) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n c_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \quad (2.3)$$

若 $D^2 = \Delta$, 则对任意 $1 \leq i, j \leq n$, 有

$$c_i c_j + c_j c_i = -2\delta_{ij}. \quad (2.4)$$

显然, 上式中的常数 c_i 并不是数域中的数. 最早考虑这个问题的是 Hamilton (参见文献 [131, 第 263 页]): 对于 2 维 Euclid 空间, 若取 c_1 和 c_2 为四元数 \mathbb{H} 中的虚数单位 i 和 j , 则 (2.4) 成立. 1928 年, 在量子力学的研究中, Dirac 也遇到了这个问题. Dirac^[109] 的想法是将 c_i 取作非交换的矩阵, 从而得到了著名的 Dirac 方程. 事实上, 一般情形下 (2.4) 诱导了 \mathbb{R}^n 上的一个 Clifford 代数结构.

定义 2.1 设 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是一个实内积空间. Clifford 代数 $C(V)$ 是一个由 V 生成的实代数且满足对任意 $v, w \in V$, 有

$$v \cdot w + w \cdot v = -2\langle v, w \rangle. \quad (2.5)$$

注意到, 若 $\dim V = 1$, 则 $C(V) \simeq \mathbb{C}$; 若 $\dim V = 2$, 则 $C(V) \simeq \mathbb{H}$. 所以 Clifford 代数 $C(V)$ 是复数与四元数的推广.

接下来, 要为 (2.2) 中的 D 寻找一个作用空间. 设 E 是 Clifford 代数 $C(V)$ 的一个有限维复表示空间, 即存在代数同态

$$c : C(V) \rightarrow \text{End}(E), \quad (2.6)$$

对任意 $v, w \in V$, 有

$$c(v)c(w) + c(w)c(v) = -2\langle v, w \rangle. \quad (2.7)$$

记 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 为内积空间 V 的一组单位正交基. 对 $x \in V$, 记 x 在这组基下的表示为

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

记 $C^\infty(V, E)$ 为从 V 到 E 的所有光滑映射组成的空间.

定义 2.2 将内积空间 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 上关于表示 E 的 Dirac 算子 $D: C^\infty(V, E) \rightarrow C^\infty(V, E)$ 定义为

$$D = c(e_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + c(e_n) \frac{\partial}{\partial x_n}. \quad (2.8)$$

容易验证这里的 Dirac 算子的定义与单位正交基 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 的选取无关, 且 $D^2 = \Delta$.

2.2 Atiyah-Singer 指标定理

为了证明指标定理, Atiyah 和 Singer 将 Dirac 算子的定义推广到了 Riemann 流形上. 考虑一个带有 Riemann 度量 g^{TX} 的定向 Riemann 流形 X . 对任意 $x \in X$, 其切空间 $T_x X$ 和度量 g_x^{TX} 组成了一个内积空间. 记 $C(T_x X)$ 为由此内积空间所诱导的 Clifford 代数. 此时 $C(TX) := \bigsqcup_{x \in X} C(T_x X)$ 组成了 X 上的一个光滑向量丛. 记 ∇^{TX} 是 TX 上由 g^{TX} 诱导的 Levi-Civita 联络.

定义 2.3 设 \mathcal{E} 是 X 上的一个复向量丛. 记 $C^\infty(X, \mathcal{E})$ 为由向量丛 \mathcal{E} 上的所有光滑截面组成的空间. 如果对任意 $x \in X$, 纤维 \mathcal{E}_x 是 $C(T_x X)$ 的 Clifford 表示, 即存在满足 (2.7) 的代数同态

$$c: C(T_x X) \rightarrow \text{End}(\mathcal{E}_x), \quad (2.9)$$

且对任意 $a \in C^\infty(X, C(TX))$, $s \in C^\infty(X, \mathcal{E})$, 有 $c(a)s \in C^\infty(X, \mathcal{E})$, 则称 \mathcal{E} 是一个 Clifford 模. 此时称同态 c 是一个 Clifford 作用. 设 $h^\mathcal{E}$ 是 \mathcal{E} 上的一个 Hermite 度量. 如果对任意 $a \in C^\infty(X, TX)$, $s, s' \in C^\infty(X, \mathcal{E})$, 有

$$h^\mathcal{E}(c(a)s, s') = -h^\mathcal{E}(s, c(a)s'), \quad (2.10)$$

则称 $(\mathcal{E}, h^\mathcal{E})$ 是一个自伴 Clifford 模. 设 $\nabla^\mathcal{E}$ 是 \mathcal{E} 上一个与度量 $h^\mathcal{E}$ 相容的联络. 如果对任意 $U, V \in C^\infty(X, TX)$, 还有

$$[\nabla_U^\mathcal{E}, c(V)] = c(\nabla_U^{TX} V) \quad (2.11)$$

成立, 则称 $\nabla^\mathcal{E}$ 为一个 Clifford 联络. 此时称满足这些条件的

$$\underline{\mathcal{E}} := (\mathcal{E}, h^\mathcal{E}, \nabla^\mathcal{E}) \quad (2.12)$$

是一个 Dirac 丛 (此处采用文献 [142, 定义 5.2] 中的名称).

事实上, 对任意 Riemann 流形, 其上一定存在 Dirac 丛, 但 Dirac 丛不一定唯一.

例 2.1 取 $\mathcal{E} = \Lambda(T^*X) \otimes \mathbb{C}$ 为 X 上外代数丛的复化, 则 \mathcal{E} 上存在 Clifford 作用使其成为 Clifford 模: 对 $a \in TX$, 有

$$c(a) := a^* \wedge -\iota_a \in \text{End}(\Lambda(T^*X) \otimes \mathbb{C}), \quad (2.13)$$

其中 $a^* \in T^*X$ 为 a 的对偶, ι_a 是 a 的缩并. 容易验证这里定义的映射 c 满足 (2.7), 是一个 Clifford 作用. 取 $h^\mathcal{E}$ 为 \mathcal{E} 上由 g^{TX} 诱导的 Hermite 度量, 则 (2.10) 成立. 此时, \mathcal{E} 上由 ∇^{TX} 自然诱导的联络 $\nabla^\mathcal{E}$ 是一个 Clifford 联络.

应用 Dirac 丛 $\underline{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}, h^\mathcal{E}, \nabla^\mathcal{E})$, 类比定义 2.2, 可以将 Dirac 算子推广到 Riemann 流形上. 记 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 为 TX 上的一个局部正交标架.

定义 2.4 给定 Dirac 丛 $\underline{\mathcal{E}}$, Dirac 算子 $D_X^\mathcal{E} : C^\infty(X, \mathcal{E}) \rightarrow C^\infty(X, \mathcal{E})$ 定义为

$$D_X^\mathcal{E} := c(e_1)\nabla_{e_1}^\mathcal{E} + \cdots + c(e_n)\nabla_{e_n}^\mathcal{E}. \quad (2.14)$$

与 Euclid 空间中的定义一样, 此时 Dirac 算子的定义依然与局部正交标架的选取无关. 而且这里定义的 Dirac 算子是一个一阶自伴椭圆微分算子. 当 X 是紧致流形时, $D_X^\mathcal{E}$ 的谱都是点谱且都在实轴上. 注意, 此时 Dirac 算子的平方 $D_X^{\mathcal{E},2}$ 与 Laplace-Beltrami 算子 $\Delta^\mathcal{E}$ 的差是一个曲率项. 一般情形下, 这个曲率项并不消失.

如果 Clifford 模 \mathcal{E} 是一个 \mathbb{Z}_2 分次的向量丛, 即存在复向量丛 \mathcal{E}_+ 和 \mathcal{E}_- , 使得

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_-, \quad (2.15)$$

且向量场的 Clifford 作用当 X 为偶数维时将 \mathcal{E}_\pm 映到 \mathcal{E}_\mp 、当 X 为奇数维时保持 \mathbb{Z}_2 分次不变, 则称 \mathcal{E} 是一个 \mathbb{Z}_2 分次的 Clifford 模. 对于 Dirac 丛 $\underline{\mathcal{E}}$, 若 \mathcal{E}_+ 与 \mathcal{E}_- 在 $h^\mathcal{E}$ 下正交, 且 $\nabla^\mathcal{E}$ 保持分次不变, 则称 $\underline{\mathcal{E}}$ 是一个 \mathbb{Z}_2 分次的 Dirac 丛. 在例 2.1 中, 当 X 为偶数维时, 若取 $\mathcal{E}_+ = \Lambda^{\text{even}}(T^*X) \otimes \mathbb{C}$ 为偶数次外代数丛的复化, 取 $\mathcal{E}_- = \Lambda^{\text{odd}}(T^*X) \otimes \mathbb{C}$ 为奇数次外代数丛的复化, 则 $\underline{\mathcal{E}}$ 是一个 \mathbb{Z}_2 分次的 Dirac 丛.

若 X 为偶数维, 易知 Dirac 算子 $D_X^\mathcal{E}$ 将 $C^\infty(X, \mathcal{E}_\pm)$ 映到 $C^\infty(X, \mathcal{E}_\mp)$. 记 $D_{X,\pm}^\mathcal{E} := D_X^\mathcal{E}|_{C^\infty(X, \mathcal{E}_\pm)}$. 进一步地, 如果 X 是紧致流形, 则 $D_{X,+}^\mathcal{E}$ 是一个 Fredholm 算子, 即 $\ker D_{X,+}^\mathcal{E}$ 和 $\text{coker} D_{X,+}^\mathcal{E}$ 都是有限维线性空间. 由于 $D_X^\mathcal{E}$ 是一个自伴算子, 所以 $\text{coker} D_{X,+}^\mathcal{E} \cong \ker D_{X,-}^\mathcal{E}$. 定义 $D_{X,+}^\mathcal{E}$ 的解析指标为

$$\text{ind}(D_{X,+}^\mathcal{E}) := \dim \ker D_{X,+}^\mathcal{E} - \dim \text{coker} D_{X,+}^\mathcal{E} = \dim \ker D_{X,+}^\mathcal{E} - \dim \ker D_{X,-}^\mathcal{E} \in \mathbb{Z}. \quad (2.16)$$

事实上上式中的解析指标是一个拓扑不变量. 下面的 Atiyah-Singer 指标定理指出这个解析指标可以表示为由曲率决定的微分形式在流形上的积分.

定理 2.1 (Atiyah-Singer 指标定理) 设 X 是一个偶数维定向紧致 Riemann 流形, $\underline{\mathcal{E}}$ 是 X 上的一个 \mathbb{Z}_2 分次的 Dirac 丛, 则解析指标

$$\text{ind}(D_{X,+}^\mathcal{E}) = \int_X \widehat{A}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}(\mathcal{E}/S, \nabla^\mathcal{E}). \quad (2.17)$$

下面给出 (2.17) 中右端微分形式的定义.

设 $V = V_+ \oplus V_-$ 是一个 \mathbb{Z}_2 分次的线性空间. 对 $A \in \text{End}(V)$, 定义 A 的超迹为

$$\text{Tr}_s[A] := \text{Tr}[A|_{V_+}] - \text{Tr}[A|_{V_-}]. \quad (2.18)$$

设 E 是 X 上的一个向量丛. 记 $\Omega^*(X, E) := C^\infty(X, \Lambda^*T^*X \otimes E)$. 设 $\nabla^E : C^\infty(X, E) \rightarrow \Omega^1(X, E)$ 是 E 上的一个联络. 通过 Leibniz 法则, 可将 ∇^E 推广到映射 $\nabla^E : \Omega^*(X, E) \rightarrow \Omega^{*+1}(X, E)$: 对任意 $\alpha \in \Omega^k(X), s \in \Omega^*(X, E)$, 有

$$\nabla^E(\alpha \wedge s) = d\alpha \wedge s + (-1)^k \alpha \wedge \nabla^E s, \quad (2.19)$$

其中 $d\alpha$ 指的是微分形式 α 的外微分. 此时 E 上由 ∇^E 决定的曲率算子定义为

$$R^E := \nabla^E \circ \nabla^E : \Omega^*(X, E) \rightarrow \Omega^{*+2}(X, E). \quad (2.20)$$

事实上有 $R^E \in \Omega^2(X, \text{End}(E))$.

当 $E = TX$ 时, 对切丛上的 Levi-Civita 联络 ∇^{TX} , 定义流形的 \widehat{A} 形式为

$$\widehat{A}(TX, \nabla^{TX}) := \det^{1/2} \left(\frac{-R^{TX}}{4\pi i} \right) \in \Omega^{4*}(X), \quad (2.21)$$

其中 R^{TX} 是 ∇^{TX} 的曲率. 若 E 是一个 \mathbb{Z}_2 分次的复向量丛, 其 Chern 特征形式为

$$\text{ch}(E, \nabla^E) := \text{Tr}_s \left[\exp \left(-\frac{R^E}{2\pi i} \right) \right] \in \Omega^{2*}(X). \quad (2.22)$$

对 \mathbb{Z}_2 分次的 Dirac 丛 $\underline{\mathcal{E}}$, 定义其扭曲率为

$$R^{\mathcal{E}/S} := R^{\mathcal{E}} - \frac{1}{4} \sum_{i,j} \langle R^{TX} e_i, e_j \rangle c(e_i) c(e_j). \quad (2.23)$$

记 $\text{End}_{C(TX)}(\mathcal{E})$ 为由 $\text{End}(\mathcal{E})$ 中与 Clifford 作用超交换的元素组成的空间. 容易验证

$$R^{\mathcal{E}/S} \in \text{End}_{C(TX)}(\mathcal{E}).$$

对 $A \in \text{End}_{C(TX)}(\mathcal{E})$, 定义其相对超迹 $\text{Tr}_s^{\mathcal{E}/S} : \text{End}_{C(TX)}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\text{Tr}_s^{\mathcal{E}/S}[A] := \begin{cases} 2^{-\frac{n}{2}} \text{Tr}_s[\Gamma A], & \text{若 } n = \dim X \text{ 是偶数,} \\ 2^{-\frac{n-1}{2}} \text{Tr}_s[A], & \text{若 } n = \dim X \text{ 是奇数,} \end{cases} \quad (2.24)$$

其中

$$\Gamma = i^{n/2} c(e_1) \cdots c(e_n). \quad (2.25)$$

注意到 $\Gamma^2 = 1$ 且其定义不依赖局部定向单位正交标架的选取. 此时 $\underline{\mathcal{E}}$ 的相对 Chern 特征形式定义为

$$\text{ch}(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}}) := \text{Tr}_s^{\mathcal{E}/S} \left[\exp \left(-\frac{R^{\mathcal{E}/S}}{2\pi i} \right) \right] \in \Omega^{2*}(X). \quad (2.26)$$

2.3 指标定理的应用

本小节考虑一些经典的 Dirac 丛的例子, 从而通过指标定理 (定理 2.1) 推导出引言中提到的那些著名的定理.

2.3.1 Gauss-Bonnet-Chern 定理

首先考虑例 2.1 中的 Dirac 丛. 假设 X 为偶数维, $\mathcal{E} = \Lambda T^*X \otimes \mathbb{C}$, $\mathcal{E}_{+/-} = \Lambda^{\text{even/odd}} T^*X \otimes \mathbb{C}$, $h^{\mathcal{E}}$ 和 $\nabla^{\mathcal{E}}$ 均为由 X 上 Riemann 度量和 Levi-Civita 联络所诱导的度量与联络. 则此时 Dirac 算子

$$D_X^{\mathcal{E}} = d + d^*, \quad (2.27)$$

其中 d^* 是外微分算子 d 的形式伴随. 由经典的 Hodge 定理可知该 Dirac 算子的核空间同构于流形的 de Rham 上调群: 对 $0 \leq k \leq n$, 有

$$\ker D_X^{\mathcal{E}}|_{\Omega^j(X)} \simeq H^j(X) := \ker d|_{\Omega^j(X)} / \text{Im } d|_{\Omega^{j-1}(X)}. \quad (2.28)$$

所以由 (2.16) 和取定的奇偶分次可知

$$\text{ind}(D_{X,+}^{\mathcal{E}}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim H^k(X) =: \chi(X) \quad (2.29)$$

恰为流形 X 的 Euler 数. 而在这种情形下, 计算可得定理 2.1 右端的积分项

$$\widehat{A}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}}) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \text{Pf}(R^{TX}), \quad (2.30)$$

其中 $\text{Pf}(R^{TX})$ 是 $\exp_{\wedge}(\sum_{i<j} \langle R^{TX} e_i, e_j \rangle e_i \wedge e_j)$ 在 $e_i \wedge \cdots \wedge e_j$ 项的系数, $\exp_{\wedge}(x)$ 指的是在指数函数的展开中将乘法替换为外积得到的展开.

应用定理 2.1、(2.29) 和 (2.30), 可以将著名的 Gauss-Bonnet-Chern 定理看作 Atiyah-Singer 指标定理的特例.

定理 2.2 (Gauss-Bonnet-Chern 定理^[94]) 设 X 为 $n = 2k$ 维定向紧致 Riemann 流形, 则其 Euler 数为

$$\chi(X) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^k \int_X \text{Pf}(R^{TX}). \quad (2.31)$$

2.3.2 Hirzebruch 符号差定理

本小节保持 Dirac 丛 \mathcal{E} 与上一小节一致, 仅更改 \mathcal{E} 的分次, 来推导出 Hirzebruch 符号差定理.

取 $\mathcal{E} = \Lambda T^*X \otimes \mathbb{C}$ 的新的 \mathbb{Z}_2 分次为

$$\mathcal{E}_{\pm} := \{s \in \mathcal{E} : \Gamma s = \pm s\} \quad (2.32)$$

并保持其他几何结构不变. 注意到 Γ 与 Dirac 算子可交换, 根据 (2.13) 和 (2.25), 可知 Γ 将 $\ker D_X^{\mathcal{E}}|_{\Omega^k(X)}$ 映到 $\ker D_X^{\mathcal{E}}|_{\Omega^{n-k}(X)}$ 且 Γ 是一个可逆映射. 所以当 $k \neq n/2$ 时,

$$\dim(\ker D_{X,+}^{\mathcal{E}} \cap (\Omega^k(X) \oplus \Omega^{n-k}(X))) = \dim(\ker D_{X,-}^{\mathcal{E}} \cap (\Omega^k(X) \oplus \Omega^{n-k}(X))), \quad (2.33)$$

即

$$\text{ind}(D_{X,+}^{\mathcal{E}}) = \dim(\ker D_X^{\mathcal{E}}|_{\Omega^{n/2}(X)} \cap C^{\infty}(X, \mathcal{E}_+)) - \dim(\ker D_X^{\mathcal{E}}|_{\Omega^{n/2}(X)} \cap C^{\infty}(X, \mathcal{E}_-)). \quad (2.34)$$

考虑双线性函数

$$Q : H^{n/2}(X) \times H^{n/2}(X) \rightarrow \mathbb{R}, \quad ([\alpha], [\beta]) \mapsto \int_X \alpha \wedge \beta. \quad (2.35)$$

由 Poincaré 对偶定理可知 Q 是一个非退化双线性函数. 当 n 是 4 的倍数时, Q 是一个对称非退化双线性函数. 定义 $\sigma(X)$ 为 Q 的符号差, 即对称双线性型 Q 作对角化后对角线上 $+1$ 的个数减去 -1 的个数. 此时 $\sigma(X)$ 是 $4k$ 维定向紧致流形上的一个著名的拓扑不变量.

由 (2.35) 可以验证, 当 $\alpha \in \ker D_X^{\mathcal{E}}|_{\Omega^{n/2}(X)} \cap C^{\infty}(X, \mathcal{E}_+)$ 时, $Q([\alpha], [\alpha]) > 0$; 当 $\alpha \in \ker D_X^{\mathcal{E}}|_{\Omega^{n/2}(X)} \cap C^{\infty}(X, \mathcal{E}_-)$ 时, $Q([\alpha], [\alpha]) < 0$. 故由 (2.34) 可知

$$\text{ind}(D_{X,+}^{\mathcal{E}}) = \sigma(X). \quad (2.36)$$

在这种情形下, 计算可得定理 2.1 右端的积分项

$$\widehat{A}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}}) = 2^{n/2} \det^{1/2} \left(\frac{-R^{TX}/4\pi i}{\tanh(-R^{TX}/4\pi i)} \right). \quad (2.37)$$

记

$$L(TX, \nabla^{TX}) := \det^{1/2} \left(\frac{-R^{TX}/2\pi i}{\tanh(-R^{TX}/2\pi i)} \right). \quad (2.38)$$

注意到 (2.37) 与 (2.38) 的右端的微分形式在最高次时相等. 应用定理 2.1, 得到 Hirzebruch 符号差定理.

定理 2.3 (Hirzebruch 符号差定理^[133]) 设 X 是 $n = 4k$ 维定向紧致 Riemann 流形, 则其符号差

$$\sigma(X) = \int_X L(TX, \nabla^{TX}). \quad (2.39)$$

2.3.3 Hirzebruch-Riemann-Roch 定理

下面考察例 2.1 在复流形时的类比. 设 X 是一个带有 Hermite 度量的紧致复流形, 则其切丛的复化有保度量分解

$$TX \otimes \mathbb{C} = T^{(1,0)}X \oplus T^{(0,1)}X \quad (2.40)$$

且 $T^{(1,0)}X$ 是 X 上的全纯向量丛. 设 E 是一个带有 Hermite 度量的全纯向量丛. 记 ∇^E 为 E 上的 Chern 联络, 即 E 上唯一的保度量全纯联络. 此时取 \mathbb{Z}_2 分次 Clifford 模 $\mathcal{E} = \Lambda T^{(0,1)*}X \otimes E$, $\mathcal{E}_{+/-} = \Lambda^{\text{even/odd}} T^{(0,1)*}X \otimes E$. 其对应的 Dirac 丛中的度量、联络均由 X 与 E 上的度量、联络诱导而得.

对全纯向量丛 E , 记 $\Omega^{p,q}(M, E) = C^\infty(X, \Lambda^p T^{(1,0)*}X \otimes \Lambda^q T^{(0,1)*}X \otimes E)$. 记 $\bar{\partial}^E : \Omega^{p,q}(M, E) \rightarrow \Omega^{p,q+1}(M, E)$ 为 E 上经典的 $\bar{\partial}$ -算子, 其对应的 Dolbeault 上调为

$$H^{p,q}(M, E) := \ker \bar{\partial}^E|_{\Omega^{p,q}(X,E)} / \text{Im} \bar{\partial}^E|_{\Omega^{p,q-1}(X,E)}. \quad (2.41)$$

令 $\bar{\partial}^{E,*}$ 为 $\bar{\partial}^E$ 的形式伴随. 类比 (2.27), 定义

$$D = \sqrt{2}(\bar{\partial}^E + \bar{\partial}^{E,*}). \quad (2.42)$$

同样, 由 Hodge 定理可知

$$\ker D|_{\Omega^{0,q}(X,E)} \simeq H^{0,q}(M, E). \quad (2.43)$$

类比于 (2.29), 有

$$\text{ind}(D_+) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H^{0,i}(X, E) =: \chi(X, E). \quad (2.44)$$

当 X 是 Kähler 流形时, (2.42) 中的 D 恰好是此时 Dirac 丛 $\underline{\mathcal{E}}$ 对应的 Dirac 算子 $D_X^{\underline{\mathcal{E}}}$. 当 X 不是 Kähler 流形时, 一般情形下 $D \neq D_X^{\underline{\mathcal{E}}}$. 但是, 我们有

$$\text{ind}(D_{X,+}^{\underline{\mathcal{E}}}) = \text{ind}(D_+). \quad (2.45)$$

在这种情形下, 计算可得定理 2.1 右端的积分项

$$\widehat{A}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}}) = \text{Td}(T^{1,0}X, \nabla^{TX}) \text{ch}(E, \nabla^E), \quad (2.46)$$

其中

$$\text{Td}(T^{1,0}X, \nabla^{TX}) := \det \left(\frac{-R^{T^{1,0}X}/2\pi i}{\exp(-R^{T^{1,0}X}/2\pi i) - 1} \right), \quad (2.47)$$

$R^{T^{1,0}X}$ 为 $T^{(1,0)}X$ 上的 Chern 联络对应的曲率. 所以应用定理 2.1, 综合 (2.44)–(2.46), 可以得到下面的 Hirzebruch-Riemann-Roch 定理.

定理 2.4 (Hirzebruch-Riemann-Roch 定理 [18, 133]) 设 X 是一个紧致复流形, E 是 X 上的一个全纯向量丛, 则有

$$\chi(X, E) = \int_X \text{Td}(T^{1,0}X, \nabla^{TX}) \text{ch}(E, \nabla^E). \quad (2.48)$$

注 2.1 Hirzebruch [133] 只对代数流形证明了定理 2.4. Atiyah 和 Singer [18] 应用指标定理将 (2.48) 推广到了复流形情形.

2.3.4 Spin 流形与旋量丛

在 Clifford 模的定义中, 一般情形下我们并不要求 (2.9) 是 Clifford 代数 $C(T_x X)$ 的不可约表示. 事实上, 前面几个例子中的 Clifford 表示都不是不可约表示. 但注意到当 X 为偶数维时, $C(T_x X)$ 的不可约复表示是唯一的²⁾. 如果 Clifford 模 \mathcal{E} 的每个纤维都是这个不可约表示, 则这个 Clifford 模一定会有特殊的意义. 不幸的是, 一般情形下这样的 Clifford 模并不存在, 即 $\bigsqcup_{x \in X} \mathcal{E}_x$ 并不能拼接成复向量丛, 存在拓扑障碍. 但可以证明当 X 是一个 spin (自旋) 流形, 即 X 的第二个 Stiefel-Whitney 示性类 $\omega_2(TX) = 0$ 时, 这样的 Clifford 模存在. 记这个 Clifford 模为 $S(TX)$, 称其为 X 上的旋量丛. 此时旋量丛 $S(TX)$ 上存在经典的 Dirac 丛结构. 如果 X 是偶数维的, 则这个 Dirac 丛是 \mathbb{Z}_2 分次的.

这里列举一些经典的 spin 流形 (参见文献 [142, §II.2]).

- 所有 2- 连通流形, 如同伦球和 Stiefel 流形等;
- 切丛稳定平凡 (即直和某平凡丛后平凡) 的流形, 如两个 Euclid 空间之间的光滑映射的正则值原像、所有 Lie 群、所有小于等于三维的定向流形等;
- 复流形 X 是 spin 流形当且仅当第一 Chern 类 $c_1(T^{(1,0)}X) \equiv 0 \pmod{2}$;
- 射影空间 $\mathbb{R}P^n$ 是 spin 流形当且仅当 $n \equiv 3 \pmod{4}$, $\mathbb{C}P^n$ 是 spin 流形当且仅当 $n \equiv 1 \pmod{2}$;
- Spin 流形的边界是 spin 流形.

设 E 是 X 上的一个复向量丛, h^E 是 E 上的 Hermite 度量, ∇^E 是 E 上与 h^E 相容的联络. 记

$$\underline{E} = (E, h^E, \nabla^E) \quad (2.49)$$

并称其为 X 上的一个几何三元组. 若 $E = E_+ \oplus E_-$ 是 \mathbb{Z}_2 分次的且 E_+ 与 E_- 关于 h^E 正交, ∇^E 保持 \mathbb{Z}_2 分次不变, 则称 \underline{E} 是一个 \mathbb{Z}_2 分次的几何三元组.

2) 当 X 为奇数维时, $C(T_x X)$ 有两个互不等价的不可约复表示, 但我们可以选取其中一个.

对 spin 流形 X 上任意的 \mathbb{Z}_2 分次 Dirac 丛 \mathcal{E} , 都存在 \mathbb{Z}_2 分次的几何三元组 E , 使得 $\mathcal{E} = S(TX) \hat{\otimes} E^3$ 且 $h^\mathcal{E}$ 和 $\nabla^\mathcal{E}$ 由 X 与 E 上的度量联络所诱导. 注意到此时

$$\text{ch}(\mathcal{E}/S, \nabla^\mathcal{E}) = \text{ch}(E, \nabla^E). \tag{2.50}$$

所以定理 2.1 简化为如下定理:

定理 2.5 设 X 是一个偶数维定向紧致 spin 流形, 则

$$\text{ind}(D_{X,+}^\mathcal{E}) = \int_X \widehat{A}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}(E, \nabla^E). \tag{2.51}$$

当 X 为 spin 流形时, 有

$$\Lambda^*(T^*X) \otimes \mathbb{C} \simeq S(TX) \hat{\otimes} S(TX)^*. \tag{2.52}$$

假设 X 是偶数维的. 当将 $S(TX)^*$ 看作由 $S(TX)$ 的 \mathbb{Z}_2 分次诱导的 \mathbb{Z}_2 分次向量丛时, $\Lambda^*(T^*X) \otimes \mathbb{C}$ 的分次恰对应于第 2.3.1 小节中的分次; 当将 $S(TX)^*$ 看作不分次的向量丛时, $\Lambda^*(T^*X) \otimes \mathbb{C}$ 的分次恰对应于第 2.3.2 小节中的分次.

2.3.5 Spin^c 流形

在上一小节中, 我们看到 spin 流形的拓扑限制较强. 在实际问题中经常将 spin 条件放松到 spin^c 条件.

设 F 是 X 上的一个实向量丛, 若存在 X 上的复线丛 L , 使得 $\omega_2(F) \equiv c_1(L) \pmod{2}$, 则称 F 上存在 spin^c 结构. 若 TX 上存在 spin^c 结构, 则称 X 是一个 spin^c 流形. 对于 spin^c 流形 X , 其上有一个经典的 Clifford 模 $S(TX, L)$ (也称其为旋量丛), 带有经典的 Dirac 丛结构 (参见文献 [142, 附录 D]). 如果 X 是偶数维的, 此 Dirac 丛也是 \mathbb{Z}_2 分次的. 若 X 是 spin 流形, 则有

$$S(TX, L) \cong S(TX) \otimes L^{1/2}. \tag{2.53}$$

注意到所有 spin 流形都是 spin^c 流形. 事实上所有近复流形、 $\mathbb{R}\mathbb{P}^{4n+1}$ 与所有 4 维定向流形也都是 spin^c 流形.

类似于 spin 流形, 对 spin^c 流形 X 上任意的 \mathbb{Z}_2 分次 Dirac 丛 \mathcal{E} , 都存在 \mathbb{Z}_2 分次的几何三元组 E 和 L 上的 Hermite 度量、与度量相容的联络 ∇^L , 使得 $\mathcal{E} = S(TX, L) \hat{\otimes} E$ 且 $h^\mathcal{E}$ 和 $\nabla^\mathcal{E}$ 为诱导的度量和联络.

定理 2.6 设 X 是一个偶数维紧致定向 spin^c 流形, 则有

$$\text{ind}(D_{X,+}^\mathcal{E}) = \int_X \widehat{A}(TX, \nabla^{TX}) \exp\left(\frac{1}{2}c_1(L, \nabla^L)\right) \text{ch}(E, \nabla^E), \tag{2.54}$$

其中

$$c_1(L, \nabla^L) = \frac{i}{2\pi} R^L. \tag{2.55}$$

记

$$\text{Td}(TX, L) = \widehat{A}(TX, \nabla^{TX}) \exp\left(\frac{1}{2}c_1(L, \nabla^L)\right). \tag{2.56}$$

3) 对于两个 \mathbb{Z}_2 分次空间 A 和 B , 它们的分次张量积 $A \hat{\otimes} B$ 也是一个 \mathbb{Z}_2 分次的空间:

$$(A \hat{\otimes} B)_+ = (A_+ \otimes B_+) \oplus (A_- \otimes B_-), \quad (A \hat{\otimes} B)_- = (A_+ \otimes B_-) \oplus (A_- \otimes B_+).$$

2.4 局部指标定理

本小节介绍引言中提到的局部指标定理. 为了解释局部指标定理, 我们需要对流形的热核作简要介绍.

给定偶数维紧致 Riemann 流形 X 上的 \mathbb{Z}_2 分次 Dirac 丛 $\underline{\mathcal{E}}$, 考虑热方程

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} + D_X^{\mathcal{E};2} \right) u(t, x) = 0, & t > 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = u(x). \end{cases} \quad (2.57)$$

可以证明当 $u \in L^2(X, \mathcal{E})$ 时, 热方程 (2.57) 存在唯一解 $u(t, x) \in L^2(X, \mathcal{E})$, $t > 0$. 定义热算子

$$\exp(-tD_X^{\mathcal{E};2}) : L^2(X, \mathcal{E}) \rightarrow L^2(X, \mathcal{E}), \quad u(x) \mapsto u(t, x). \quad (2.58)$$

记 $\exp(-tD_X^{\mathcal{E};2})(x, y) \in \mathcal{E}_x \otimes \mathcal{E}_y^*$ 为热算子 $\exp(-tD_X^{\mathcal{E};2})$ 的核函数, 即对任意 $u(x) \in L^2(X, \mathcal{E})$, 有

$$(\exp(-tD_X^{\mathcal{E};2})u)(x) = \int_{y \in X} \exp(-tD_X^{\mathcal{E};2})(x, y)u(y)dy, \quad (2.59)$$

其中 dy 指代 Riemann 流形 X 上的 Riemann 体积形式. 此时称 $\exp(-tD_X^{\mathcal{E};2})(x, y)$ 为热核. 可以证明热核 $\exp(-tD_X^{\mathcal{E};2})(x, y)$ 光滑依赖于 x, y 和 $t > 0$. 当 $y = x$ 时, 有

$$\exp(-tD_X^{\mathcal{E};2})(x, x) \in \mathcal{E}_x \otimes \mathcal{E}_x^* \cong \text{End}(\mathcal{E}_x).$$

由核函数的经典性质, 有

$$\text{Tr}_s[\exp(-tD_X^{\mathcal{E};2})] = \int_X \text{Tr}_s[\exp(-tD_X^{\mathcal{E};2})(x, x)]dx. \quad (2.60)$$

对于热算子, 有如下的 McKean-Singer 公式 [162]: 对任意 $t > 0$, 有

$$\text{ind}(D_{X,+}^{\mathcal{E}}) = \text{Tr}_s[\exp(-tD_X^{\mathcal{E};2})]. \quad (2.61)$$

事实上, 由谱理论的知识, 有

$$\text{ind}(D_{X,+}^{\mathcal{E}}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Tr}_s[\exp(-tD_X^{\mathcal{E};2})]. \quad (2.62)$$

此时, (2.61) 可由重要的观察

$$\frac{d}{dt} \text{Tr}_s[\exp(-tD_X^{\mathcal{E};2})] = 0 \quad (2.63)$$

得到. 另外, 当 $t \rightarrow 0^+$ 时, 有热核的渐近展开 (参见文献 [167, 178] 和 [26, 第 2 章])

$$\exp(-tD_X^{\mathcal{E};2})(x, x) \sim \sum_{k=-n/2}^{\infty} a_k t^k, \quad (2.64)$$

其中系数 $a_k \in \text{End}(\mathcal{E}_x)$ 由曲率及其各阶导数决定.

通过比较第 2.3.1 小节情形下的 (2.60)–(2.64) 与 Gauss-Bonnet-Chern 定理, McKean 和 Singer [162] 猜测相对于第 2.3.1 节中的情形, 当 $k < 0$ 时 $\text{Tr}_s[a_k] = 0$, 且 $\text{Tr}_s[a_0]dx = [(-2\pi)^{-n/2} \text{Pf}(R^{TX})]_{(n)}$, 并在 $n = 2$ 时证明了这个猜测. 在一般情形, 大家自然猜测在定理 2.1 的假设下仍然有

$$\text{Tr}_s[a_k] = 0, \quad k < 0, \quad (2.65)$$

且

$$\mathrm{Tr}_s[a_0]dx = [\widehat{A}(TX, \nabla^{TX})\mathrm{ch}(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}})]_{(n)}. \quad (2.66)$$

这一猜想被称为“奇迹消除 (miraculous cancellation) 猜想”.

当 $n = 2$ 时, 对应于 Riemann 曲面的这个猜想由 Kotake^[139] 证明. 相对于第 2.3.1 小节中情形的高维奇迹消除猜想由 Patodi^[171] 计算得到. Patodi^[172] 还证明了相对于第 2.3.3 小节中情形的高维奇迹消除猜想并指出第 2.3.2 节中情形也可被证明. 随后, Gilkey^[123-125] 应用不变量理论也得到了对应的结果. Atiyah 等^[9] 结合前面的方法证明了 Dirac 算子的奇迹消除猜想. Yu^[190] 应用与 Patodi^[171] 相近的方法给出了 Dirac 算子奇迹消除猜想的直接证明. 此猜想被证明后也被称为局部指标定理. 受益于理论物理的发展^[2, 119, 187], 到目前为止, 局部指标定理还有多种直接证明^[28, 32, 121, 122], 由 Bismut, Getzler 和 Berline-Vergne 等分别给出.

定理 2.7 (局部指标定理) 记 $[\alpha]_{(n)}$ 为微分形式 α 在 n 形式上的分量, 则有

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathrm{Tr}_s[\exp(-tD_X^{\mathcal{E};2})(x, x)]dx = [\widehat{A}(TX, \nabla^{TX})\mathrm{ch}(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}})]_{(n)}. \quad (2.67)$$

显然, 局部指标定理是 Atiyah-Singer 指标定理的加强. 在对热核作一个合适的局部化之后, 局部指标定理会真正地变成一个局部的问题. 所以在处理局部指标定理相关的问题时, 经常可以假设流形有非常好的拓扑性质, 例如假设流形是 spin 流形. 在很多情形下, 如果一个局部指标问题对 spin 流形成立, 则对一般的 Dirac 丛也会成立.

3 指标定理的各种推广

本节讨论指标定理与局部指标定理的各种推广. 本节内容安排如下. 第 3.1 小节介绍相对于紧 Lie 群中一个元素作用的等变指标定理. 第 3.2 小节解释联系等变指标与群作用不动子流形上指标的局部化公式. 第 3.3 小节引入相对于 Lie 代数中元素作用的等变指标定理 (Kirillov 公式) 并讨论第 3.1 小节中的等变指标定理与 Kirillov 公式的共同推广. 第 3.4 小节介绍带边流形的 APS 指标定理并讨论其在第 3.1 和 3.3 小节的等变情形下的推广. 第 3.5 小节介绍指标定理的算子簇推广、引入 Bismut-Cheeger η -形式并讨论第 3.1-3.4 小节中定理的算子簇推广.

3.1 等变指标定理

首先考察流形带一个光滑紧 Lie 群作用的情形.

令 G 是一个紧 Lie 群. 假设定向流形 X 上有一个光滑的 G 作用, 即存在光滑映射

$$\varphi: G \times X \rightarrow X \quad (3.1)$$

使得对任意 $g_1, g_2 \in G, x \in X$, 有

$$\varphi(g_1, \varphi(g_2, x)) = \varphi(g_1 g_2, x). \quad (3.2)$$

固定 $g \in G$, 有微分同胚 $\varphi_g: X \rightarrow X, x \mapsto \varphi(g, x)$. 简记 $gx := \varphi_g(x), g_* := \varphi_{g,*}$ 且总假设对任意 $g \in G, \varphi_g$ 保持流形的定向不变.

设 g^{TX} 是 X 上的 Riemann 度量. 我们总可以假设 g^{TX} 是 G 作用不变的, 即对任意 $h \in G$, $U_1, U_2 \in TX$, 有

$$g^{TX}(h_*U_1, h_*U_2) = g^{TX}(U_1, U_2). \quad (3.3)$$

实际上, 任取 Riemann 度量 g^{TX} ,

$$g(U_1, U_2) := \int_{h \in G} g^{TX}(h_*U_1, h_*U_2) dh, \quad U_1, U_2 \in TX \quad (3.4)$$

就是一个 G 不变度量. 此处 dh 是 G 上的 Haar 测度.

设 \mathcal{E} 是 X 上的一个 \mathbb{Z}_2 分次的 Dirac 丛. 假设 $\pi: \mathcal{E} \rightarrow X$ 是一个 G 等变复向量丛, 即 \mathcal{E} 作为流形有一个光滑的 G 作用且对任意 $v \in \mathcal{E}$, $x \in X$, $v_1, v_2 \in \mathcal{E}_x := \pi^{-1}(x)$, $g \in G$, 有

$$\pi(gv) = g\pi(v), \quad g(v_1 + v_2) = gv_1 + gv_2. \quad (3.5)$$

假设 Clifford 作用与群作用可换, 即对任意 $x \in X$, $U \in T_x X$, $v \in \mathcal{E}_x$, $g \in G$, 有

$$g(c(U)v) = c(g_*U)(gv). \quad (3.6)$$

对 $s \in C^\infty(X, \mathcal{E})$, 定义

$$(gs)(x) := g \circ s(g^{-1}x), \quad \forall x \in X. \quad (3.7)$$

则 gs 也是 \mathcal{E} 上的光滑截面. 对于 \mathcal{E} 上的几何结构, 假设 $h^\mathcal{E}$ 是 G 作用不变的, 且假设 $\nabla^\mathcal{E}$ 在 G 作用下不变, 即对任意 $U \in C^\infty(X, TX)$, $s \in C^\infty(X, \mathcal{E})$, $g \in G$, 有

$$g(\nabla_U^\mathcal{E} s) = \nabla_{g_*U}^\mathcal{E}(gs). \quad (3.8)$$

称满足上面这些假设的 \mathcal{E} 为等变 Dirac 丛. 如果 \mathcal{E} 是 \mathbb{Z}_2 分次的且 G 作用保持 \mathbb{Z}_2 分次不变, 则称 \mathcal{E} 是一个 \mathbb{Z}_2 分次的等变 Dirac 丛.

如果流形 X 上有一个光滑的紧 Lie 群作用, 则例 2.1 中的 Clifford 模上自然诱导了一个群作用使得该处的几何结构组成一个等变 Dirac 丛. 注意到此时第 2.3.1 和 2.3.2 小节中的 \mathbb{Z}_2 分次均被群作用保持. 所以这两个例子中的 Dirac 丛都是 \mathbb{Z}_2 分次的等变 Dirac 丛. 对于复流形, 也有类似的结果. 对于 spin (或 spin^c) 流形 X , 如果 X 上有一个光滑的保持 spin (或 spin^c) 结构不变的紧 Lie 群作用, 则其在旋量丛上自然诱导了一个紧 Lie 群作用, 使得旋量丛对应的几何组成了一个等变 Dirac 丛. 所以虽然群作用情形的假设相对较多, 但这些假设在上一节的几个主要范例中是非常自然的.

当群作用满足前面的假设时, 它与 Dirac 算子 $D_X^\mathcal{E}$ 可交换. 所以当 X 为紧致流形时, $\ker D_{X,+}^\mathcal{E}$ 和 $\ker D_{X,-}^\mathcal{E}$ 均为群 G 的有限维表示空间. 此时对 $g \in G$, 可以定义群作用的等变指标.

定义 3.1 对 $g \in G$, 定义等变指标

$$\text{ind}_g(D_{X,+}^\mathcal{E}) := \text{Tr}_s|_{\ker D_X^\mathcal{E}}[g] = \text{Tr}|_{\ker D_{X,+}^\mathcal{E}}[g] - \text{Tr}|_{\ker D_{X,-}^\mathcal{E}}[g] \in \mathbb{C}. \quad (3.9)$$

由于 $\ker D_{X,\pm}^\mathcal{E}$ 都是有限维线性空间, 所以 $\text{ind}_g(D_{X,+}^\mathcal{E})$ 可以看作 $g \in G$ 的光滑函数. 当 g 为单位元 $e \in G$ 时, 等变指标自然退化为标准的指标. 与标准指标类似, 等变指标也可写作微分形式的积分, 但此时积分区域变成了群作用的不动点集. 对 $g \in G$, 不动点集

$$X^g := \{x \in X : gx = x\} \quad (3.10)$$

是 X 的一个全测地子流形. 我们总假设 X^g 是可定向的. 事实上, 如果 X 是 spin (或 spin^c) 流形且群作用保持 spin (或 spin^c) 结构不变, 则 X^g 一定可定向.

下面给出紧 Lie 群作用下的等变指标公式. 为了不喧宾夺主, 首先应用局部指标理论给出证明的概要, 然后介绍积分项的具体定义. 在本节中, 这一套应用局部指标理论处理问题的方法会反复出现. 读者可以通过这个多次重复的过程了解局部指标理论应用的一种基础逻辑.

定理 3.1 (等变指标定理) 对 $g \in G$, 有

$$\text{ind}_g(D_{X,+}^{\mathcal{E}}) = \int_{X^g} \widehat{A}_g(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}_g(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}}). \quad (3.11)$$

证明 对应于 (2.61), 对任意 $t > 0$, 有

$$\text{ind}_g(D_{X,+}^{\mathcal{E}}) = \text{Tr}_s[g \exp(-tD_X^{\mathcal{E};2})]. \quad (3.12)$$

此时对应于 (2.60), 有

$$\text{Tr}_s[g \exp(-tD_X^{\mathcal{E};2})] = \int_X \text{Tr}_s[g \exp(-tD_X^{\mathcal{E};2})(g^{-1}x, x)] dx. \quad (3.13)$$

对于热核 $\exp(-tD_X^{\mathcal{E};2})(x, y)$, 存在常数 $C_1, C_2 > 0$, 使得对任意 $x, y \in X, t > 0$, 有

$$|\exp(-tD_X^{\mathcal{E};2})(x, y)| < C_1 e^{-C_2 d^2(x,y)/t}. \quad (3.14)$$

由 (3.14) 可以看到, 当 $x \neq y, t \rightarrow 0$ 时, $\exp(-tD_X^{\mathcal{E};2})(x, y) \rightarrow 0$. 所以当 $t \rightarrow 0$ 时, 若 $x \notin X^g$, 则

$$\exp(-tD_X^{\mathcal{E};2})(g^{-1}x, x) \rightarrow 0.$$

事实上可以证明

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_X \text{Tr}_s[g \exp(-tD_X^{\mathcal{E};2})(g^{-1}x, x)] dx = \int_{X^g} \widehat{A}_g(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}_g(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}}). \quad (3.15)$$

综合 (3.12)–(3.15), 得到 (3.11). □

当不动点集为一个由有限个点组成的离散点集时, 此定理最早作为 Lefschetz 不动点公式的推广由 Atiyah 和 Bott [6–8] 证明 (也称为 Atiyah-Bott 不动点公式). Atiyah 和 Segal [17] 应用 K 理论将不动点公式推广到了不动子流形情形并将其写作等变指标公式 (其应用参见文献 [20]). 而局部等变指标公式最早由 Patodi [173] 针对 $\bar{\partial}$ 算子提出. 随后等变符号差情形由 Donnelly 和 Patodi [112] 证明. 一般情形的证明可参见文献 [28, 33, 141].

下面给出 (3.11) 右端微分形式的定义 (参见文献 [26, 第 6 章]).

记 $N_{X^g/X}$ 为 X^g 在 X 中的法丛, 则法丛上 g 作用的微分是一个等距映射 $dg : N_{X^g/X} \rightarrow N_{X^g/X}$. 由于 G 是紧群, 所以存在 X^g 上的实向量丛的正交分解

$$TX|_{X^g} = TX^g \oplus N_{X^g/X} = TX^g \oplus \bigoplus_{0 < \theta \leq \pi} N(\theta), \quad (3.16)$$

其中 $dg|_{N(\pi)} = -\text{id}$ 且对 $0 < \theta < \pi$, $N(\theta)$ 上存在复结构使得 dg 作用等于数乘 $e^{i\theta}$. 由于 g 保持 TX 的度量与定向不变, 所以有 $\det(dg|_{N(\pi)}) = 1$. 所以此处 $N(\pi)$ 与 $N_{X^g/X}$ 都是偶数维实向量丛.

由于 ∇^{TX} 与群作用交换, 所以 $\nabla^{TX}|_{X^g}$ 保持 (3.16) 的分解不变. 记 ∇^{TX^g} 和 $\nabla^{N(\theta)}$ 分别为对应的 TX^g 和 $N(\theta)$ 上的联络, 记 R^{TX^g} 和 $R^{N(\theta)}$ 为对应的曲率.

定义

$$\begin{aligned} \widehat{A}_g(TX, \nabla^{TX}) &= \det^{1/2} \left(\frac{-R^{TX^g}/4\pi i}{\sinh(-R^{TX^g}/4\pi i)} \right) \\ &\times \prod_{0 < \theta \leq \pi} \left(i^{\frac{1}{2} \dim N(\theta)} \det^{1/2} \left(1 - g \exp \left(-\frac{R^{N(\theta)}}{2\pi i} \right) \right) \right)^{-1} \in \Omega^*(X^g, \mathbb{C}), \end{aligned} \quad (3.17)$$

其中 (3.17) 中的正负号由下面关系确定: $\prod_{0 < \theta \leq \pi}$ 中的 0 阶项等于 $(e^{i\theta/2}/(e^{i\theta} - 1))^{\frac{1}{2} \dim N(\theta)}$.

注意到限制在不动点 X^g 上时,

$$\text{End}(\mathcal{E}|_{X^g}) \simeq C(TX|_{X^g}) \otimes \text{End}_{C(TX)}(\mathcal{E}|_{X^g}) \simeq C(TX^g|_{X^g}) \widehat{\otimes} C(N_{X^g/X}) \otimes \text{End}_{C(TX)}(\mathcal{E}|_{X^g}). \quad (3.18)$$

所以作用在 $\mathcal{E}|_{X^g}$ 上, 有 $g \in C(N_{X^g/X}) \otimes \text{End}_{C(TX)}(\mathcal{E})$. 令 $\ell = \dim X^g$, $k = n - \ell$. 设 $\{e_1, \dots, e_k\}$ 为 $N_{X^g/X}$ 的局部定向正交基, 则

$$g = \sum_{s=0}^k \sum_{i_1 < \dots < i_s} g^{i_1 \dots i_s} c(e_{i_1}) \cdots c(e_{i_s}) \otimes A_{i_1 \dots i_s}, \quad (3.19)$$

其中 $g^{i_1 \dots i_s} \in \mathbb{C}$, $A_{i_1 \dots i_s} \in \text{End}_{C(TX)}(\mathcal{E})$. 定义

$$\sigma(g) = g^{1 \dots k} A_{1 \dots k}. \quad (3.20)$$

此时等变相对 Chern 特征定义为

$$\text{ch}_g(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}}) := \frac{2^{k/2}}{\det^{1/2}(1 - g|_{N_{X^g/X}})} \text{Tr}_s^{\mathcal{E}/S} \left[\sigma(g) \exp \left(-\frac{R^{\mathcal{E}/S}|_{X^g}}{2\pi i} \right) \right] \in \Omega^*(X^g, \mathbb{C}). \quad (3.21)$$

若 X 是 spin 流形, 则

$$\text{ch}_g(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}}) = \text{ch}_g(E, \nabla^E) := \text{Tr}_s \left[g \exp \left(-\frac{R^E|_{X^g}}{2\pi i} \right) \right]. \quad (3.22)$$

3.2 指标的局部化公式

在定理 3.1 中, 注意到对于等变指标, 其指标定理的右端是流形上群作用不动子流形上的积分. 实际上, Atiyah 和 Segal [17] 指出, 这个不动子流形上的积分也可以写成这个子流形上某个 Dirac 算子的指标. Liu 等 [152–154] 进一步发现, 当群为 S^1 时, 不仅是等变指标, 而且指标按权分解后的每一部分都对应了不动子流形上某个 Dirac 算子的指标.

假设 X 为一个偶数维紧致 spin^c 流形, 带有一个光滑的 S^1 - 作用. 记 L 为由 spin^c 结构决定的复线丛. 假设 S^1 - 作用保持 spin^c 结构不变. 此时 L 是一个等变复线丛且旋量丛 $S(TX, L)$ 是一个等变复向量丛. 记

$$X^{S^1} := \{x \in X : gx = x, \forall g \in S^1\}. \quad (3.23)$$

记 $X^{S^1} = \bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}^{S^1}$ 为其连通分支的不交并. 记 N_{α} 为 $X_{\alpha}^{S^1}$ 在 X 中的法丛, 则有 $N_{\alpha} = \bigoplus_{v>0} N_{\alpha,v}$ 且 $N_{\alpha,v}$ 上存在复结构使得对任意 $g \in S^1$, dg 作用等于数乘 g^v . 此时 $X_{\alpha}^{S^1}$ 也是一个紧致 spin^c 流形, 带有复线丛

$$L_{\alpha} = L|_{X_{\alpha}^{S^1}} \otimes \det N_{\alpha}^{-1}. \tag{3.24}$$

对于旋量丛, 有

$$S(TX, L)|_{X_{\alpha}^{S^1}} = S(TX_{\alpha}^{S^1}, L_{\alpha}) \otimes \Lambda(\overline{N_{\alpha}^*}). \tag{3.25}$$

设 E 是 X 上的一个等变复向量丛, 则限制在 $X_{\alpha}^{S^1}$ 上, 有

$$E|_{X_{\alpha}^{S^1}} = \bigoplus_v E_{\alpha,v}, \tag{3.26}$$

其中 $g \in S^1$ 作用到 $E_{\alpha,v}$ 上为数乘 g^v . 令 \mathcal{E} 是 X 上的一个 Dirac 丛使得 $\mathcal{E} = S(TX, L) \otimes E$.

前面提到过, 由于 Dirac 算子与群作用可换, 因此 $\ker D_{X,\pm}^{\mathcal{E}}$ 都是有限维 S^1 -表示. 所以有表示的分解 $\ker D_{X,\pm}^{\mathcal{E}} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \ker D_{\pm,m}$, 其中 $g \in S^1$ 作用到 $\ker D_{\pm,m}$ 上为数乘 g^m . 令

$$\text{ind}(D_{X,+}^{\mathcal{E}}, m) := \dim \ker D_{+,m} - \dim \ker D_{-,m}, \tag{3.27}$$

则有

$$\text{ind}_g(D_{X,+}^{\mathcal{E}}) = \sum_m \text{ind}(D_{X,+}^{\mathcal{E}}, m) \cdot g^m.$$

记 $\text{Sym}^k(E)$ 为 E 的 k 次对称张量积, $\Lambda^k(E)$ 为 E 的 k 次外代数丛. 定义

$$\text{Sym}_t(E) = 1 + \sum_{k>0} \text{Sym}^k(E) \cdot t^k, \quad \lambda_t(E) = 1 + \sum_{k>0} \Lambda^k(E) \cdot t^k. \tag{3.28}$$

记 $g \in S^1$ 在 L_{α} 上的作用为数乘 $g^{l_{\alpha}}$, 令

$$\begin{aligned} R(q) &= q^{\frac{1}{2} \sum_v v \cdot \dim_{\mathbb{C}} N_{\alpha,v} + \frac{1}{2} l_{\alpha}} \bigotimes_{v>0} (\text{Sym}_{q^v}(N_{\alpha,v}) \otimes \det N_v) \otimes \left(\sum_v E_{\alpha,v} q^v \right) =: \sum_k R_{\alpha,k} q^k, \\ R'(q) &= q^{-\frac{1}{2} \sum_v v \cdot \dim_{\mathbb{C}} N_{\alpha,v} + \frac{1}{2} l_{\alpha}} \bigotimes_{v>0} \text{Sym}_{q^{-v}}(\overline{N_{\alpha,v}}) \otimes \left(\sum_v E_{\alpha,v} q^v \right) =: \sum_k R'_{\alpha,k} q^k. \end{aligned} \tag{3.29}$$

定理 3.2 (指标的局部化公式^[152–154]) 对 $m \in \mathbb{Z}$, 有

$$\begin{aligned} \text{ind}(D_{X,+}^{\mathcal{E}}, m) &= \sum_{\alpha} (-1)^{\dim_{\mathbb{C}} N_{\alpha}} \text{ind}(D_{X_{\alpha}^{S^1},+}^{S(TX_{\alpha}^{S^1}, L_{\alpha}) \otimes R_{\alpha,m}}) \\ &= \sum_{\alpha} \text{ind}(D_{X_{\alpha}^{S^1},+}^{S(TX_{\alpha}^{S^1}, L_{\alpha}) \otimes R'_{\alpha,m}}). \end{aligned} \tag{3.30}$$

进一步地, 对 $g \in S^1$, 有

$$\begin{aligned} \text{ind}_g(D_{X,+}^{\mathcal{E}}) &= \sum_{\alpha} (-1)^{\dim_{\mathbb{C}} N_{\alpha}} \sum_m \text{ind}(D_{X_{\alpha}^{S^1},+}^{S(TX_{\alpha}^{S^1}, L_{\alpha}) \otimes R_{\alpha,m}}) \cdot g^m \\ &= \sum_{\alpha} \sum_m \text{ind}(D_{X_{\alpha}^{S^1},+}^{S(TX_{\alpha}^{S^1}, L_{\alpha}) \otimes R'_{\alpha,m}}) \cdot g^m. \end{aligned} \tag{3.31}$$

定理 3.2 在 \mathbb{Z}/k 流形上的推广参见文献 [150, 定理 2.8]. 此推广也可视为定理 3.2 在带边流形上的一种推广.

3.3 Kirillov 公式

若 $g \in G$ 在单位元附近, 则存在群 G 的 Lie 代数 \mathfrak{g} 中的元素 $K \in \mathfrak{g}$, 使得 $g = e^K$. 此时可以将 (3.11) 右端写成 X 上的积分, 其中积分项是关于 K 的函数.

定理 3.3 (Kirillov 公式) 记 $|\cdot|$ 为 \mathfrak{g} 上的一个 G 不变度量. 当 $K \in \mathfrak{g}$, $|K|$ 充分小时,

$$\text{ind}_{e^K}(D_{X,+}^{\mathcal{E}}) = \int_X \widehat{A}_K(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}_K(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}}). \quad (3.32)$$

定理 3.3 的原型是 Kirillov^[137] 关于余伴随作用轨道积分的一个特征标公式. Berline 和 Vergne^[27] 将原始的 Kirillov 公式推广到了上述等变指标公式 (也可参见文献 [114]). 其热核证明由 Bismut^[34] 给出 (也可参见文献 [26, 第 8 章]). 注意到定理 3.3 是下面定理 3.4 的一个特例. 后面将对定理 3.4 给出统一的热核证明概述.

我们给出 (3.32) 中微分形式的定义. 设 K^X 为 K 在 X 上作用形成的向量场. 记 $\mathcal{L}_{K^X}^{TX}$ 和 $\mathcal{L}_{K^X}^{\mathcal{E}}$ 分别为向量丛 TX 和 \mathcal{E} 上对应的 Lie 导数. 定义 (参见文献 [67, (2.7) 和 (2.9)])

$$m^{TX}(K) := \nabla_{K^X}^{TX} - \mathcal{L}_{K^X}^{TX}, \quad m^{\mathcal{E}/S}(K) := \nabla_{K^X}^{\mathcal{E}} - \mathcal{L}_{K^X}^{\mathcal{E}} - \frac{1}{4} \langle m^{TX}(K)e_i, e_j \rangle c(e_i)c(e_j) \quad (3.33)$$

并定义等变曲率 (参见文献 [67, (2.30)])

$$R_K^{TX} = R^{TX} - 2\pi i m^{TX}(K), \quad R_K^{\mathcal{E}/S} = R^{\mathcal{E}/S} - 2\pi i m^{\mathcal{E}/S}(K). \quad (3.34)$$

在 (2.21) 和 (2.26) 中将 R^{TX} 和 $R^{\mathcal{E}/S}$ 分别替换为 R_K^{TX} 和 $R_K^{\mathcal{E}/S}$, 即得到 $\widehat{A}_K(TX, \nabla^{TX})$ 和 $\text{ch}_K(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}})$ 的定义. 当 $|K|$ 充分小时, 它们的定义是合理的.

对 $g \in G$, 记

$$\mathfrak{z}(g) = \{K \in \mathfrak{g} : \text{Ad}_g K = K\}. \quad (3.35)$$

Bismut 和 Goette^[67] 给出了下面定理的直接的热核证明.

定理 3.4^[67] 当 $K \in \mathfrak{z}(g)$, $|K|$ 充分小时, 有

$$\text{ind}_{ge^K}(D_{X,+}^{\mathcal{E}}) = \int_{X^g} \widehat{A}_{g,K}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}_{g,K}(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}}), \quad (3.36)$$

其中 $\widehat{A}_{g,K}(TX, \nabla^{TX})$ 和 $\text{ch}_{g,K}(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}})$ 分别为将 (3.17) 和 (3.21) 中的 R^{TX} 和 $R^{\mathcal{E}/S}$ 替换为 R_K^{TX} 和 $R_K^{\mathcal{E}/S}$ 所得的微分形式. 当 $|K|$ 充分小时, 它们的定义是合理的.

证明⁴⁾ 定义 Bismut Laplacian

$$H_K := \left(D_X^{\mathcal{E}} + \frac{c(K^X)}{4} \right)^2 + \mathcal{L}_{K^X}^{\mathcal{E}}. \quad (3.37)$$

类比于 (3.13), 有

$$\text{Tr}_s[g \exp(-tH_{K/t})] = \int_X \text{Tr}_s[g \exp(-tH_{K/t})(g^{-1}x, x)] dx. \quad (3.38)$$

4) 事实上, (3.36) 可由 (3.15) 和文献 [67, (2.37)] 直接得到, 但 Bismut 和 Goette^[67] 给出的热核证明引入了新的技巧, 大大拓展了局部指标理论的应用范围.

注意到此时依然有

$$\frac{d}{dt} \text{Tr}_s[g \exp(-tH_{K/t})] = 0 \tag{3.39}$$

和

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Tr}_s[g \exp(-tH_{K/t})] = \text{ind}_{g \in \mathcal{K}}(D_{X,+}^{\mathcal{E}}) \tag{3.40}$$

成立. 我们可以证明

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_X \text{Tr}_s[g \exp(-tH_{K/t})(g^{-1}x, x)] dx = \int_{X_g} \widehat{A}_{g,K}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}_{g,K}(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}}). \tag{3.41}$$

注意在文献 [67] 中, (3.41) 的证明非常复杂. 这是因为当 $t \rightarrow 0$ 时, $H_{K/t}$ 的零阶项没有下界. 我们没有办法直接应用局部指标定理证明中的技术. \square

当 $g = e$ 时, $\mathfrak{z}(e) = \mathfrak{g}$. 所以定理 3.3 是定理 3.4 当 $g = e$ 时的特例. 当 $K = 0$ 时, 定理 3.4 也退化到定理 3.1. 所以定理 3.4 可被视为定理 3.1 和 3.3 的共同推广.

3.4 带边流形的指标定理

本小节介绍带边流形的 APS 指标定理及其等变推广. Atiyah 和 Bott [5] 指出, 若考虑带有边界条件的算子的指标, 则需要算子在边界条件下满足 Fredholm 条件 (也可参见文献 [170, 附录 1]). 但对于一般的 Dirac 算子, 常见的局部边界条件并不满足, 存在拓扑障碍. Atiyah 等 [13–16] 引入了整体椭圆边界条件, 并在这一条件下证明了带边流形的指标定理 (简称 APS 指标定理). 2000 年, Dai 和 Zhang [106] 给出了 APS 指标定理的嵌入证明. 其他证明可参见文献 [56, 91, 92, 97, 164]. 关于带边流形指标定理的近期进展可参见文献 [24, 25, 83] 及其中提到的参考文献.

设 X 是一个带有奇数维光滑边界 Y 的偶数维紧致 Riemann 流形. 我们总假设 X 上的 Riemann 度量 g^{TX} 在 Y 附近有乘积结构, 即存在 Y 在 X 中的领圈邻域 (collar neighborhood) $U \simeq Y \times [0, 1]$ 且在 U 上有 $g^{TX}|_U = dr^2 \oplus g^{TY}$, 其中 $\frac{\partial}{\partial r}$ 是边界附近的单位外法向, g^{TY} 是 g^{TX} 在边界上的限制.

设 \mathcal{E}_Y 是 Y 上的一个 Dirac 丛. 假设 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_-$ 是 X 上的 \mathbb{Z}_2 分次的 Dirac 丛, 使得 $\mathcal{E}_\pm|_Y = \mathcal{E}_Y$ 且 \mathcal{E}_\pm 在边界附近的几何结构是 \mathcal{E}_Y 上几何结构的拉回. 设 $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ 是 Y 上的一组局部单位正交基使得 $\{\frac{\partial}{\partial r}, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ 是 U 上的一组局部单位正交基. 记 $\tilde{c}: C(TX) \rightarrow \text{End}(\mathcal{E})$ 为 \mathcal{E} 上的 Clifford 作用. 在 U 上, Dirac 算子

$$D_X^{\mathcal{E}} = \tilde{c}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) \frac{\partial}{\partial r} + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{c}(e_i) \nabla_{e_i}^{\mathcal{E}} = \tilde{c}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial}{\partial r} - \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{c}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) \tilde{c}(e_i) \nabla_{e_i}^{\mathcal{E}} \right). \tag{3.42}$$

令

$$c(e_i) = -\tilde{c}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) \tilde{c}(e_i), \tag{3.43}$$

则 $c: C(TY) \rightarrow \text{End}(\mathcal{E}_Y)$ 为 \mathcal{E}_Y 上的 Clifford 作用. 此时

$$D_Y^{\mathcal{E}_Y} := - \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{c}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) \tilde{c}(e_i) \nabla_{e_i}^{\mathcal{E}}|_{\mathcal{E}_Y} = \sum_{i=1}^{n-1} c(e_i) \nabla_{e_i}^{\mathcal{E}_Y} \tag{3.44}$$

为 \mathcal{E}_Y 上的 Dirac 算子.

注意到 $D_Y^{\mathcal{E}_Y}$ 是紧致无边流形 Y 上的一阶自伴椭圆微分算子, 它只有离散谱且每个点谱 λ 对应的特征空间 E_λ 都是有限维的. 记

$$P_{\geq 0} : L^2(Y, \mathcal{E}_Y) \rightarrow \widehat{\bigoplus_{\lambda \geq 0} E_\lambda} \quad (3.45)$$

为从 $L^2(Y, \mathcal{E}_Y)$ 到 $D_Y^{\mathcal{E}_Y}$ 的所有非负特征空间直和上的正交投影算子. 此时

$$(D_{X,+}^{\mathcal{E}}, P_{\geq 0}) : \{u \in C^\infty(X, \mathcal{E}_+) : P_{\geq 0}(u|_Y) = 0\} \rightarrow C^\infty(X, \mathcal{E}_-) \quad (3.46)$$

是一个 Fredholm 算子. 记它的指标为 $\text{ind}_{\text{APS}}(D_{X,+}^{\mathcal{E}})$, 称 $P_{\geq 0}(u|_Y) = 0$ 为 APS 边界条件.

定理 3.5 (APS 指标定理) 在 APS 边界条件下,

$$\text{ind}_{\text{APS}}(D_{X,+}^{\mathcal{E}}) = \int_X \widehat{\text{A}}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}}) - \bar{\eta}(D_Y^{\mathcal{E}_Y}), \quad (3.47)$$

其中

$$\bar{\eta}(D_Y^{\mathcal{E}_Y}) := \frac{1}{2}(\eta(D_Y^{\mathcal{E}_Y}) + \dim \ker D_Y^{\mathcal{E}_Y}), \quad (3.48)$$

$$\eta(D_Y^{\mathcal{E}_Y}) := \int_0^{+\infty} \text{Tr}[D_Y^{\mathcal{E}_Y} \exp(-tD_Y^{\mathcal{E}_Y,2})] \frac{dt}{\sqrt{\pi t}}. \quad (3.49)$$

称 $\eta(D_Y^{\mathcal{E}_Y})$ 为 η - 不变量, $\bar{\eta}(D_Y^{\mathcal{E}_Y})$ 为约化 η - 不变量. 注意在 (3.49) 中积分在 $t = 0$ 处的收敛性的证明是非平凡的.

形式上可以将 η - 不变量看作 Dirac 算子的正负特征值的个数差. 令

$$\eta(s) := \sum_{\lambda > 0} \frac{1}{|\lambda|^s} - \sum_{\lambda < 0} \frac{1}{|\lambda|^s}, \quad (3.50)$$

则当 $\text{Re}(s) > \frac{n}{2}$ 时, $\eta(s)$ 是一个关于 $s \in \mathbb{C}$ 的全纯函数. 我们可以证明此函数可以亚纯延拓到复平面且延拓后在 $s = 0$ 处全纯^[13]. 此时 $\eta(D_Y^{\mathcal{E}_Y}) = \eta(0)$.

对于光滑的紧 Lie 群 G 作用, 也可以得到等变情形的 APS 指标定理.

假设 X 上的群作用可以提升到 \mathcal{E} 上且保持几何结构不变, 假设 G 作用保持边界 Y 与乘积结构不变, 则群作用与 Dirac 算子、APS 边界条件可交换. 对 $g \in G$, 定义等变 APS 指标为

$$\text{ind}_{\text{APS},g}(D_{X,+}^{\mathcal{E}}) := \text{Tr}|_{\ker(D_{X,+}^{\mathcal{E}}, P_{\geq 0})}[g] - \text{Tr}|_{\text{coker}(D_{X,+}^{\mathcal{E}}, P_{\geq 0})}[g]. \quad (3.51)$$

当 $g = e$ 为 G 的单位元时, 有 $\text{ind}_{\text{APS},e}(D_{X,+}^{\mathcal{E}}) = \text{ind}_{\text{APS}}(D_{X,+}^{\mathcal{E}})$.

定理 3.6 (等变 APS 指标定理^[110]) 在 APS 边界条件下,

$$\text{ind}_{\text{APS},g}(D_{X,+}^{\mathcal{E}}) = \int_{X_g} \widehat{\text{A}}_g(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}_g(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}}) - \bar{\eta}_g(D_Y^{\mathcal{E}_Y}), \quad (3.52)$$

其中

$$\bar{\eta}_g(D_Y^{\mathcal{E}_Y}) := \frac{1}{2}(\eta_g(D_Y^{\mathcal{E}_Y}) + \text{Tr}|_{\ker D_Y^{\mathcal{E}_Y}}[g]), \quad (3.53)$$

$$\eta_g(D_Y^{\mathcal{E}_Y}) := \int_0^{+\infty} \text{Tr}[g D_Y^{\mathcal{E}_Y} \exp(-tD_Y^{\mathcal{E}_Y,2})] \frac{dt}{\sqrt{\pi t}}. \quad (3.54)$$

在 (3.54) 中积分在 $t = 0$ 处的收敛性的证明也是非平凡的 [195].

实际上, 也可以将定理 3.4 推广到带 APS 边界的情形. 当 $K \in \mathfrak{z}(g)$, $|K|$ 充分小时, 定义无穷小等变 η - 不变量 [129, 149]

$$\eta_{g,K}(D_Y^{\mathcal{E}^Y}) := \int_0^{+\infty} \text{Tr} \left[g \left(D_Y^{\mathcal{E}^Y} - \frac{c(K^Y)}{4t} \right) \exp(-tH_{K/t}) \right] \frac{dt}{\sqrt{\pi t}}. \quad (3.55)$$

此时 (3.55) 右端的积分在 $t = 0$ 处收敛也是非平凡的. 事实上可以证明 $\eta_{g,uK}(D_Y^{\mathcal{E}^Y})$ 在 $u = 0$ 附近是一个关于 u 的实解析函数 [149]. 下一节将对无穷小等变 η - 不变量作较详细的讨论.

定理 3.7 (带边 Kirillov 公式) 当 $K \in \mathfrak{z}(g)$, $|K|$ 充分小时,

$$\text{ind}_{\text{APS},ge^K}(D_{X,+}^{\mathcal{E}}) = \int_{X^g} \widehat{A}_{g,K}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}_{g,K}(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}}) - \bar{\eta}_{g,K}(D_Y^{\mathcal{E}^Y}), \quad (3.56)$$

其中

$$\bar{\eta}_{g,K}(D_Y^{\mathcal{E}^Y}) := \frac{1}{2}(\eta_{g,K}(D_Y^{\mathcal{E}^Y}) + \text{Tr}|_{\ker D_Y^{\mathcal{E}^Y}}[ge^K]). \quad (3.57)$$

当 $K = 0$ 时, 定理 3.7 自然退化到定理 3.6. 当 $g = e$ 时, 定理 3.7 对应于文献 [149, (0.14)]. 一般情形下的 (3.56) 并未在文献中出现过, 但其证明与文献 [149, (0.14)] 完全一致. 为叙述完整起见, 第 4.1 小节将给出定理 3.7 的证明.

3.5 指标定理的算子簇推广

设 $\pi : W \rightarrow B$ 是一个纤维丛, 纤维为定向紧致流形 X . 定义 $TX := \ker(d\pi : TW \rightarrow TB)$, 则 TX 是 W 上的一个向量丛, 被称为相对切丛. 它限制在每个纤维上恰好是纤维的切丛. 假设 B 是紧致流形且 TX 可定向. 记 $T^H W$ 为 W 上的一个水平子丛, 满足

$$TW = T^H W \oplus TX. \quad (3.58)$$

记 $P^{TX} : TW \rightarrow TX$ 为对应的投影算子. 此时 $T^H W \simeq \pi^* TB$.

设 g^{TX} 为 TX 上的一个 Euclid 度量, g^{TB} 为 TB 上的一个 Riemann 度量, 则

$$g^{TW} := \pi^* g^{TB} \oplus g^{TX} \quad (3.59)$$

为 TW 上的一个 Riemann 度量. 记 ∇^{TW} 为对应的 Levi-Civita 联络. 定义

$$\nabla^{TX} := P^{TX} \nabla^{TW} P^{TX}, \quad (3.60)$$

则限制在纤维上, ∇^{TX} 也是关于 g^{TX} 的 Levi-Civita 联络.

设 \mathcal{E} 是 W 上的一个复向量丛使得对任意 $x \in W$, \mathcal{E}_x 是 $C(T_x X)$ 的 Clifford 表示. 与定义 2.3 一样, 若 Clifford 作用是光滑的, 则称 \mathcal{E} 是一个 $C(TX)$ -Clifford 模. 设 $h^{\mathcal{E}}$ 是 \mathcal{E} 上的满足 (2.10) 的 Hermite 度量. 设 $\nabla^{\mathcal{E}}$ 是 \mathcal{E} 上与度量 $h^{\mathcal{E}}$ 相容的一个联络, 使得对任意 $U \in C^\infty(W, TW)$, $V \in C^\infty(W, TX)$, (2.11) 成立. 称这样的 $\underline{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}, h^{\mathcal{E}}, \nabla^{\mathcal{E}})$ 为一个 $C(TX)$ -Dirac 丛.

记 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 为 TX 的一个局部正交标架. 我们可以依 (2.14) 同样定义簇 Dirac 算子

$$D_X^{\mathcal{E}} = \sum_{i=1}^n c(e_i) \nabla_{e_i}^{\mathcal{E}} : C^\infty(W, \mathcal{E}) \rightarrow C^\infty(W, \mathcal{E}). \quad (3.61)$$

限制到每个纤维上, 它退化为 (2.14) 中标准的 Dirac 算子. 与 (2.15) 一样, 常取 \mathcal{E} 是 \mathbb{Z}_2 分次的且 Clifford 作用满足同样的假设. 若 \mathcal{E}_+ 与 \mathcal{E}_- 正交且 $\nabla^{\mathcal{E}}$ 保持分次不变, 则称 $\underline{\mathcal{E}}$ 是一个 \mathbb{Z}_2 分次的 $C(TX)$ -Dirac 丛.

此时依然可以考虑簇 Dirac 算子的指标. 当 X 为偶数维时, 对任意 $b \in B$, $\text{ind}(D_{X_b, +}^{\mathcal{E}|_{X_b}}) \in \mathbb{Z}$. 我们可以将簇 Dirac 算子的指标看作底空间 B 上的函数. 但这种看法没有新的意义: 受算子指标的拓扑不变性影响, 我们只能得到一个局部常值函数. Atiyah 和 Singer [22] 将指标定义中的两个空间的维数差替换为两个空间的形式差, 得到了底空间 B 的拓扑 K 群中的不变量.

考虑 B 上由所有复向量丛按直和关系生成的半群. 仿照由自然数构造整数的标准办法, 可以由这个半群生成一个 Abel 群, 称为 B 上的拓扑 K^0 群 [11, 12], 记为 $K^0(B)$. 此时 $K^0(B)$ 中元素的代表元可写作两个复向量丛的形式差. 具体而言,

$$K^0(B) := \{E - F : E \text{ 和 } F \text{ 为 } B \text{ 上的复向量丛}\} / \sim, \quad (3.62)$$

其中 $E - F \sim E' - F'$ 当且仅当存在复向量丛 E'' 使得存在丛同构 $E \oplus F' \oplus E'' \simeq E' \oplus F \oplus E''$. 对于 $K^0(B)$ 中元素 x 的代表元 $E_+ - E_-$, 定义 x 的 Chern 特征为 \mathbb{Z}_2 分次复向量丛 $E = E_+ \oplus E_-$ 在 (2.22) 下的 Chern 特征形式对应的上同调类. 由 Chern-Weil 理论 (参见文献 [95, 附录] 和 [198, 第 1 节]) 可知此时的上同调类与 (2.22) 中联络的选取无关. 易知 $\text{ch}(x)$ 也与 x 的代表元的选取无关. 由此可以得到群同态映射

$$\text{ch} : K^0(B) \rightarrow H^{\text{even}}(B, \mathbb{R}). \quad (3.63)$$

事实上, 向量丛的张量积可以赋予 $K^0(B)$ 乘积结构使其成为一个环. 此时 (3.63) 中的 Chern 特征映射也是一个环同态. 有关拓扑 K 群的详细讨论, 可参见文献 [3, 84, 136].

固定 $a \in S^1$ 并考虑嵌入 $i : B \rightarrow B \times S^1$, $b \mapsto (b, a)$, 则向量丛的拉回诱导了 K^0 群间的拉回映射 $i^* : K^0(B \times S^1) \rightarrow K^0(B)$. 此时 B 的拓扑 K^1 群

$$K^1(B) \cong \ker i^*. \quad (3.64)$$

所以可以取 $B \times S^1$ 上在 $\ker i^*$ 中的两个向量丛的形式差 $E_+ - E_-$ 作为 $y \in K^1(B)$ 中元素的代表元. 此时定义

$$\text{ch} : K^1(B) \rightarrow H^{\text{odd}}(B, \mathbb{R}), \quad y \mapsto \left[\int_{S^1} \text{ch}(E, \nabla^E) \right]. \quad (3.65)$$

此处 $[\alpha]$ 表示闭微分形式 α 对应的 de Rham 上同调类. 易知此时 Chern 特征映射的像也与代表元的选取无关. Atiyah 和 Hirzebruch [12] 证明了

$$\text{ch} : K^{0/1}(B) \otimes \mathbb{R} \rightarrow H^{\text{even/odd}}(B, \mathbb{R}) \quad (3.66)$$

是一个同构.

对于簇 Dirac 算子, 首先假设 $\ker D_{X, \pm}^{\mathcal{E}} = \bigsqcup_{b \in B} \ker D_{X_b, \pm}^{\mathcal{E}|_{X_b}}$ 组成了 B 上的有限维向量丛. 此时 $\ker D_{X, +}^{\mathcal{E}} - \ker D_{X, -}^{\mathcal{E}}$ 对应了 $K^0(B)$ 中的元素

$$\text{ind}(D_X^{\mathcal{E}}) \in K^0(B). \quad (3.67)$$

若 $\ker D_{X,\pm}^\mathcal{E}$ 不是 B 上的向量丛, 则也可以通过扰动方法得到簇指标的定义 (3.67) [22]. 当纤维是奇数维时, 可将簇指标定义为 $K^1(B)$ 中的非平凡元素 [21, 166]

$$\text{ind}(D_X^\mathcal{E}) \in K^1(B). \tag{3.68}$$

这是簇指标独有的特点 (注意到当底空间为一点且纤维为奇数维时, Dirac 算子的指标为零). 但如果此时 $\ker D_X^\mathcal{E}$ 是 B 上的向量丛, 即使在 $K^1(B)$ 中, 簇指标也会消失 (将在定理 3.13 之后给出这一结论的简单解释).

下面将指标定理推广到簇指标定理. 此定理最早由 Atiyah 和 Singer [22] 应用 K 理论证明. 下面的热核证明则归功于 Bismut [36], 读者也可参见文献 [29, 111, 194] 和 [26, 第 9 章]. 奇数维情形可参见文献 [61, 定理 2.10].

定理 3.8 (Atiyah-Singer 簇指标定理) 假设 $\ker D_X^\mathcal{E}$ 组成了 B 上的向量丛, 则有

$$\left[\int_X \widehat{A}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}(\mathcal{E}/S, \nabla^\mathcal{E}) \right] = \begin{cases} \text{ch}(\text{ind}(D_X^\mathcal{E})), & \text{若 } \dim X \text{ 为偶数,} \\ 0, & \text{若 } \dim X \text{ 为奇数,} \end{cases} \tag{3.69}$$

其中等式左端微分形式的定义形式上与 (2.21) 和 (2.26) 两式一致.

证明 对 $\sigma = \alpha \widehat{\otimes} A$, $\alpha \in \Lambda(T^*B)$, $A \in \text{End}(\mathcal{E})$, 定义

$$\text{Tr}_s[\sigma] = \alpha \cdot \text{Tr}_s[A], \quad \text{Tr}_s^{\text{odd/even}}[\sigma] = \{\alpha\}^{\text{odd/even}} \cdot \text{Tr}_s[A], \tag{3.70}$$

其中 $\{\alpha\}^{\text{odd/even}}$ 是 α 的奇数次或偶数次部分. 定义

$$\widetilde{\text{Tr}}_s[\sigma] = \begin{cases} \text{Tr}_s[\sigma], & \text{若 } \dim X \text{ 为偶数,} \\ \text{Tr}_s^{\text{odd}}[\sigma], & \text{若 } \dim X \text{ 为奇数.} \end{cases} \tag{3.71}$$

对 $\alpha \in \Lambda^j(T^*B)$, 定义

$$\psi_B(\alpha) = \begin{cases} (2i\pi)^{-\frac{j}{2}} \cdot \alpha, & \text{若 } j \text{ 为偶数,} \\ \pi^{-\frac{1}{2}}(2i\pi)^{-\frac{j-1}{2}} \cdot \alpha, & \text{若 } j \text{ 为奇数.} \end{cases} \tag{3.72}$$

对 $\alpha \in \Lambda(T^*(\mathbb{R} \times B))$, 有

$$\alpha = \alpha_0 + dt \wedge \alpha_1, \quad \alpha_0, \alpha_1 \in \Lambda(T^*B). \tag{3.73}$$

记

$$[\alpha]^{dt} = \alpha_1. \tag{3.74}$$

对 $b \in B$, 记 $\mathcal{E}_b := C^\infty(X_b, \mathcal{E}|_{X_b})$ 并将 \mathcal{E} 看作一个以 \mathcal{E}_b 为纤维的无穷维纤维丛. 由 $T^H W \simeq \pi^* TB$ 可知, 对任意 $U \in TB$, 存在唯一的 $U^H \in T^H W$, 使得 $\pi_* U^H = U$. 记 dx 为由 g^{TX} 决定的纤维上的 Riemann 体积形式. 定义 W 上的函数 $\text{div}(U^H)$ 使得 $\mathcal{L}_{U^H} dx = \text{div}(U^H) dx$. 对 $s \in C^\infty(B, \mathcal{E}) = C^\infty(W, \mathcal{E})$, 记

$$\nabla_U^u s := \nabla_{U^H}^\mathcal{E} s + \frac{1}{2} \text{div}(U^H) s, \tag{3.75}$$

则 ∇^u 可看作 \mathcal{E} 上的一个联络. 设 $\{f_p\}$ 是 TB 的一组局部基, 著名的 Bismut 超联络

$$B_t : C^\infty(B, \Lambda(T^*B) \widehat{\otimes} \mathcal{E}) \rightarrow C^\infty(B, \Lambda(T^*B) \widehat{\otimes} \mathcal{E}) \quad (3.76)$$

定义为 (参见文献 [36])

$$B_t = \sqrt{t}D_X^\mathcal{E} + \nabla^u - \frac{1}{8\sqrt{t}}c(P^{TX}[f_p^H, f_q^H])f^p \wedge f^q. \quad (3.77)$$

此时 B_t^2 是一个沿纤维作用的 2 阶椭圆微分算子, $\exp(-B_t^2)$ 是一个沿纤维方向的迹类算子 (trace class).

用 $t^{-1/2}B_t$ 代替 $D_X^\mathcal{E}$, 类比 (2.60), 可以证明

$$\psi_B \widetilde{\text{Tr}}_s[\exp(-B_t^2)] = \int_X \psi_B \widetilde{\text{Tr}}_s[\exp(-B_t^2)(x, x)]dx. \quad (3.78)$$

此时, 对应 (2.63), 有

$$\frac{d}{dt}\psi_B \widetilde{\text{Tr}}_s[\exp(-B_t^2)] = d\gamma(t), \quad (3.79)$$

其中

$$\gamma(t) := \left\{ \psi_{\mathbb{R} \times B} \widetilde{\text{Tr}}_s \left[\exp \left(- \left(B_t + dt \wedge \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \right) \right] \right\}^{dt}. \quad (3.80)$$

当 $t \rightarrow +\infty$ 时,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi_B \widetilde{\text{Tr}}_s[\exp(-B_t^2)] = \begin{cases} \text{ch}(\ker D_X^\mathcal{E}, \nabla^{\ker}), & \text{若 } \dim X \text{ 为偶数,} \\ 0, & \text{若 } \dim X \text{ 为奇数,} \end{cases} \quad (3.81)$$

其中 $\nabla^{\ker} = P^{\ker} \nabla^u P^{\ker}$, $P^{\ker} : C^\infty(X, \mathcal{E}) \rightarrow \ker D_X^\mathcal{E}$ 为 L^2 内积对应的正交投影. 所以 Atiyah-Singer 簇指标定理可由如下极限推导出:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_X \text{Tr}_s[\exp(-B_t^2)(x, x)]dx = \int_X \widehat{A}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}(\mathcal{E}/S, \nabla^\mathcal{E}). \quad (3.82)$$

证毕. □

由 (3.78)-(3.82), 可以形式上推导出

$$-d \int_0^{+\infty} \gamma(t)dt = \begin{cases} \int_X \widehat{A}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}(\mathcal{E}/S, \nabla^\mathcal{E}) - \text{ch}(\ker D_X^\mathcal{E}, \nabla^{\ker}), & \text{若 } \dim X \text{ 为偶数,} \\ \int_X \widehat{A}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}(\mathcal{E}/S, \nabla^\mathcal{E}), & \text{若 } \dim X \text{ 为奇数.} \end{cases} \quad (3.83)$$

事实上, 可以证明 (参见文献 [55])

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= O(t^{-1/2}), \quad \text{当 } t \rightarrow 0 \text{ 时,} \\ \gamma(t) &= O(t^{-3/2}), \quad \text{当 } t \rightarrow +\infty \text{ 时.} \end{aligned} \quad (3.84)$$

定义 3.2 [55] 假设 $\ker D_X^\mathcal{E}$ 是一个向量丛, 则 Bismut-Cheeger η - 形式定义为

$$\tilde{\eta}(\pi, \mathcal{E}) := - \int_0^{+\infty} \gamma(t)dt \in \Omega^*(B, \mathbb{R}). \quad (3.85)$$

当纤维为偶数维时, $\tilde{\eta}(\pi, \mathcal{E}) \in \Omega^{\text{odd}}(B, \mathbb{R})$; 当纤维为奇数维时, $\tilde{\eta}(\pi, \mathcal{E}) \in \Omega^{\text{even}}(B, \mathbb{R})$.

由 (3.84) 可知 Bismut-Cheeger η -形式是合理定义的. 由 (3.83), 有

$$d\tilde{\eta}(\pi, \underline{\mathcal{E}}) = \begin{cases} \int_X \widehat{A}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}}) - \text{ch}(\ker D_X^{\mathcal{E}}, \nabla^{\ker}), & \text{若 } \dim X \text{ 为偶数,} \\ \int_X \widehat{A}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}}), & \text{若 } \dim X \text{ 为奇数.} \end{cases} \quad (3.86)$$

当 B 为一个点且 X 为奇数维时, 有

$$\tilde{\eta}(\pi, \underline{\mathcal{E}}) = \frac{1}{2} \eta(D_X^{\mathcal{E}}). \quad (3.87)$$

所以 Bismut-Cheeger η -形式可以看作 η -不变量的高维推广.

注 3.1 [22] 对于簇指标定理, 当 $\ker D_X^{\mathcal{E}}$ 不是一个向量丛时, 依然有

$$\text{ch}(\text{ind}(D_X^{\mathcal{E}})) = \left[\int_X \widehat{A}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}}) \right] \quad (3.88)$$

成立. 注意到若 X 为奇数维, 当 $\ker D_X^{\mathcal{E}}$ 是一个向量丛时, $\text{ind}(D_X^{\mathcal{E}}) = 0 \in K^1(B)$. 所以在这种情形下, 定理 3.8 中没有 Chern 特征项.

下面考虑带有群作用的等变簇指标定理. 考虑沿纤维方向有紧 Lie 群 G 作用的情形, 即考虑一簇带有群作用的流形.

假设纤维丛 $\pi: W \rightarrow B$ 是一个 G -等变纤维丛, 即 W 和 B 上都有光滑的 G 作用, 且群作用与 π 可交换. 此时 TX 是 G 等变的向量丛. 假设群作用保持 TX 的定向不变. 取水平子丛 $T^H W$ 是 G 等变的向量丛且群作用保持分解 (3.58) 不变.

我们总假设群 G 在 B 上的作用是平凡的. 此时群作用将每个纤维映到它自身. 取 g^{TX} 为 G 不变度量, 则 g^{TW} 是一个 G 不变度量且 ∇^{TX} 是一个 G 不变联络.

假设 W 上的群作用可以提升到 \mathcal{E} 上使得群作用保持 \mathbb{Z}_2 分次不变且 Clifford 作用与群作用可交换. 假设 $h^{\mathcal{E}}$ 和 $\nabla^{\mathcal{E}}$ 都是 G 不变的. 这时称 $\underline{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}, h^{\mathcal{E}}, \nabla^{\mathcal{E}})$ 为一个 \mathbb{Z}_2 分次的 $C(TX)$ -等变 Dirac 丛. 由于此时群作用与 $D_X^{\mathcal{E}}$ 可交换, 故若 $\ker D_X^{\mathcal{E}}$ 是一个向量丛, 则它一定是一个 G 等变向量丛.

将拓扑 K 群定义中的所有对象替换为等变的对象, 可以得到等变拓扑 K 群 $K_G^*(B)$ 的定义 [3, 179]. 此时可以类似定义等变指标

$$\text{ind}(D_X^{\mathcal{E}}) \in K_G^*(B). \quad (3.89)$$

由于 B 上的群作用平凡, 对 $K_G^0(B)$ 中元素 x 的代表元 $E_+ - E_-$, 定义 $\text{ch}_g(x)$ 为 \mathbb{Z}_2 分次等变复向量丛 $E = E_+ \oplus E_-$ 在 (3.22) 下的等变 Chern 特征形式对应的上同调类. 此时有环同态映射

$$\text{ch}_g: K_G^0(B) \rightarrow H^{\text{even}}(B, \mathbb{C}). \quad (3.90)$$

完全类似于 (3.65), 可以定义

$$\text{ch}_g: K_G^1(B) \rightarrow H^{\text{odd}}(B, \mathbb{C}). \quad (3.91)$$

定理 3.9 (等变簇指标定理 [151]) 假设 $\ker D_X^{\mathcal{E}}$ 组成了 B 上的向量丛. 对任意 $g \in G$, 有

$$\begin{aligned} \left[\int_{X^g} \widehat{A}_g(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}_g(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}}) \right] &= \text{ch}_g(\text{ind}(D_X^{\mathcal{E}})) \\ &= \begin{cases} [\text{ch}_g(\ker D_X^{\mathcal{E}}, \nabla^{\ker})], & \text{若 } \dim X \text{ 为偶数,} \\ 0, & \text{若 } \dim X \text{ 为奇数.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.92)$$

证明 类似于 (3.13) 和 (3.78), 有

$$\psi_B \widetilde{\text{Tr}}_s[g \exp(-B_t^2)] = \int_X \psi_B \widetilde{\text{Tr}}_s[g \exp(-B_t^2)(g^{-1}x, x)] dx. \quad (3.93)$$

此时, 类比于 (3.79), 有

$$\frac{d}{dt} \psi_B \widetilde{\text{Tr}}_s[g \exp(-B_t^2)] = d\gamma_g(t), \quad (3.94)$$

其中

$$\gamma_g(t) := \left\{ \psi_{\mathbb{R} \times B} \widetilde{\text{Tr}}_s \left[g \exp \left(- \left(B_t + dt \wedge \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \right) \right] \right\}^{dt}. \quad (3.95)$$

注意到此时

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Tr}_s[g \exp(-B_t^2)] = \begin{cases} \text{ch}_g(\ker D_X^\mathcal{E}, \nabla^{\ker}), & \text{若 } \dim X \text{ 为偶数,} \\ 0, & \text{若 } \dim X \text{ 为奇数.} \end{cases} \quad (3.96)$$

我们可以证明

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_X \text{Tr}_s[g \exp(-B_t^2)(g^{-1}x, x)] dx = \int_{X^g} \widehat{A}_g(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}_g(\mathcal{E}/S, \nabla^\mathcal{E}). \quad (3.97)$$

证毕. \square

在文献 [151, 定理 1.2 和 1.3] 中, Liu 和 Ma 只对偶数维情形给出了定理 3.9 的详细证明. 事实上奇数维的证明是完全类似的. 此时, 依然有 (参见文献 [143])

$$\begin{aligned} \gamma_g(t) &= O(t^{-1/2}), \quad \text{当 } t \rightarrow 0 \text{ 时,} \\ \gamma_g(t) &= O(t^{-3/2}), \quad \text{当 } t \rightarrow +\infty \text{ 时.} \end{aligned} \quad (3.98)$$

定义 3.3 [143, 193] 假设 $\ker D_X^\mathcal{E}$ 组成了 B 上的向量丛. 对 $g \in G$, 定义等变 Bismut-Cheeger η - 形式为

$$\tilde{\eta}_g(\pi, \underline{\mathcal{E}}) := - \int_0^{+\infty} \gamma_g(t) dt \in \Omega^*(B, \mathbb{C}). \quad (3.99)$$

当 $g = e$ 时, $\tilde{\eta}_e(\pi, \underline{\mathcal{E}}) = \tilde{\eta}(\pi, \underline{\mathcal{E}})$.

类比于 (3.86), 有

$$d\tilde{\eta}_g(\pi, \underline{\mathcal{E}}) = \begin{cases} \int_{X^g} \widehat{A}_g(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}_g(\mathcal{E}/S, \nabla^\mathcal{E}) - \text{ch}_g(\ker D_X^\mathcal{E}, \nabla^{\ker}), & \text{若 } \dim X \text{ 为偶数,} \\ \int_{X^g} \widehat{A}_g(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}_g(\mathcal{E}/S, \nabla^\mathcal{E}), & \text{若 } \dim X \text{ 为奇数.} \end{cases} \quad (3.100)$$

当 B 为一个点且 X 为奇数维时, 有

$$\tilde{\eta}_g(\pi, \underline{\mathcal{E}}) = \frac{1}{2} \eta_g(D_X^\mathcal{E}). \quad (3.101)$$

下面将 Bismut 和 Goette 推广的 Kirillov 公式—定理 3.4—推广到算子簇情形.

定理 3.10 ^[149] 假设 $\ker D_X^\mathcal{E}$ 组成了 B 上的向量丛. 对 $g \in G$, 当 $K \in \mathfrak{z}(g)$, $|K|$ 充分小时, 作为 $H^*(B, \mathbb{C})$ 中的元素, 有

$$\begin{aligned} \left[\int_{X^g} \widehat{A}_{g,K}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}_{g,K}(\mathcal{E}/S, \nabla^\mathcal{E}) \right] &= \text{ch}_{g_e K}(\text{ind}(D_X^\mathcal{E})) \\ &= \begin{cases} [\text{ch}_{g_e K}(\ker D_X^\mathcal{E}, \nabla^{\ker})], & \text{若 } \dim X \text{ 为偶数,} \\ 0, & \text{若 } \dim X \text{ 为奇数.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.102)$$

证明 我们只需要将 (3.93) 中的 $\psi_B \widetilde{\text{Tr}}_s[g \exp(-B_t^2)]$ 替换为 $\psi_B \widetilde{\text{Tr}}_s[g \exp(-B_{K,t}^2 - \mathcal{L}_K)]$, 其中

$$B_{K,t} = B_t + \frac{c(K^X)}{4\sqrt{t}}. \quad (3.103)$$

此时对 $t \rightarrow 0$ 部分的估计与定理 3.4 中的证明类似. □

令

$$\gamma_{g,K}(t) := \left\{ \psi_{\mathbb{R} \times B} \widetilde{\text{Tr}}_s \left[g \exp \left(- \left(B_{K,t} + dt \wedge \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \mathcal{L}_K \right) \right] \right\}^{dt}. \quad (3.104)$$

存在 $\delta \in (0, 1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ 充分小, 使得当 $|K| < \beta$ 时, 有 (参见文献 [149, 定理 2.2])

$$\begin{aligned} \gamma_{g,K}(t) &= O(t^{-(1-\delta)}), & \text{当 } t \rightarrow 0 \text{ 时,} \\ \gamma_{g,K}(t) &= O(t^{-(1+\delta)}), & \text{当 } t \rightarrow +\infty \text{ 时.} \end{aligned} \quad (3.105)$$

定义 3.4 ^[149] 假设 $\ker D_X^\mathcal{E}$ 组成了 B 上的向量丛. 对 $g \in G$, 当 $K \in \mathfrak{z}(g)$, $|K|$ 充分小时, 定义无穷小等变 Bismut-Cheeger η - 形式为

$$\tilde{\eta}_{g,K}(\pi, \underline{\mathcal{E}}) := - \int_0^{+\infty} \gamma_{g,K}(t) dt \in \Omega^*(B, \mathbb{C}). \quad (3.106)$$

当 $K = 0$ 时, $\tilde{\eta}_{g,0}(\pi, \underline{\mathcal{E}}) = \tilde{\eta}_g(\pi, \underline{\mathcal{E}})$. 当 $g = e$ 时, 也记 $\tilde{\eta}_K(\pi, \underline{\mathcal{E}}) := \tilde{\eta}_{e,K}(\pi, \underline{\mathcal{E}})$.

当 $|u|$ 充分小时, $\tilde{\eta}_{g,uK}(\pi, \underline{\mathcal{E}})$ 关于 $u \in \mathbb{R}$ 也是实解析的. 类似于 (3.86) 和 (3.99), 有

$$d\tilde{\eta}_{g,K}(\pi, \underline{\mathcal{E}}) = \begin{cases} \int_{X^g} \widehat{A}_{g,K}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}_{g,K}(\mathcal{E}/S, \nabla^\mathcal{E}) - \text{ch}_{g_e K}(\ker D_X^\mathcal{E}, \nabla^{\ker}), & \text{若 } \dim X \text{ 为偶数,} \\ \int_{X^g} \widehat{A}_{g,K}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}_{g,K}(\mathcal{E}/S, \nabla^\mathcal{E}), & \text{若 } \dim X \text{ 为奇数.} \end{cases} \quad (3.107)$$

当 B 为一个点且 X 为奇数维时,

$$\tilde{\eta}_{g,K}(\pi, \underline{\mathcal{E}}) = \frac{1}{2} \eta_{g,K}(D_X^\mathcal{E}). \quad (3.108)$$

对应于定理 3.2 中的不动点公式, 对于等变流形簇, 也有对应的簇指标的不动点公式 ^[152-154]. 类似于定理 3.2 中的假设, 假设前面的纤维丛 $\pi : W \rightarrow B$ 的相对切丛有 spin^c 结构, 假设纤维为偶数维, $G = S^1$ 且保纤维的群作用保持 spin^c 结构. 此时由 (3.24), 纤维丛 $\pi|_{W^{S^1}} : W^{S^1} \rightarrow B$ 的相对切丛 TX^{S^1} 也有 spin^c 结构. 设 \underline{E} 是 W 上的一个等变几何三元组. 令 $\underline{\mathcal{E}}$ 是 X 上使得 $\mathcal{E} = S(TX, L) \widehat{\otimes} E$ 的 \mathbb{Z}_2 分次的 $C(TX)$ - 等变 Dirac 丛.

由于 B 上的群作用平凡, 所以有同构

$$K_{S^1}^0(B) \simeq K^0(B) \otimes \mathbb{Z}, \quad (3.109)$$

即每个 B 上的等变复向量丛 F 都有向量丛直和分解 $F = \bigoplus_v F_v$ 使得 $g \in S^1$ 在 F_v 上的作用为数乘 g^v . 实际上此处的 \mathbb{Z} 为由 S^1 的所有不可约表示生成的表示环. 对于簇指标 $\text{ind}(D_{X,+}^\mathcal{E}) \in K_{S^1}^0(B)$, 对应于 (3.109), 有分解

$$\text{ind}(D_X^\mathcal{E}) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \text{ind}(D_X^\mathcal{E}, m) \otimes [m], \quad (3.110)$$

其中 $\text{ind}(D_X^\mathcal{E}, m) \in K^0(B)$. 对应于定理 3.2, 有如下定理:

定理 3.11 [152–154] 对 $m \in \mathbb{Z}$, 作为 $K^0(B)$ 中的元素,

$$\begin{aligned} \text{ind}(D_X^\mathcal{E}, m) &= \sum_{\alpha} (-1)^{\dim_{\mathbb{C}} N_{\alpha}} \text{ind}(D_{X_{\alpha}^{S^1}}^{S(TX_{\alpha}^{S^1}), L_{\alpha}} \otimes R_{\alpha, m}) \\ &= \sum_{\alpha} \text{ind}(D_{X_{\alpha}^{S^1}}^{S(TX_{\alpha}^{S^1}), L_{\alpha}} \otimes R'_{\alpha, m}). \end{aligned} \quad (3.111)$$

对于带边流形的 APS 指标定理, 也可以将其推广到一簇流形的情形.

对纤维丛 $\pi : W \rightarrow B$, 假设纤维为带有边界 Y 的紧致定向流形 X , 假设 B 为紧致流形. 此时 W 的边界 V 带有纤维丛结构 $\pi_{\partial} : V \rightarrow B$, 纤维为 Y . 假设 $T^H W|_V \subset TV$, 则 $T^H V := T^H W|_V$ 是 TV 的一个水平子丛. 假设在边界附近流形的度量有乘积结构: 对 V 在 W 中的很小的邻域 $U \simeq V \times [0, 1)$, 记 $p : U \rightarrow V$ 为投影映射, 假设 $T^H W|_U = p^*(T^H W|_V)$ 且相对于 (3.58) 中的分解有 $g^{TW}|_U = \pi^* g^{TB} \oplus (dr^2 \oplus p^* g^{TY})$ 成立.

首先假设纤维 X 是偶数维的. 设 \mathcal{E}_Y 是纤维丛 π_{∂} 上一个 $C(TY)$ -Dirac 丛. 假设 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_-$ 是纤维丛 π 上的一个 \mathbb{Z}_2 分次的 $C(TX)$ -Dirac 丛, 使得 $\mathcal{E}_{\pm}|_Y = \mathcal{E}_Y$ 且 \mathcal{E}_{\pm} 在边界附近的几何结构是 \mathcal{E}_Y 上几何结构的拉回. 记 $D_X^\mathcal{E}$ 为相对于纤维丛 π 的簇 Dirac 算子. 类比于 (3.44), 可以定义边界上的簇 Dirac 算子 $D_Y^{\mathcal{E}_Y}$. 在一般情形下, 对于算子簇情形, 原来的 APS 投影 $P_{\geq 0}$ 不是一个稳定的边界条件. 当参数空间 B 上的点变动时, 如果 $D_Y^{\mathcal{E}_Y}$ 的特征值穿过零点, 则 $P_{\geq 0}$ 这个正交投影关于 B 上的点不连续. 为了保证 $P_{\geq 0}$ 关于 B 上的点连续, 可以假设 $\ker D_Y^{\mathcal{E}_Y} = 0$. 在这种情形下, $(D_X^\mathcal{E}, P_{\geq 0})$ 是一个 Fredholm 算子的连续族, 它定义了簇指标 $\text{ind}_{\text{APS}}(D_X^\mathcal{E}) \in K^0(B)$.

定理 3.12 [56, 57] 假设纤维 X 是偶数维且 $\ker D_Y^{\mathcal{E}_Y} = 0$, 则有

$$\text{ch}(\text{ind}_{\text{APS}}(D_X^\mathcal{E})) = \left[\int_X \widehat{A}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}}) - \tilde{\eta}(\pi_{\partial}, \mathcal{E}_Y) \right] \in H^{\text{even}}(B, \mathbb{R}). \quad (3.112)$$

此处的 $\tilde{\eta}(\pi_{\partial}, \mathcal{E}_Y)$ 是定义 3.2 中的 Bismut-Cheeger η -形式. 由定理 3.5 和 (3.87) 可知, 当 B 为一个点时, 定理 3.12 退化为 APS 指标定理—定理 3.5. Bismut 和 Cheeger [58] 还讨论了 $\ker D_Y^{\mathcal{E}_Y}$ 组成向量丛或纤维为奇数维的情形.

Melrose 和 Piazza [165] 去掉了 $\ker D_Y^{\mathcal{E}_Y} = 0$ 的条件, 通过引入谱截面的概念替换掉 APS 边界条件, 从而得到了一般偶数维纤维情形的带边簇指标定理. 事实上, Melrose 和 Piazza [166] 还解决了奇数维纤维的情形. 当纤维 X 为奇数维时, 边界 Y 是偶数维的. 设 \mathcal{E} 是一个 $C(TX)$ -Dirac 丛, 且在边界附近其度量与联络有乘积结构. 令 $\mathcal{E}_Y = \mathcal{E}|_Y$, 则 \mathcal{E}_Y 是纤维丛 π_{∂} 上的 $C(TY)$ -Dirac 丛. 在边界的邻域上记 $\sigma = \text{ic}(\frac{\partial}{\partial r})$, 则限制在边界上 $\sigma^2 = 1$ 且 σ 的两个特征子空间给出了 \mathcal{E}_Y 的 \mathbb{Z}_2 分次.

下面将偶数维与奇数维纤维这两种情形放在一起讨论.

定义 3.5 [165, 166] 对一簇 Y_b 上的自伴拟微分投影算子 $P_b, b \in B$, 如果它连续依赖于 $b \in B$ 且满足对某个光滑正函数 $f: B \rightarrow \mathbb{R}$, 有

$$D_{Y_b}^{\mathcal{E}_Y} u = \lambda u \Rightarrow \begin{cases} P_b u = u, & \text{若 } \lambda > f(b), \\ P_b u = 0, & \text{若 } \lambda < -f(b), \end{cases} \quad (3.113)$$

则称 $P = \{P_b\}_{b \in B}$ 是一个谱截面 (spectral section). 对于偶数维纤维的纤维丛, 我们需要额外要求

$$\sigma \circ P \circ \sigma + P = \text{Id}. \quad (3.114)$$

在这个定义中并不需要假设 Y 是另一个流形的边界. 需要注意谱截面的选取不是唯一的.

定理 3.13 [165, 166] 对于谱截面, 有以下性质成立.

(1) 对于一个取定的谱截面 P , 一定存在一簇光滑算子 A_P , 连续依赖于 $b \in B$, 使得 $\ker(D_Y^{\mathcal{E}_Y} + A_P) = 0$. 对于偶数维纤维情形, 取到的 A_P 还满足 $\sigma \circ A_P + A_P \circ \sigma = 0$.

(2) 如果谱截面存在, 则簇 Dirac 算子的指标消失. 反过来, 如果纤维 Y 存在一个非零维的连通分支且簇 Dirac 算子的指标消失, 则谱截面一定存在.

由定义 3.5 可知, 如果纤维为奇数维, 且 $\ker D_Y^{\mathcal{E}_Y}$ 组成了 B 上的向量丛, 则 $P_{\geq 0}$ 是一个谱截面. 此时由定理 3.13 可知 $\text{ind}(D_Y^{\mathcal{E}_Y}) = 0 \in K^1(B)$.

注意到, 如果我们要合理定义类似于定义 3.2 的 η -形式, 则类似于 (3.84) 的估计是必要的. 事实上 Bismut-Cheeger η -形式中的向量丛假设保证了 (3.84) 的第 2 个估计成立. 而在谱截面存在的假设下, 如果将 (3.80) 中的 B_t 替换为 $B_t + \sqrt{t}A_P$, 即使不满足向量丛假设, (3.84) 的第 2 个估计也会成立. 但此时第 1 个估计会出问题. 为了解决这个问题, 可以取截断函数

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, & \text{若 } t < 1, \\ 1, & \text{若 } t > 2, \end{cases} \quad (3.115)$$

然后将 B_t 替换为 $B_t + \chi(t)\sqrt{t}A_P$.

定义 3.6 [165, 166] 给定谱截面 P , 定义带扰动的 η -形式

$$\tilde{\eta}_P(\pi_\partial, \underline{\mathcal{E}}_Y) := - \int_0^{+\infty} \left\{ \psi_{\mathbb{R} \times B} \widetilde{\text{Tr}}_s \left[\exp \left(- \left(B_t + \chi(t)\sqrt{t}A_P + dt \wedge \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \right) \right] \right\}^{dt} dt. \quad (3.116)$$

注意到此时 $\tilde{\eta}_P(\pi_\partial, \underline{\mathcal{E}}_Y)$ 的定义与截断函数 $\chi(t)$ 和 A_P 的选取有关. 但取不同的截断函数与不同的 A_P 时, 得到的带扰动的 η -形式之间只差一个恰当形式. 所以需要在差一个恰当形式的意义下讨论带扰动的 η -形式, 即认为

$$\tilde{\eta}_P(\pi_\partial, \underline{\mathcal{E}}_Y) \in \Omega^*(B, \mathbb{R}) / \text{Im } d. \quad (3.117)$$

当取不同的谱投影 P 时, 带扰动的 η -形式变化较大. 我们会在下一节讨论这个问题. 当 B 为一个点且 Y 为奇数维时, APS 边界条件 $P = P_{\geq 0}$ 是一个谱投影, 此时

$$\tilde{\eta}_{P_{\geq 0}}(\pi_\partial, \underline{\mathcal{E}}_Y) = \bar{\eta}(D_Y^{\mathcal{E}_Y}) \quad (3.118)$$

为 (3.48) 中定义的约化 η -不变量. 需注意定义 3.6 也不需要假设 π_∂ 是另一个纤维丛的边界. 对应于 (3.86), 有

$$d\tilde{\eta}_P(\pi_\partial, \underline{\mathcal{E}}_Y) = \int_Y \widehat{A}(TY, \nabla^{TY}) \text{ch}(\mathcal{E}_Y/S, \nabla^{\mathcal{E}_Y}). \quad (3.119)$$

如果 π_∂ 是另一个纤维丛的边界, 则由配边不变性可知, 边界纤维丛的簇 Dirac 算子的指标一定消失, 谱截面一定存在. Melrose 和 Piazza [165, 166] 将定理 3.12 中的 APS 边界条件 $P_{\geq 0}$ 替换为谱截面 P , 得到了对应的簇指标 $\text{ind}(D_X^\mathcal{E}, P) \in K^*(B)$ (当纤维为偶数维时, $*$ = 0; 当纤维为奇数维时, $*$ = 1).

定理 3.14 [165, 166] 对取定的谱截面 P , 有

$$\text{ch}(\text{ind}(D_X^\mathcal{E}, P)) = \left[\int_X \widehat{A}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}(\mathcal{E}/S, \nabla^\mathcal{E}) - \tilde{\eta}_P(\pi_\partial, \underline{\mathcal{E}}_Y) \right] \in H^*(B, \mathbb{R}). \quad (3.120)$$

当纤维为偶数维时, $*$ = even; 当纤维为奇数维时, $*$ = odd.

关于定理 3.14 在几何中的应用, 可参见文献 [104]. 对于带有紧 Lie 群作用的等变带边簇指标定理, 我们并没有在现有文献中找到信息. 但我们相信定理 3.12 和 3.14 都可以被推广到等变情形和对应的 Kirillov 型公式. 由定理 3.14 可知, 在微分形式的意义下, (3.120) 等号左右两端相差一个微分形式的外微分. 类比于 (3.86), 如果能够将这个微分形式严格构造出来, 也是一件有意义的事情.

4 η -不变量与 η -形式的性质

在上一节带边流形指标定理的讨论中, 提到了一个谱不变量— η -不变量 (3.49). 它对应了 APS 指标定理的边界项. 事实上, 即使奇数维紧致流形 Y 不能看作某个带边流形的边界, 我们也能够从它的 Dirac 丛上面应用 (3.49) 合理定义 η -不变量. 如果 Dirac 丛 $\underline{\mathcal{E}} = \underline{\mathcal{E}}_+ \oplus \underline{\mathcal{E}}_-$ 是 \mathbb{Z}_2 分次的, 则可以类似定义

$$\eta(D_Y^\mathcal{E}) := \eta(D_Y^{\mathcal{E}^+}) - \eta(D_Y^{\mathcal{E}^-}). \quad (4.1)$$

对于由 (3.54) 和 (3.55) 定义的等变 η -不变量和无穷小等变 η -不变量, 也可以照此扩展它们的定义范围.

在定义 3.2 中, 当簇 Dirac 算子的核空间组成底空间的向量丛时 (简记为向量丛条件), 引入了 Bismut-Cheeger η -形式作为 η -不变量的推广. 由 (3.87) 可知, 当底空间为一个点且纤维为奇数维时, η -形式恰等于 η -不变量的一半. 在定义 3.6 中, 如果簇 Dirac 算子的指标消失 (简记为指标消失条件), 带扰动的 η -形式被合理定义. 由 (3.118) 可知, 它是约化 η -不变量的高维推广.

我们在前面提到过, 当纤维为奇数维时, 向量丛条件可以推导出指标消失条件. 在这种情形下簇 APS 边界条件 $P_{\geq 0}$ 是一个谱投影. 在差一个恰当形式的意义下, 有 (参见文献 [146, 命题 2.3])

$$\tilde{\eta}_{P_{\geq 0}}(\pi, \underline{\mathcal{E}}_Y) = \tilde{\eta}(\pi, \underline{\mathcal{E}}_Y) + \frac{1}{2} \text{ch}(\ker D_Y^\mathcal{E}, \nabla^{\ker}). \quad (4.2)$$

当 B 为一个点时, 此即为 (3.48). 但在一般情形下, 这两个条件之间并没有包含关系. 在技术层面上, 这两个条件都是为了满足 (3.84) 的第 2 个估计. 受 (4.2) 的影响, 在向量丛条件下, 对 $g \in G$, 引入约化的等变 Bismut-Cheeger η -形式

$$\tilde{\eta}_g(\pi, \underline{\mathcal{E}}) = \begin{cases} \tilde{\eta}_g(\pi, \underline{\mathcal{E}}) + \frac{1}{2} \text{ch}_g(\ker D_X^\mathcal{E}, \nabla^{\ker}), & \text{若 } \dim X \text{ 是奇数,} \\ \tilde{\eta}_g(\pi, \underline{\mathcal{E}}), & \text{若 } \dim X \text{ 是偶数.} \end{cases} \quad (4.3)$$

与指标与簇指标相比, η -不变量和 η -形式是指标理论中更精细的不变量. 在指标理论的发展过程中, 类似的精细不变量还有两类: 实解析挠率 [175] 与实解析挠率形式 [72]、全纯挠率 [176] 与全纯挠率

形式 [70]. 本文不会详细讨论这两类不变量 (关于全纯挠率的综述, 可参见文献 [51]). 但在讨论 η -不变量与 η -形式时, 若另外两类不变量有类似的性质, 我们会在文中提及. 我们会发现虽然这三类不变量定义完全不同, 但有时会有类似的性质.

本节介绍 η -不变量的一些性质并讨论它们在这两种 η -形式上的推广. 受个人兴趣与能力所限, 本文仅对 η -不变量和 η -形式的部分性质作简要介绍, 很多与 η -不变量相关的重要专题都不会涉及.

本节内容安排如下. 第 4.1 小节介绍等变 η -形式与无穷小等变 η -形式的比较公式. 第 4.2 小节讨论前面提到的各种 η -不变量和 η -形式的变分性质. 第 4.3 小节将 Bismut-Zhang 嵌入公式推广到等变 η -形式. 第 4.4 小节研究 η -不变量的绝热极限公式并将其推广到等变 η -形式. 第 4.5 小节介绍 η -不变量的局部化公式.

4.1 等变 η -不变量与等变 η -形式的比较公式

在 (3.55) 中, 定义了无穷小等变 η -不变量. 此不变量最早由 Goette 引入. Goette [129] 将等变 η -不变量 $\eta_g(D_X^\xi)$ 视为 $g \in G$ 的函数, 并考察了此函数在 $g = e$ 处的奇性. 前面提到, 等变指标 $\text{ind}_g(D_X^\xi)$ 是关于 $g \in G$ 的光滑函数. 但对 $\eta_g(D_X^\xi)$, 它甚至不是一个连续函数. Goette [129] 在 $g = e$ 时将 $\eta_{e,K}(D_X^\xi)$ 定义成关于 $K \in \mathfrak{g}$ 的形式幂级数, 并证明了当 K^X 在 X 上没有零点时, 对任意 $N \in \mathbb{N}, t \rightarrow 0$, 有

$$[\eta_{e,tK}(D_X^\xi)]_N - \eta_{e^{tK}}(D_X^\xi) = 2\mathcal{M}_{e,tK} + O(t^N), \tag{4.4}$$

其中 $[\eta_{e,tK}(D_X^\xi)]_N$ 表示形式幂级数的前 N 项,

$$\mathcal{M}_{e,tK} = \sum_{j \geq -\dim X} c_j(K)t^j, \tag{4.5}$$

且系数 $c_j(K)$ 都可由微分形式的积分来局部表示 (参见 (4.10)). 由 (4.4) 和 (4.5) 可得 $\eta_{e^{tK}}(D_X^\xi)$ 在 $t \rightarrow 0$ 时的奇性可以由 $c_j(K), k < 0$ 具体计算出来.

文献 [149] 证明了此形式幂级数当 $|K|$ 充分小时是收敛的幂级数, 即 (3.55) 中的 $\eta_{e,K}(D_X^\xi)$ 在 $|K|$ 充分小时合理定义且 $\eta_{e,tK}(D_X^\xi)$ 在 t 很小时关于 t 实解析. 我们还在不假设 K^X 零点消失时得到

$$\eta_{e,K}(D_X^\xi) - \eta_{e^K}(D_X^\xi) = 2\mathcal{M}_K. \tag{4.6}$$

更一般地, 我们还得到了非单位元处的奇性.

定理 4.1 [149] 对 $g \in G$, 当 $K \in \mathfrak{z}(g), |K|$ 充分小时, 有

$$\eta_{g,K}(D_X^\xi) - \eta_{g^{e^K}}(D_X^\xi) = 2\mathcal{M}_{g,K}. \tag{4.7}$$

下面给出 $\mathcal{M}_{g,K}$ 的具体定义. 记

$$d_K = d - 2i\pi \cdot \iota_{K^X}. \tag{4.8}$$

令 $\vartheta_K \in T^*X$ 为对偶于 K^X 的 1 形式, 即对任意 $U \in TX$, 有

$$\vartheta_K(U) = g^{TX}(K^X, U). \tag{4.9}$$

定义

$$\mathcal{M}_{g,K} := - \int_0^{+\infty} \int_{X^g} \frac{\vartheta_K}{8vi\pi} \exp\left(\frac{d_K \vartheta_K}{8vi\pi}\right) \widehat{A}_{g,K}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}_{g,K}(\mathcal{E}/S, \nabla^\mathcal{E}) \frac{dv}{v}. \tag{4.10}$$

下面应用定理 4.1 给出定理 3.7 的证明.

定理 3.7 的证明 由定理 3.6, 有

$$\text{ind}_{\text{APS}, g e^K}(D_{X,+}^{\mathcal{E}}) = \int_{X^{g e^K}} \widehat{\text{A}}_{g e^K}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}_{g e^K}(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}}) - \bar{\eta}_{g e^K}(D_Y^{\mathcal{E}^Y}). \quad (4.11)$$

由 (3.53), (3.57) 和定理 4.1, 有

$$\bar{\eta}_{g,K}(D_Y^{\mathcal{E}^Y}) - \bar{\eta}_{g e^K}(D_Y^{\mathcal{E}^Y}) = \mathcal{M}_{g,K}. \quad (4.12)$$

记

$$\mathcal{N}_{g,K} = - \int_0^{+\infty} \frac{\vartheta_K}{8\text{vi}\pi} \exp\left(\frac{d_K \vartheta_K}{8\text{vi}\pi}\right) \widehat{\text{A}}_{g,K}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}_{g,K}(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}}) \frac{dv}{v}. \quad (4.13)$$

由 (4.10), 有

$$\mathcal{M}_{g,K} = \int_{Y^g} \mathcal{N}_{g,K}. \quad (4.14)$$

记 X^K 为由 K 生成的群作用在 X 上的不动点集, 则 X^K 是 X 的一个子流形. 当 $K \in \mathfrak{z}(g)$, $|K|$ 充分小时, 有 $X^{g e^K} = X^g \cap X^K$. 所以 $X^{g e^K}$ 是 X^g 的一个子流形. 由文献 [149, (3.30) 和 (3.33)], 有

$$d_K \mathcal{N}_{g,K} = \widehat{\text{A}}_{g,K}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}_{g,K}(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}}) - \widehat{\text{A}}_{g e^K}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}_{g e^K}(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}}) \delta_{X^{g e^K}}, \quad (4.15)$$

其中 $\delta_{X^{g e^K}}$ 是一个流动形 (current), 使得对任意 $\alpha \in \Omega^*(X^g)$, 有

$$\int_{X^g} \alpha \delta_{X^{g e^K}} = \int_{X^{g e^K}} \alpha. \quad (4.16)$$

由 Stokes 公式及 (4.14) 和 (4.15), 有

$$\begin{aligned} & \int_{X^g} \widehat{\text{A}}_{g,K}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}_{g,K}(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}}) - \int_{X^{g e^K}} \widehat{\text{A}}_{g e^K}(TX, \nabla^{TX}) \text{ch}_{g e^K}(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}}) \\ &= \int_{X^g} d_K \mathcal{N}_{g,K} = \int_{Y^g} \mathcal{N}_{g,K} = \mathcal{M}_{g,K}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

由 (4.11), (4.12) 和 (4.17), 即得定理 3.7. \square

下面将定理 4.1 推广到 η -形式. 对 $g \in G$, 记 $\tilde{\eta}_g(\pi, \underline{\mathcal{E}})$ 和 $\tilde{\eta}_{g,K}(\pi, \underline{\mathcal{E}})$ 为定义 3.3 和 3.4 中满足向量丛假设的等变 η -形式.

定理 4.2 ^[149] 对 $g \in G$, 当 $K \in \mathfrak{z}(g)$, $|K|$ 充分小时, 在差一个恰当形式的意义下, 有

$$\tilde{\eta}_{g,K}(\pi, \underline{\mathcal{E}}) - \tilde{\eta}_{g e^K}(\pi, \underline{\mathcal{E}}) = \mathcal{M}_{g,K}, \quad (4.18)$$

其中 $\mathcal{M}_{g,K}$ 仍由 (4.10) 定义, 只需要额外要求 ϑ_K 在 $T^H W$ 上消失.

对于指标消失假设下的带扰动的 η -形式, 也可以同样证明类似于定理 4.2 的比较公式.

对于实解析挠率和全纯挠率, 也存在对应的比较公式 [67, 69]. 我们猜测对实解析挠率形式和全纯挠率形式, 也有对应的比较公式成立.

4.2 η -不变量与 η -形式的变分性质

从 (3.50) 可以看出 η -不变量是一个精细的谱不变量. 虽然指标是一个拓扑不变量, 但 η -不变量不是. 当流形与 Dirac 丛上的度量和联络发生变化时, η -不变量的取值也会发生变化. 本小节讨论几何结构变化时 η -不变量与 η -形式的变化.

设 X 是一个奇数维紧致 Riemann 流形. 对 $i = 0, 1$, 记 g_i^{TX} 为 X 上的两个不同的 Riemann 度量, ∇_i^{TX} 为对应的 Levi-Civita 联络. 设 $\underline{\mathcal{E}}_i = (\mathcal{E}, h_i^\mathcal{E}, \nabla_i^\mathcal{E})$, $i = 0, 1$ 是分别对应于 g_i^{TX} 的同一个 Clifford 模上的两个 Dirac 丛. 记 D_i 为对应的 Dirac 算子.

定理 4.3 [16] 存在 $x \in \mathbb{Z}$ 使得约化 η -不变量的差为

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(D_1) - \bar{\eta}(D_0) &= \int_X \tilde{\hat{A}}(TX, \nabla_0^{TX}, \nabla_1^{TX}) \text{ch}(\mathcal{E}/S, \nabla_0^\mathcal{E}) \\ &\quad + \int_X \hat{A}(TX, \nabla_1^{TX}) \tilde{\text{ch}}(\mathcal{E}/S, \nabla_0^\mathcal{E}, \nabla_1^\mathcal{E}) + x, \end{aligned} \tag{4.19}$$

其中 $x \in \mathbb{Z}$ 可解释为算子 D_0 与 D_1 间的谱流 $\text{Sf}(D_0, D_1)$.

上式中的 $\tilde{\hat{A}}(\cdot)$ 与 $\tilde{\text{ch}}(\cdot)$ 为 \hat{A} 形式与 Chern 特征形式对应的 Chern-Simons 形式 [96], 定义如下. 我们可将 $i = 0$ 与 $i = 1$ 对应的两组几何数据用一条光滑曲线连接起来: 取 g_s^{TX} 为光滑依赖于 $s \in [0, 1]$ 的一族 Riemann 度量使得 $g_s^{TX}|_{s=0} = g_0^{TX}$, $g_s^{TX}|_{s=1} = g_1^{TX}$. 记 $\tilde{X} = X \times [0, 1]$, $p: \tilde{X} \rightarrow X$ 为投影映射, 则 $g^{T\tilde{X}} := ds^2 + g_s^{TX}$ 是 \tilde{X} 上的 Riemann 度量. 记 $\nabla^{T\tilde{X}}$ 为 $g^{T\tilde{X}}$ 的 Levi-Civita 联络. 定义 (参见文献 [160, 附录 D])

$$\tilde{\hat{A}}(TX, \nabla_0^{TX}, \nabla_1^{TX}) := - \int_0^1 [\hat{A}(T\tilde{X}, \nabla^{T\tilde{X}})]^{ds} ds. \tag{4.20}$$

另外, 取 $\underline{\mathcal{E}}_s = (\mathcal{E}, h_s^\mathcal{E}, \nabla_s^\mathcal{E})$ 为光滑依赖于 $s \in [0, 1]$ 的一族对应于 Riemann 度量 g_s^{TX} 的 Dirac 丛使得 $\underline{\mathcal{E}}_s|_{s=0} = \underline{\mathcal{E}}_0$, $\underline{\mathcal{E}}_s|_{s=1} = \underline{\mathcal{E}}_1$. 对任意 $x \in X$, 都存在 x 的邻域 U 使得 U 是 spin 流形. 由 (2.50), 在 U 上有 $\mathcal{E} = S(TX) \otimes E$, $h_s^\mathcal{E} = h_s^{S(TX)} \otimes h_s^E$, $\nabla_s^\mathcal{E} = \nabla_s^{S(TX)} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla_s^E$ 且 $\text{ch}(\mathcal{E}/S, \nabla_s^\mathcal{E}) = \text{ch}(E, \nabla_s^E)$. 记 p_U 为投影映射 p 在 $U \times [0, 1]$ 上的限制, 则 $\tilde{h}^E := \{h_s^E\}_{s \in [0, 1]}$ 为 p_U^*E 上的 Hermite 度量. 由文献 [160, (B.5.21)] 可知

$$\tilde{\nabla}^E := \nabla_s^E + ds \wedge \left(\frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2}(h_s^E)^{-1} \frac{\partial}{\partial s} h_s^E \right) \tag{4.21}$$

为 p_U^*E 上与 \tilde{h}^E 相容的联络. 在 U 上, 定义

$$\tilde{\text{ch}}(\mathcal{E}/S, \nabla_0^\mathcal{E}, \nabla_1^\mathcal{E}) := - \int_0^1 [\text{ch}(p_U^*E, \tilde{\nabla}^E)]^{ds} ds. \tag{4.22}$$

注意到由文献 [160, 定理 B.5.4], 此时 (4.20) 与 (4.22) 中的定义在差一个恰当形式的意义下不依赖于光滑曲线的选取, 所以 $\tilde{\text{ch}}(\mathcal{E}/S, \nabla_0^\mathcal{E}, \nabla_1^\mathcal{E})$ 在 $\Omega^*(X, \mathbb{R})/\text{Im } d$ 上整体定义. 我们有

$$\tilde{\hat{A}}(TX, \nabla_0^{TX}, \nabla_1^{TX}), \tilde{\text{ch}}(\mathcal{E}/S, \nabla_0^\mathcal{E}, \nabla_1^\mathcal{E}) \in \Omega^*(X, \mathbb{R})/\text{Im } d. \tag{4.23}$$

记 D_s 为 $\underline{\mathcal{E}}_s$ 对应的 Dirac 算子. 谱流 $\text{Sf}(D_0, D_1)$ 定义为当 D_s 的谱从 $s = 0$ 流到 $s = 1$ 时穿过实轴的带有定向的次数 (自上而下穿过实轴记为 -1 次, 从下到上穿过实轴记为 1 次).

我们还可以从另一个角度来看定理 4.3. 考虑带边流形 \tilde{X} 并使得边界附近有乘积结构, 则 (4.19) 可由 APS 指标定理 (定理 3.5) 推导出. 此时 (4.19) 中的整数 x 被解释为 \tilde{X} 上的 APS 指标.

假设 X 上有一个光滑的 G 作用, 且对 $i = 0, 1$, g_i^{TX} 都是 G 不变的. 假设 $\underline{\mathcal{E}}_i = (\mathcal{E}, h_i^\mathcal{E}, \nabla_i^\mathcal{E})$, $i = 0, 1$ 是两个等变 Dirac 丛. 记 G 的表示环 $R(G)$ 为 G 的所有有限维不可约复表示生成的环. 由紧 Lie 群的表示理论可知 G 的复表示 M 由其特征标 $\chi_M : G \rightarrow \mathbb{C}$ 唯一决定.

定理 4.4 存在 $\chi \in R(G)$, 使得对 $g \in G$, 等变约化 η -不变量的差为

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_g(D_1) - \bar{\eta}_g(D_0) &= \int_{X^g} \tilde{\hat{A}}_g(TX, \nabla_0^{TX}, \nabla_1^{TX}) \text{ch}_g(\mathcal{E}/S, \nabla_0^\mathcal{E}) \\ &\quad + \int_{X^g} \hat{A}_g(TX, \nabla_1^{TX}) \tilde{\text{ch}}_g(\mathcal{E}/S, \nabla_0^\mathcal{E}, \nabla_1^\mathcal{E}) + \chi(g). \end{aligned} \quad (4.24)$$

此处等变 Chern-Simons 形式 $\tilde{\hat{A}}_g(\cdot)$ 和 $\tilde{\text{ch}}_g(\cdot)$ 为将 (4.20) 和 (4.22) 中等式右端的 $\hat{A}(\cdot)$ 和 $\text{ch}(\cdot)$ 替换为 $\tilde{\hat{A}}_g(\cdot)$ 和 $\text{ch}_g(\cdot)$ 后左端得到的 X^g 上的微分形式, $\chi(g) \in \mathbb{C}$ 可解释为算子 D_0 与 D_1 间的等变谱流 $\text{Sf}_g(D_0, D_1)$ [115].

定理 4.4 的证明可参见文献 [143, 145]. 类似于 (4.19), (4.24) 也可由等变 APS 指标定理 (定理 3.6) 推导出. 此时 (4.24) 中的 $\chi(g)$ 被解释为 \tilde{X} 上的等变 APS 指标.

由定理 4.1, 4.4 和文献 [149, 命题 3.2], 可以直接得到无穷小等变 η -不变量的变分公式.

定理 4.5 对 $g \in G$, 当 $K \in \mathfrak{z}(g)$, $|K|$ 充分小时, 无穷小等变约化 η -不变量的差为

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_{g,K}(D_1) - \bar{\eta}_{g,K}(D_0) &= \int_{X^g} \tilde{\hat{A}}_{g,K}(TX, \nabla_0^{TX}, \nabla_1^{TX}) \text{ch}_{g,K}(\mathcal{E}/S, \nabla_0^\mathcal{E}) \\ &\quad + \int_{X^g} \hat{A}_{g,K}(TX, \nabla_1^{TX}) \tilde{\text{ch}}_{g,K}(\mathcal{E}/S, \nabla_0^\mathcal{E}, \nabla_1^\mathcal{E}) + \text{Sf}_{ge^K}(D_0, D_1). \end{aligned} \quad (4.25)$$

此处无穷小等变 Chern-Simons 形式 $\tilde{\hat{A}}_{g,K}(\cdot)$ 和 $\tilde{\text{ch}}_{g,K}(\cdot)$ 分别为将 (4.20) 和 (4.22) 中等式右端的 $\hat{A}(\cdot)$ 和 $\text{ch}(\cdot)$ 替换为 $\hat{A}_{g,K}(\cdot)$ 和 $\text{ch}_{g,K}(\cdot)$ 后左端得到的 X^g 上的微分形式.

下面将定理 4.3–4.5 推广到高维, 即将 η -不变量推广到前面提到的两种 η -形式.

考虑第 3.5 小节中的纤维丛 $\pi : W \rightarrow B$. 设 \mathcal{E} 为其上的一个 $C(TX)$ -Clifford 模. 考虑两个水平子丛 $T_0^H W$ 和 $T_1^H W$, TX 上的两个度量 g_0^{TX} 和 g_1^{TX} , 以及两个分别对应于 g_i^{TX} 的 \mathbb{Z}_2 分次 $C(TX)$ -Dirac 丛 $\underline{\mathcal{E}}_i = (\mathcal{E}, h_i^\mathcal{E}, \nabla_i^\mathcal{E})$, $i = 0, 1$. 记对应于 $(T_i^H W, g_i^{TX}, h_i^\mathcal{E}, \nabla_i^\mathcal{E})$ 的簇 Dirac 算子为 D_i .

首先考虑指标消失条件下的 η -形式. 由于簇 Dirac 算子的指标是一个拓扑量, 如果 $\text{ind}(D_0) = 0$, 则有 $\text{ind}(D_1) = 0$. 设 P_i 为与 D_i 对应的谱截面. 记 $\tilde{\eta}_{P_i}(\pi, \underline{\mathcal{E}}_i)$ 为由定义 3.6 决定的对应于 (D_i, P_i) 的带扰动的 η -形式.

定理 4.6 [105, 145] 在差一个恰当形式的意义下, 有

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{P_1}(\pi, \underline{\mathcal{E}}_1) - \tilde{\eta}_{P_0}(\pi, \underline{\mathcal{E}}_0) &= \int_X \tilde{\hat{A}}(TX, \nabla_0^{TX}, \nabla_1^{TX}) \text{ch}(\mathcal{E}/S, \nabla_0^\mathcal{E}) \\ &\quad + \int_X \hat{A}(TX, \nabla_1^{TX}) \tilde{\text{ch}}(\mathcal{E}/S, \nabla_0^\mathcal{E}, \nabla_1^\mathcal{E}) + \text{ch}(\text{HSf}\{(D_0, P_0), (D_1, P_1)\}), \end{aligned}$$

其中 $\text{HSf}\{(D_0, P_0), (D_1, P_1)\} \in K^*(B)$ 是 (D_0, P_0) 与 (D_1, P_1) 间的高维谱流 (当纤维为偶数维时, $*$ = 1; 当纤维为奇数维时, $*$ = 0), 由 Dai 和 Zhang [105] 引入.

由定理 3.14 可知高维谱流项 $\text{HSf}\{(D_0, P_0), (D_1, P_1)\}$ 可被替换为某个簇指标.

下面考虑向量丛条件下的 η -形式. 假设 $\ker D_0$ 和 $\ker D_1$ 都组成 B 上的向量丛. 记 $\tilde{\eta}(\pi, \underline{\mathcal{E}}_i)$ 为由 (4.3) 决定的对应于 D_i 的约化 η -形式.

定理 4.7 ^[146] 存在 $x \in K^*(B)$, 使得在差一个恰当形式的意义下, 有

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(\pi, \underline{\mathcal{E}}_1) - \tilde{\eta}(\pi, \underline{\mathcal{E}}_0) &= \int_X \tilde{\hat{A}}(TX, \nabla_0^{TX}, \nabla_1^{TX}) \text{ch}(\mathcal{E}/S, \nabla_0^\mathcal{E}) \\ &+ \int_X \hat{A}(TX, \nabla_1^{TX}) \tilde{\text{ch}}(\mathcal{E}/S, \nabla_0^\mathcal{E}, \nabla_1^\mathcal{E}) + \text{ch}(x). \end{aligned} \quad (4.26)$$

此处 (4.26) 中的 $x \in K^*(B)$ 可以由某些高维谱流构造而得.

接下来考虑等变情形. 我们采用定理 3.9 中的假设, 即假设沿纤维作用的紧 Lie 群 G 保持所有结构不变.

定理 4.8 ^[146] 假设 $\ker D_0$ 和 $\ker D_1$ 都组成 B 上的向量丛, 存在 $x \in K_G^*(B)$, 使得对任意 $g \in G$, 在差一个恰当形式的意义下, 有

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_g(\pi, \underline{\mathcal{E}}_1) - \tilde{\eta}_g(\pi, \underline{\mathcal{E}}_0) &= \int_{X^g} \tilde{\hat{A}}_g(TX, \nabla_0^{TX}, \nabla_1^{TX}) \text{ch}_g(\mathcal{E}/S, \nabla_0^\mathcal{E}) \\ &+ \int_{X^g} \hat{A}_g(TX, \nabla_1^{TX}) \tilde{\text{ch}}_g(\mathcal{E}/S, \nabla_0^\mathcal{E}, \nabla_1^\mathcal{E}) + \text{ch}_g(x). \end{aligned} \quad (4.27)$$

下面考虑指标消失条件下的等变 η -形式. 对于谱截面 P , 如果 P 与群作用可换, 则称 P 是一个 G -等变的谱截面. 如下定理是定理 3.13 的等变推广.

定理 4.9 ^[145] 对于等变谱截面, 有以下性质成立.

(1) 对于一个取定的等变谱截面 P , 一定存在一簇与群作用可换的光滑算子 A_P , 连续依赖于 $b \in B$, 使得 $\ker(D_X^\mathcal{E} + A_P) = 0$. 对于奇数维纤维情形, 可取到 A_P 满足 $\sigma \circ A_P = A_P \circ \sigma$; 对于偶数维纤维情形, 可取到 A_P 满足 $\sigma \circ A_P + A_P \circ \sigma = 0$, 其中 σ 为 \mathcal{E} 的 \mathbb{Z}_2 分次.

(2) 如果等变谱截面存在, 则

$$\text{ind}(D_{X,+}^\mathcal{E}) = 0 \in K_G^*(B).$$

反过来, 如果纤维存在非零维的连通分支, 则当 $\text{ind}(D_{X,+}^\mathcal{E}) = 0 \in K_G^*(B)$ 时可以推导出等变谱截面存在.

值得注意的是, 当 B 上的群作用非平凡时, 此定理依然成立.

定义 4.1 ^[145] 给定等变谱投影 P , 对 $g \in G$, 定义带扰动的等变 η -形式

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{g,P}(\pi, \underline{\mathcal{E}}) &:= - \int_0^{+\infty} \left\{ \psi_{\mathbb{R} \times B} \tilde{\text{Tr}}_s \left[g \exp \left(- \left(B_t + \chi(t) \sqrt{t} A_P + dt \wedge \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \right) \right] \right\} dt \\ &\in \Omega^*(B, \mathbb{R}) / \text{Im } d. \end{aligned} \quad (4.28)$$

在差一个恰当形式的意义下此定义依然与截断函数 $\chi(t)$ 和 A_P 的选取无关.

对于带扰动的等变 η -形式, 我们也有对应的变分公式. 假设 $\text{ind}(D_0) = 0 \in K_G^*(B)$, 则由等变指标拓扑不变知 $\text{ind}(D_1) = 0 \in K_G^*(B)$. 取 P_i 为与 D_i 对应的等变谱截面. 记 $\tilde{\eta}_{g,P_i}(\pi, \underline{\mathcal{E}}_i)$ 为由定义 4.1 决定的对应于 (D_i, P_i) 的带扰动的等变 η -形式.

定理 4.10 ^[145] 对 $g \in G$, 在差一个恰当形式的意义下, 有

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{g,P_1}(\pi, \underline{\mathcal{E}}_1) - \tilde{\eta}_{g,P_0}(\pi, \underline{\mathcal{E}}_0) &= \int_{X^g} \tilde{\hat{A}}_g(TX, \nabla_0^{TX}, \nabla_1^{TX}) \text{ch}_g(\mathcal{E}/S, \nabla_0^\mathcal{E}) \\ &+ \int_{X^g} \hat{A}_g(TX, \nabla_1^{TX}) \tilde{\text{ch}}_g(\mathcal{E}/S, \nabla_0^\mathcal{E}, \nabla_1^\mathcal{E}) \\ &+ \text{ch}_g(\text{HSf}_G\{(D_0, P_0), (D_1, P_1)\}), \end{aligned} \quad (4.29)$$

其中 $\text{HSf}_G\{(D_0, P_0), (D_1, P_1)\} \in K_G^*(B)$ 是 (D_0, P_0) 与 (D_1, P_1) 间的等变高维谱流 (定义参见 [145, 定义 3.7 和 3.8]).

如果定理 3.14 可以被推广到等变情形, 则定理 4.8 和 4.10 也可以被自然推导出, 只是将高维谱流项替换为某个等变簇指标. 根据定理 4.8 和 4.10 以及上一节的比较公式, 容易得到两种无穷小等变 η -形式的变分公式. 其形式类似于定理 4.5.

关于其他设定下的 η -不变量和 η -形式的变分公式, 可参见文献 [30], [85], [86], [130], [134] 和 [155]. 关于全纯挠率、等变全纯挠率、等变无穷小全纯挠率、全纯挠率形式与等变全纯挠率形式的变分公式, 可分别参见文献 [64], [48], [67], [70] 和 [158]; 关于实解析挠率、等变实解析挠率、等变无穷小实解析挠率、实解析挠率形式与等变实解析挠率形式的变分公式, 可分别参见文献 [78], [80], [69], [72] 和 [68].

4.3 η -不变量与 η -形式的嵌入公式

η -不变量的另一个重要的性质是著名的 Bismut-Zhang 嵌入公式. 这个公式在近年来微分 K 理论的发展中起到了非常关键的作用 (参见第 5 节).

设 $i: Y \rightarrow X$ 是奇数维定向紧致 Riemann 流形间的一个等距嵌入. 由于我们有变分公式, 所以总可以假设 Y 是 X 的全测地子流形. 设 $N_{Y/X}$ 为 Y 在 X 中带有诱导度量的法丛. 假设 $N_{Y/X}$ 上存在 spin^c 结构, 即存在 Y 上的复线丛 L_N 使得其第一 Chern 类满足 $\omega_2(N_{Y/X}) = c_1(L_N) \pmod{2}$.

定理 4.11 [79] 设 $\underline{\mathcal{E}}_Y = (\mathcal{E}_Y, h^{\mathcal{E}_Y}, \nabla^{\mathcal{E}_Y})$ 为 Y 上的一个 Dirac 丛, 则 X 上存在 \mathbb{Z}_2 分次的 Dirac 丛 $\underline{\mathcal{E}}_X = (\mathcal{E}_X, h^{\mathcal{E}_X}, \nabla^{\mathcal{E}_X})$, 使得

$$\bar{\eta}(D_X^{\mathcal{E}_X}) - \bar{\eta}(D_Y^{\mathcal{E}_Y}) - \int_X \widehat{A}(TX, \nabla^{TX}) \gamma(\mathcal{E}_Y, \mathcal{E}_X) \in \mathbb{Z}, \quad (4.30)$$

其中 $\gamma(\mathcal{E}_Y, \mathcal{E}_X)$ 称为 Bismut-Zhang 流动形, 满足

$$d\gamma(\mathcal{E}_Y, \mathcal{E}_X) = \text{ch}(\mathcal{E}_X/S, \nabla^{\mathcal{E}_X}) - \widehat{A}^{-1}(N_{Y/X}, \nabla^{N_{Y/X}}) \text{ch}(\mathcal{E}_Y/S, \nabla^{\mathcal{E}_Y}) \delta_Y. \quad (4.31)$$

Bismut 和 Zhang [79] 在 Y 和 X 都是 spin 流形的条件下证明了定理 4.11. 但他们的证明对一般的 Dirac 丛都是适用的. 关于嵌入公式在几何中的应用, 可参见文献 [197]. 注意到 Bismut 和 Zhang [79] 的证明用到了 Bismut 等发展的解析局部化技术, 分析非常复杂. 后来, Zhang [200] 和 Feng 等 [116] 给出了一个不使用解析局部化技术的新证明. Dai 和 Zhang [106] 将 (4.30) 中的整数解释成了带边流形的 APS 指标. 最近我们应用解析局部化技术将定理 4.11 推广到了两种等变 η -形式 [144]. 到目前为止, 我们还不清楚 Feng 等 [116] 的新证明是否可以被推广到等变 η -不变量和这两种等变 η -形式.

下面介绍流形簇嵌入对应的几何结构. 设 $i: W \rightarrow V$ 是一个定向紧致流形间的嵌入. 设 $\pi_V: V \rightarrow B$ 是一个带有紧致纤维 X 的纤维丛. 假设 π_V 限制在 W 上也是 B 上的纤维丛, 纤维为紧致流形 Y , 记为 $\pi_W: W \rightarrow B$. 取 $T^H V$ 和 $T^H W$ 分别为 π_W 和 π_V 上的两个水平子丛. 一般而言, $T^H W \neq T^H V|_W$. 设 TX 和 TY 分别为纤维 X 和 Y 对应的相对切丛, 则有 $TY \subset TX|_W$. 设 g^{TX} 为 TX 上的 Euclid 度量, g^{TY} 为 TY 上的诱导度量. 设 W, V 和 B 上都带有光滑的紧 Lie 群 G 作用且此群作用与嵌入 i 和 π_V 都可交换. 所以它与 π_W 也可交换. 假设 B 上的群作用平凡. 类似于定理 4.11 的条件, 假设 W 在 V 中的法丛为偶数维且其上存在等变的 spin^c 结构.

实际上, 参考文献 [49, 第 7.5 小节], 给定 G 等变的 $T^H W$ 和 g^{TY} , 总可以选取等变的 $T^H V$ 和 g^{TX} 使得 $T^H W = T^H V|_W$, g^{TY} 和 g^{TX} 在 TY 上诱导的度量一致, 且对任意 $b \in B$, Y_b 都是 X_b 的全测地子流形. 由变分公式, 总可以假设我们的几何结构满足这些条件.

给定纤维丛 π_W 上的 \mathbb{Z}_2 分次的 $C(TY)$ -等变 Dirac 丛 \mathcal{E}_Y , 由文献 [144, 第 3.3 小节] 的构造, 可以得到 \mathcal{E}_Y 的等变 Atiyah-Hirzebruch 直接极限的几何实现— π_V 上的一个 \mathbb{Z}_2 分次的 $C(TX)$ -等变 Dirac 丛 \mathcal{E}_X .

定理 4.12 [144] 如果 $\text{ind}(D_Y^{\mathcal{E}_Y}) = 0 \in K_G^*(B)$, 则有 $\text{ind}(D_X^{\mathcal{E}_X}) = 0 \in K_G^*(B)$. 设 P_X 和 P_Y 分别为对应于 $D_Y^{\mathcal{E}_Y}$ 和 $D_X^{\mathcal{E}_X}$ 的等变谱截面, 则存在 $x \in K_G^*(B)$, 使得对任意 $g \in G$, 在差一个恰当形式的意义下, 有

$$\tilde{\eta}_{g, P_X}(\pi_V, \underline{\mathcal{E}_X}) - \tilde{\eta}_{g, P_Y}(\pi_W, \underline{\mathcal{E}_Y}) = \int_{X^g} \widehat{A}_g(TX, \nabla^{TX}) \gamma_g(\mathcal{E}_Y, \mathcal{E}_X) + \text{ch}_g(x), \quad (4.32)$$

其中 $\gamma_g(\mathcal{E}_Y, \mathcal{E}_X)$ 为等变 Bismut-Zhang 流动形, 满足

$$d\gamma_g(\mathcal{E}_Y, \mathcal{E}_X) = \text{ch}_g(\mathcal{E}_X/S, \nabla^{\mathcal{E}_X}) - \widehat{A}_g^{-1}(N_{Y/X}, \nabla^{N_{Y/X}}) \text{ch}_g(\mathcal{E}_Y/S, \nabla^{\mathcal{E}_Y}) \delta_{Y^g}. \quad (4.33)$$

注 4.1 (1) 若 $Y = X^g$, 则有 $\gamma_g(\mathcal{E}_Y, \mathcal{E}_X) = 0$.

(2) 定理 4.12 中的 $x \in K_G^*(B)$ 可由等变高维谱流具体构造出来.

(3) 当 B 为一个点, Y 为奇数维, P_X 和 P_Y 为 APS 边界条件, $g = e$ 时, 定理 4.12 退化到定理 4.11. 此时定理 4.11 中的整数可以由谱流具体构造出来.

定理 4.13 [146] 假设 $\ker D_Y^{\mathcal{E}_Y}$ 和 $\ker D_X^{\mathcal{E}_X}$ 都组成了 B 上的向量丛, 则存在 $x \in K_G^*(B)$, 使得对任意 $g \in G$, 在差一个恰当形式的意义下, 有

$$\tilde{\tilde{\eta}}_g(\pi_V, \underline{\mathcal{E}_X}) - \tilde{\tilde{\eta}}_g(\pi_W, \underline{\mathcal{E}_Y}) = \int_{X^g} \widehat{A}_g(TX, \nabla^{TX}) \gamma_g(\mathcal{E}_Y, \mathcal{E}_X) + \text{ch}_g(x). \quad (4.34)$$

此处的 $x \in K_G^*(B)$ 也可由等变高维谱流显式构造出来.

应用第 4.1 小节中的比较公式, 也可以得到无穷小等变情形的嵌入公式.

关于全纯挠率和全纯挠率形式的嵌入公式, 可分别参见文献 [71] 和 [49]. 实解析挠率是否存在类似的嵌入性质目前仍然是一个困难而神秘的公开问题.

4.4 绝热极限公式及其推广

在前面的介绍中, Bismut-Cheeger η -形式在簇指标定理与带边簇指标定理中以完全不同的角色出现. 这也是 η -形式的一个有趣的地方. 事实上, η -形式还有另外一个解释, 而且这个解释才是它最原始的出处.

在文献 [60, 61, 93, 188] 的影响下, 1989 年, Bismut 和 Cheeger [55] 考虑了如下问题. 对定向紧致 spin 流形 W 和 V , 假设 $\pi_X: W \rightarrow V$ 是一个纤维丛. 此时相对切丛 TX 上有 spin 结构. 首先假设 W 的维数是奇数. 设 $\underline{E} = (E, h^E, \nabla^E)$ 是 W 上的一个几何三元组. 设 g^{TV} 和 g^{TX} 分别是 TV 和 TX 上面的度量. 取定水平子丛后, 对 $\varepsilon > 0$,

$$g_\varepsilon^{TW} = \varepsilon^{-1} \pi^* g^{TV} \oplus g^{TX} \quad (4.35)$$

是 TW 上的 Riemann 度量. 记 $D_{W, \varepsilon}^{S(TW) \otimes E}$ 为度量 g_ε^{TW} 对应的 Dirac 算子.

定理 4.14 [55] 假设簇 Dirac 算子 $D_X^{S(TX) \otimes E}$ 可逆, 即 $\ker D_X^{S(TX) \otimes E} = 0$, 则有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\eta}(D_{W, \varepsilon}^{S(TW) \otimes E}) = \int_V \widehat{A}(TV, \nabla^{TV}) \bar{\eta}(\pi, \underline{S(TX) \otimes E}). \quad (4.36)$$

这个定理是 Bismut-Cheeger η -形式最早出现的地方. 随后, Dai [98] 将定理 4.14 中 $D_X^{S(TX)\otimes E}$ 可逆的条件推广到了向量丛条件.

定理 4.15 [98] 假设 $\ker D_X^{S(TX)\otimes E}$ 组成 V 上的向量丛并假设当 ε 充分小时 $\dim \ker D_{W,\varepsilon}^{S(TW)\otimes E}$ 不变, 则有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\eta}(D_{W,\varepsilon}^{S(TW)\otimes E}) = \int_V \widehat{A}(TV, \nabla^{TV}) \bar{\eta}(\pi, S(TX) \otimes E) + \bar{\eta}(D_V^{S(TV)\otimes \ker D_X^{S(TX)\otimes E}}) \pmod{\mathbb{Z}}. \quad (4.37)$$

对于 $\text{mod } \mathbb{Z}$ 中的整数, Dai [98] 给出了谱理论的解释. 对于符号差情形, Dai [98] 也证明了对应的定理 4.15 并给出了 $\text{mod } \mathbb{Z}$ 中整数的拓扑解释. η -不变量的绝热极限在 Atiyah 等 [10] 证明 Hirzebruch [132] 提出的 Hilbert 模簇 (Hilbert modular variety) 上符号差的猜想中自然出现 (此猜想的另一个证明参见文献 [169]). 其中的分析由 Bismut 和 Cheeger [59] 应用 η -形式重新得到. 关于绝热极限的其他应用, 可参见文献 [100, 101, 103, 107, 108, 161, 196, 199].

下面将绝热极限公式—定理 4.15—推广到高维等变情形, 即将 η -不变量都推广到等变 η -形式.

首先将定理 4.15 中的 spin 条件推广到 Dirac 丛. 设 $\pi_X : W \rightarrow V$ 是一个纤维为 X 的纤维丛, 其中 W 和 V 都是紧致定向流形. 设 $\underline{\mathcal{E}}_X$ 为一个 \mathbb{Z}_2 分次的 $C(TX)$ -Dirac 丛. 设 $\underline{\mathcal{E}}_V$ 为 V 上的一个 \mathbb{Z}_2 分次的 Dirac 丛. 设

$$g_T^{TW} = \pi_X^* g^{TV} \oplus \frac{1}{T^2} g^{TX}, \quad T > 0 \quad (4.38)$$

是 TW 上的 Riemann 度量. 令 $\mathcal{E} := \pi_X^* \mathcal{E}_V \widehat{\otimes} \mathcal{E}_X$, $\nabla^{\mathcal{E}, T}$ 为 g_T^{TW} 对应的 Clifford 联络 (定义参见文献 [143, (3.3)]), 则 $\underline{\mathcal{E}} := (\mathcal{E}, \pi_X^* h^{\mathcal{E}_V} \otimes h^{\mathcal{E}_X}, \nabla^{\mathcal{E}, T})$ 是 W 上的一个 \mathbb{Z}_2 分次的 Dirac 丛. 记 $D_{W,T}^{\mathcal{E}}$ 为对应的 Dirac 算子. 在 $\ker D_X^{\mathcal{E}_X}$ 组成 V 上向量丛的假设下, 可以将 (4.37) 推广为

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(D_{W,T}^{\mathcal{E}}) &= \int_V \widehat{A}(TV, \nabla^{TV}) \text{ch}(\mathcal{E}_V/S, \nabla^{\mathcal{E}_V}) \bar{\eta}(\pi_X, \underline{\mathcal{E}}_X) \\ &\quad - \int_W \widetilde{\widehat{A}}(TW, \nabla_T^{TW}, {}^0\nabla^{TW}) \text{ch}(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}}) + \bar{\eta}(D_V^{\mathcal{E}_V \otimes \ker D_X^{\mathcal{E}_X}}) \pmod{\mathbb{Z}}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

其中 ∇_T^{TW} 为 g_T^{TW} 对应的 Levi-Civita 联络, ${}^0\nabla^{TW} = \pi_X^* \nabla^{TV} \oplus \nabla^{TX}$.

对于 (4.39), 需要作一些注记. 首先在 (4.35) 和 (4.38) 中用到了不同的度量. 事实上, 令 $T = \varepsilon^{-1/2}$, 则有 $g_\varepsilon^{TW} = T^2 g_T^{TW}$. 从而有 $\bar{\eta}(D_{W,\varepsilon}^{S(TW)\otimes E}) = \bar{\eta}(D_{W,T}^{S(TW)\otimes E})$. 另外, 有

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \widetilde{\widehat{A}}(TW, \nabla_T^{TW}, {}^0\nabla^{TW}) = 0.$$

所以 (4.39) 是定理 4.15 的推广. 为简单起见, 可在 (4.39) 中取 $T = 1$. 此时绝热极限公式被推广成为一个等式:

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(D_W^{\mathcal{E}}) &= \int_V \widehat{A}(TV, \nabla^{TV}) \text{ch}(\mathcal{E}_V/S, \nabla^{\mathcal{E}_V}) \bar{\eta}(\pi_X, \underline{\mathcal{E}}_X) \\ &\quad - \int_W \widetilde{\widehat{A}}(TW, \nabla^{TW}, {}^0\nabla^{TW}) \text{ch}(\mathcal{E}/S, \nabla^{\mathcal{E}}) + \bar{\eta}(D_V^{\mathcal{E}_V \otimes \ker D_X^{\mathcal{E}_X}}) \pmod{\mathbb{Z}}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

此时 $\text{mod } \mathbb{Z}$ 中的整数与 (4.37) 中的整数一样有谱理论的解释.

接下来将 (4.40) 直接推广到两种等变 η -形式. 在 (4.40) 的框架下假设 $\pi_Y : V \rightarrow B$ 是另一个带有紧致纤维 Y 的纤维丛, 则 $\pi_Z := \pi_Y \circ \pi_X : W \rightarrow B$ 也是一个纤维丛, 记此时的纤维为 Z . 记 TX ,

TY 和 TZ 为对应的相对切丛, 取 $T_{\pi_X}^H W$, $T_{\pi_Y}^H V$ 和 $T_{\pi_Z}^H W$ 分别为对应于 π_X , π_Y 和 π_Z 的水平子丛. 利用 (3.60), 可以定义 ∇^{TX} , ∇^{TY} 和 ∇^{TZ} . 令 $T^H Z := T_{\pi_X}^H W \cap TZ$, 则

$$TZ = T^H Z \oplus TX, \quad T^H Z \cong \pi_X^* TY \tag{4.41}$$

成立. 相对于 (4.41) 的分解, 定义 ${}^0\nabla^{TZ} = \pi_X^* \nabla^{TY} \oplus \nabla^{TX}$. 设 $\underline{\mathcal{E}}_Y$ 为 π_Y 上 \mathbb{Z}_2 分次的 $C(TY)$ -Dirac 丛. 可以类似地构造 π_Z 上 \mathbb{Z}_2 分次的 $C(TZ)$ -Dirac 丛 $\underline{\mathcal{E}}_Z$.

假设紧 Lie 群 G 光滑等距作用在 W , V 和 B 上且与映射 π_X 和 π_Y 交换. 为了合理定义等变 η -形式, 假设 B 上的群作用是平凡的且前述的所有 Dirac 丛都是等变的.

定理 4.16 [143, 145] 如果 $\text{ind}(D_X^{\mathcal{E}_X}) = 0 \in K_G^*(V)$, 则有 $\text{ind}(D_Z^{\mathcal{E}_Z}) = 0 \in K_G^*(B)$. 设 P_X 和 P_Z 分别为对应于 $D_X^{\mathcal{E}_X}$ 和 $D_Z^{\mathcal{E}_Z}$ 的谱截面, 则存在 $x \in K_G^*(B)$, 使得对任意 $g \in G$, 在差一个恰当形式的意义下, 有

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{g, P_Z}(\pi_Z, \underline{\mathcal{E}}_Z) &= \int_{Y^g} \hat{A}_g(TY, \nabla^{TY}) \text{ch}_g(\underline{\mathcal{E}}_Y/S, \nabla^{\mathcal{E}_Y}) \tilde{\eta}_{g, P_X}(\pi_X|_{W^g}, \underline{\mathcal{E}}_X|_{W^g}) \\ &\quad + \int_{Z^g} \tilde{\hat{A}}_g(TZ, {}^0\nabla^{TZ}, \nabla^{TZ}) \text{ch}_g(\underline{\mathcal{E}}_Z/S, \nabla^{\mathcal{E}_Z}) + \text{ch}_g(x). \end{aligned} \tag{4.42}$$

定理 4.17 [143, 146] 假设 $\ker D_X^{\mathcal{E}_X}$ 是 V 上的向量丛. 假设 $\ker D_Y^{\mathcal{E}_Y \otimes \ker D_X}$ 和 $\ker D_Z^{\mathcal{E}_Z}$ 是 B 上的向量丛. 则存在 $x \in K_G^*(B)$, 对 $g \in G$, 有如下结论:

(1) 如果 $\dim X$ 是偶数, 则在差一个恰当形式的意义下, 有

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_g(\pi_Z, \underline{\mathcal{E}}_Z) &= \tilde{\eta}_g(\pi_Y, \underline{\mathcal{E}}_Y \otimes \ker D_X) + \int_{Z^g} \tilde{\hat{A}}_g(TZ, {}^0\nabla^{TZ}, \nabla^{TZ}) \text{ch}_g(\underline{\mathcal{E}}_Z/S, \nabla^{\mathcal{E}_Z}) \\ &\quad + \int_{Y^g} \hat{A}_g(TY, \nabla^{TY}) \text{ch}_g(\underline{\mathcal{E}}_Y/S, \nabla^{\mathcal{E}_Y}) \tilde{\eta}_g(\pi_X|_{W^g}, \underline{\mathcal{E}}_X|_{W^g}) + \text{ch}_g(x); \end{aligned} \tag{4.43}$$

(2) 如果 $\dim X$ 是奇数, 则在差一个恰当形式的意义下, 有

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_g(\pi_Z, \underline{\mathcal{E}}_Z) &= \int_{Z^g} \tilde{\hat{A}}_g(TZ, {}^0\nabla^{TZ}, \nabla^{TZ}) \text{ch}_g(\underline{\mathcal{E}}_Z/S, \nabla^{\mathcal{E}_Z}) \\ &\quad + \int_{Y^g} \hat{A}_g(TY, \nabla^{TY}) \text{ch}_g(\underline{\mathcal{E}}_Y/S, \nabla^{\mathcal{E}_Y}) \tilde{\eta}_g(\pi_X|_{W^g}, \underline{\mathcal{E}}_X|_{W^g}) + \text{ch}_g(x). \end{aligned} \tag{4.44}$$

定理 4.17 这种类型的性质通常被称为 η -形式的函子性质. 此类性质最早由 Bunke 和 Ma [86] 对非等变平坦丛情形证明. 关于其他设定下的绝热极限公式, 可参见文献 [30], [87], [89] 和 [130]. 关于全纯挠率、等变全纯挠率、全纯挠率形式和等变全纯挠率形式的类似性质, 可分别参见文献 [31], [158], [157] 和 [185]; 对实解析挠率和实解析挠率形式, 类似的性质可参见文献 [99], [102], [107], [156] 和 [159].

4.5 η -不变量的局部化公式

在定理 3.2 和 3.11 中, 我们讨论了指标与簇指标的不动点公式. 本小节讨论 η -不变量的不动点公式并采用第 3.2 小节中的符号.

假设 X 是一个奇数维紧致 spin^c 流形并带有保持 spin^c 结构的光滑的 S^1 作用. 设 \underline{E} 是 X 上的一个几何三元组. 此时 $\mathcal{E} := S(TX, L) \otimes E$ 是一个 Clifford 模且其上自然诱导了一个 Dirac 丛结构.

对应于定理 3.2, 我们自然猜测对 η -不变量也有类似的局部化公式. 但在这里等变 η -不变量与等变指标存在着本质差异. 从定理 3.2 和 3.11 的表述中可以看出, 如果 $X^{S^1} = \emptyset$, 则等变指标消失. 但对于 η -不变量, 即使对于最简单的例子, 这个性质也不成立.

例 4.1 设 $X = S^1$. 此时 X 是一个 spin 流形且其旋量丛为平凡线丛. 记 X 上的点 $x = e^{i\theta}$. 对正整数 k , X 上存在一个自然的 S^1 作用:

$$g e^{i\theta} = e^{2\pi i k t + i\theta}, \quad \forall g = e^{2\pi i t} \in S^1. \quad (4.45)$$

此时显然有 $X^{S^1} = \emptyset$. 设 E 是 X 上的平凡线丛, 带有平凡的度量和联络. 计算可得 (参见文献 [148, 例 3.12])

$$\bar{\eta}_g(D_X^{S(TX)}) = \begin{cases} \frac{1}{1-g^k}, & \text{若 } g^k \neq 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{若 } g^k = 1. \end{cases} \quad (4.46)$$

从这个例子可以看出, 我们不能期待定理 3.2 和 3.11 中的公式对 η - 不变量严格成立. 设

$$A = \{g \in S^1 : X^g \neq X^{S^1}\}, \quad (4.47)$$

则 $A \subset S^1$ 是一个有限集 (参见文献 [148, 命题 1.1]). 在 $X^{S^1} = \emptyset$ 的条件下, 有下面的结果.

定理 4.18 [148] 若 $X^{S^1} = \emptyset$, 则 $\bar{\eta}_g(D_X^\mathcal{E})$ 作为 $g \in S^1 \setminus A$ 的函数是一个整系数有理函数在 $S^1 \setminus A$ 上的限制且这个有理函数的可能极点都在 A 中, 即存在整系数多项式 $f, h \in \mathbb{Z}[x]$ 使得在 $g \in S^1 \setminus A$ 上 $h(g) \neq 0$ 且对 $g \in S^1 \setminus A$, 有

$$\bar{\eta}_g(D_X^\mathcal{E}) = \frac{f(g)}{h(g)}. \quad (4.48)$$

在例 4.1 中, 有 $A = \{g \in S^1 : g^k = 1\}$. 此时的整系数有理函数为 $(1-g^k)^{-1}$.

当 $X^{S^1} \neq \emptyset$ 时, 相差一个整系数有理函数, 也可以得到类似于定理 3.2 和 3.11 的结果. 但此时不动子流形上的向量丛要比 (3.29) 中的 $R_{\alpha,k}$ 和 $R'_{\alpha,k}$ 还要复杂.

对复向量丛 F , 记

$$\gamma_t(F) = \sum_{j \geq 0} \gamma^j(F) t^j =: \lambda_{\frac{t}{1-t}}(F), \quad (4.49)$$

其中 $\lambda_t(F)$ 由 (3.28) 定义. 计算可得

$$\gamma^k(F - \dim_{\mathbb{C}} F) = \begin{cases} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{\dim_{\mathbb{C}} F - i}{k-i} \Lambda^i F, & \text{若 } 0 \leq k \leq \dim_{\mathbb{C}} F, \\ 0, & \text{若 } k > \dim_{\mathbb{C}} F, \end{cases} \quad (4.50)$$

其中 $F - \dim_{\mathbb{C}} F$ 为复向量丛 F 与 $\dim_{\mathbb{C}} F$ 维平凡复向量丛的差. 记 $P_{k,\pm}(N_{\alpha,v}^*)$ 为 $X_\alpha^{S^1}$ 上的复向量丛, 使得

$$P_{k,+}(N_{\alpha,v}^*) - P_{k,-}(N_{\alpha,v}^*) = k \sum (-1)^{\sum_{i=1}^{r_{\alpha,v}} n_i} \frac{(\sum_{i=1}^{r_{\alpha,v}} n_i)!}{\prod_{i=1}^{r_{\alpha,v}} n_i!} \prod_{i=1}^{r_{\alpha,v}} (\gamma^i(N_{\alpha,v}^* - \dim_{\mathbb{C}} N_{\alpha,v}^*))^{n_i}, \quad (4.51)$$

其中 $r_{\alpha,v} = \dim_{\mathbb{C}} N_{\alpha,v}$, $k \sum$ 表示在 $(n_1, \dots, n_{r_{\alpha,v}}) \in \mathbb{N}^{r_{\alpha,v}}$, $\sum_{i=1}^{r_{\alpha,v}} i \cdot n_i = k$ 的范围内求和. 对 $g \in S^1 \setminus A$, $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$, 定义

$$\begin{aligned} \lambda_{-g^{-v}}(N_{\alpha,v}^*)_{\mathcal{N}}^{-1} &:= \frac{g^{v r_{\alpha,v}}}{(g^v - 1)^{r_{\alpha,v}}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{(-1)^k}{(g^v - 1)^k} (P_{k,+}(N_{\alpha,v}^*) - P_{k,-}(N_{\alpha,v}^*)) \right), \\ \lambda_{-1}(N_{\alpha,v}^*)_{\mathcal{N}}^{-1} &:= \bigotimes_{v: r_{\alpha,v} \neq 0} \lambda_{-g^{-v}}(N_{\alpha,v}^*)_{\mathcal{N}}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

将 $\lambda_{-1}(N_\alpha^*)^{-1}$ 展开, 则存在整系数多项式 \mathcal{F} 和复向量丛 $\mu_{\alpha, \mathcal{N}, m, \pm}$ 使得

$$\lambda_{-1}(N_\alpha^*)^{-1} = \mathcal{F}(g)^{-1} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} (\mu_{\alpha, \mathcal{N}, m, +} - \mu_{\alpha, \mathcal{N}, m, -}) \cdot g^m \right), \quad (4.53)$$

其中求和为有限和. 定义 $X_\alpha^{S^1}$ 上的等变向量丛

$$\mu_{\alpha, \mathcal{N}, \pm} := \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mu_{\alpha, \mathcal{N}, m, \pm}, \quad (4.54)$$

其中 $g \in S^1$ 在 $\mu_{\alpha, \mathcal{N}, m, \pm}$ 上的作用为数乘 g^m . 此时, 对 $g \in S^1 \setminus A$ 及 (3.24) 中的 L_α , 定义

$$\begin{aligned} & \bar{\eta}_g(D_{X_\alpha^{S^1}}^{S(TX_\alpha^{S^1}, L_\alpha) \otimes \lambda_{-1}(N_\alpha^*)^{-1} \otimes E|_{X_\alpha^{S^1}}}) \\ & := \mathcal{F}(g)^{-1} \cdot [\bar{\eta}_g(D_{X_\alpha^{S^1}}^{S(TX_\alpha^{S^1}, L_\alpha) \otimes \mu_{\alpha, \mathcal{N}, +} \otimes E|_{X_\alpha^{S^1}}}) - \bar{\eta}_g(D_{X_\alpha^{S^1}}^{S(TX_\alpha^{S^1}, L_\alpha) \otimes \mu_{\alpha, \mathcal{N}, -} \otimes E|_{X_\alpha^{S^1}}})]. \end{aligned} \quad (4.55)$$

我们将定理 4.18 推广到不动点非空的情形.

定理 4.19 [147, 148] 存在 $\mathcal{N}_0 \in \mathbb{N}$, 使得对任意 $\mathcal{N}, \mathcal{N}' \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}' > \mathcal{N} > \mathcal{N}_0$, 对任意 X 上的几何三元组 E , 作为 $S^1 \setminus A$ 上的函数,

$$P_{\mathcal{N}, \mathcal{N}'}(g) := \bar{\eta}_g(D_{X_\alpha^{S^1}}^{S(TX_\alpha^{S^1}, L_\alpha) \otimes \lambda_{-1}(N_\alpha^*)^{-1} \otimes E|_{X_\alpha^{S^1}}}) - \bar{\eta}_g(D_{X_\alpha^{S^1}}^{S(TX_\alpha^{S^1}, L_\alpha) \otimes \lambda_{-1}(N_\alpha^*)^{-1} \otimes E|_{X_\alpha^{S^1}}}) \quad (4.56)$$

和

$$Q_{\mathcal{N}}(g) := \bar{\eta}_g(D_X^{S(TX, L) \otimes E}) - \sum_{\alpha} \bar{\eta}_g(D_{X_\alpha^{S^1}}^{S(TX_\alpha^{S^1}, L_\alpha) \otimes \lambda_{-1}(N_\alpha^*)^{-1} \otimes E|_{X_\alpha^{S^1}}}) \quad (4.57)$$

都是 S^1 上可能极点都在 A 中的整系数有理函数在 $S^1 \setminus A$ 上的限制.

接下来的一个自然问题是将定理 4.19 推广到前面提到的两种 η -形式上. 注意到文献 [148] 应用微分 K 理论的 Freed-Klonoff-Lott 定义 [118, 138] 通过证明等变微分 K 环的局部化公式得到了定理 4.19. 如果要将定理 4.19 推广到 η -形式, 则需要一个微分 K 理论的操作空间更大的等价定义. 近期, 我们改进并推广了微分 K 理论的 Bunke-Schick 定义 [87], 得到了一个等变微分 K 理论的新的几何模型 [145]. 应用这个模型, 我们能够将定理 4.19 推广到 η -形式. 本文的最后一节将对微分 K 理论作简要介绍.

5 η -形式与微分 K 理论

1998 年, Witten [189] 在理论物理 D 膜的研究中发现, 相对于 D 膜上的 Ramond-Ramond 场的微分形式描述, D 膜粒子应取值在时空的拓扑 K 群中, 而不是上同调中. 此时物理学家就需要一个数学理论以上同调为桥梁, 将微分形式与拓扑 K 理论组合在一起. 这个理论现在被称作微分 K 理论.

微分 K 理论是在 21 世纪应用整体微分几何技术逐渐发展起来的一个新的数学方向. 其主要思想是将整体微分几何与拓扑 K 理论融为一炉, 在局部上由微分形式性质主导而在整体上显现拓扑 K 理论的特征. 其研究涉及几何、分析、拓扑等多个领域, 可看作 Arakelov 几何中算术 K 理论 [127, 128, 182] 的实类比并与理论物理中量子场论与弦论的前沿研究有着深刻的联系.

粗略地讲, 微分 K 群对应了图

$$\begin{array}{ccc} \widehat{K}^*(X) & \xrightarrow{I} & K^*(X) \\ R \downarrow & & \downarrow \text{ch} \\ \Omega^*(X, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\text{de Rham}} & H^*(X, \mathbb{R}) \end{array} \quad (5.1)$$

中左上角的对象 $\widehat{K}^*(X)$. 可以证明, 在附加一些合理的条件之后, 使得上图交换的 $\widehat{K}^*(X)$ 是唯一定义的.

为了能够更好地描述这个研究对象, 类似于上同调群的不同构造, 近十几年来有多组数学家给出了微分 K 群的很多种不同但互相同构的定义:

- Hopkins-Singer 模型 [135];
- Freed-Klonoff-Lott (FKL) 模型 [118, 138];
- Bunke-Schick (BS) 模型 [87, 89];
- Simons-Sullivan 模型 [181];
- Tradler-Wilson-Zeinalian 模型 [186];
- Gorokhovsky-Lott 模型 [130] ...

本节将从 η -形式应用的角度, 对 FKL 模型和经我们改进过的 BS 模型作简要介绍. 关于微分 K 理论的综述文章, 可参见文献 [88]. 本节总假设研究对象为紧致微分流形.

5.1 微分 K 理论的 Freed-Klonoff-Lott 模型

本小节简要介绍微分 K 理论的 Freed-Klonoff-Lott 模型及其主要性质.

定义 5.1 [118, 138] 考虑 X 上如下类型的二元组: (\underline{E}, ϕ) , 其中 $\underline{E} = (E, h^E, \nabla^E)$ 是 X 上的一个几何三元组, $\phi \in \Omega^{\text{odd}}(X, \mathbb{R})/\text{Im}d$. 称 $(\underline{E}_1, \phi_1)$ 与 $(\underline{E}_2, \phi_2)$ 等价当且仅当存在 $\underline{E}_3 = (E_3, h^{E_3}, \nabla^{E_3})$ 和复向量丛同构 $\Phi: E_1 \oplus E_3 \rightarrow E_2 \oplus E_3$ 使得

$$\widetilde{\text{ch}}(E_1 \oplus E_3, \nabla^{E_1 \oplus E_3}, \Phi^* \nabla^{E_2 \oplus E_3}) = \phi_2 - \phi_1. \quad (5.2)$$

定义

$$(\underline{E}_1, \phi_1) + (\underline{E}_2, \phi_2) = (\underline{E}_1 \oplus \underline{E}_2, \phi_1 + \phi_2). \quad (5.3)$$

则所有 (\underline{E}, ϕ) 的等价类生成了一个加法半群. 微分 K 群 $\widehat{K}^0(X)$ 定义为由这个半群以经典的方法群化得到的 Abel 群. 事实上有

$$\widehat{K}^0(X) = \{[\underline{E} - \underline{E}_1, \phi - \phi_1] := [\underline{E}, \phi] - [\underline{E}_1, \phi_1]\}.$$

我们还可以在微分 K 群 $\widehat{K}^0(X)$ 上定义乘法使其成为一个环: 对任意 $[\underline{E}, \phi], [\underline{F}, \psi] \in \widehat{K}^0(X)$, 令

$$[\underline{E}, \phi] \cup [\underline{F}, \psi] := [\underline{E} \otimes \underline{F}, \text{ch}(\underline{E}) \wedge \psi + \phi \wedge \text{ch}(\underline{F}) - d\phi \wedge \psi]. \quad (5.4)$$

容易验证这个乘法是合理定义的, 且满足交换性和结合性. 所以 $(\widehat{K}^0(X), +, \cup)$ 是一个交换环, 其中 $1 := [\mathbb{C}, 0]$ 是其单位元. 此处 \mathbb{C} 为 X 上的带有平凡度量和平凡联络的平凡线丛. 文献 [148] 证明了 $\widehat{K}^0(X)$ 上存在预 λ 环结构. 事实上, 我们猜测 $\widehat{K}^0(X)$ 是一个 λ 环.

定义遗忘映射

$$I: \widehat{K}^0(X) \rightarrow K^0(X), \quad [\underline{E}, \phi] \mapsto [E] \tag{5.5}$$

和曲率映射

$$R: \widehat{K}^0(X) \rightarrow \Omega^{\text{even}}(X, \mathbb{R}), \quad [\underline{E}, \phi] \mapsto \text{ch}(\underline{E}) - d\phi. \tag{5.6}$$

由等价条件 (5.2) 可知这两个映射是合理定义的. 应用 (5.5) 和 (5.6), 有图 (5.1) 可交换. 定义映射

$$a: \Omega^{\text{odd}}(X, \mathbb{R})/\text{Im } d \rightarrow \widehat{K}^0(X), \quad \phi \mapsto [0, -\phi]. \tag{5.7}$$

我们有

$$R \circ a = d, \tag{5.8}$$

而且有下面的长正合列成立:

$$K^1(X) \xrightarrow{\text{ch}} \Omega^{\text{odd}}(X, \mathbb{R})/\text{Im } d \xrightarrow{a} \widehat{K}^0(X) \xrightarrow{I} K^0(X) \longrightarrow 0. \tag{5.9}$$

事实上, 如果存在合理定义的映射 I, R 和 a 使得 (5.8) 和 (5.9) 对两种模型都成立, 则满足交换图 (5.1) 的两种模型间的同态映射一定是同构.

下面考虑微分 K 理论中的前推映射. 与拓扑 K 理论一样, 微分 K 理论中的前推映射分为淹没型和嵌入型两种.

首先考虑淹没型的前推映射并采用第 3.5 小节中的符号. 设 $\pi: W \rightarrow B$ 是一个纤维丛, 其纤维为偶数维紧致流形 X . 假设 B 也是紧致流形并假设 TX 上存在 spin^c 结构. 记此时由 spin^c 结构决定的 W 上的复线丛为 L . 记 o_X 为 TX 的定向. 记 $\hat{o} := \{g^{TX}, T^H W, o_X, \underline{L}\}$, 称之为一个微分 K 定向. 此时 $\mathcal{E} := \underline{S}(TX, L) \otimes E$ 是一个 $C(TX)$ -Dirac 丛. 记 \mathcal{H}_\pm 为 B 上的无穷维向量丛使得其限制在 $b \in B$ 上的纤维为 $L^2(X_b, S_\pm(TX, L) \otimes E|_{X_b})$. 此时, 即使 $\ker D_X^\mathcal{E}$ 不是 B 上的向量丛, 由文献 [118, 引理 7.13] 可知 \mathcal{H}_\pm 依然存在有限维子丛 \mathcal{L}_\pm , 使得

$$\ker D_{X,\pm}^\mathcal{E} \subset \mathcal{L}_\pm \subset \mathcal{H}_\pm, \tag{5.10}$$

且 $D_{X,\pm}^\mathcal{E}$ 将 \mathcal{L}_\pm 映射到 \mathcal{L}_\mp . 对于这样的 \mathcal{L}_\pm , 有

$$\text{ind}(D_X^\mathcal{E}) = \mathcal{L}_+ - \mathcal{L}_- \in K^0(B). \tag{5.11}$$

若 $\ker D_X^\mathcal{E}$ 是 B 上的向量丛, 则可选取 $\mathcal{L}_\pm = \ker D_{X,\pm}^\mathcal{E}$.

记 $\mathcal{L}^{\text{op}} = \mathcal{L}_+^{\text{op}} \oplus \mathcal{L}_-^{\text{op}}$ 为 X 上的 \mathbb{Z}_2 分次的向量丛, 其中 $\mathcal{L}_\pm^{\text{op}} = \mathcal{L}_\mp$. 考虑 \mathcal{L}^{op} 上由 \mathcal{H} 上的 L^2 度量与 (3.75) 定义的联络所诱导的度量与联络. 考虑纤维丛 $\pi': W' = W \sqcup B \rightarrow B$ 使得 $\pi'|_W = \pi$ 且 $\pi'|_B$ 是恒等映射. 则此纤维丛的纤维 X' 为 X 与一个点的不交并. 记 \mathcal{E}' 为 W' 上的 Dirac 丛使得 $\mathcal{E}'|_W = \mathcal{E}$, $\mathcal{E}'|_B = \underline{\mathcal{L}}^{\text{op}}$. 此时对应于纤维丛 π' 的簇 Dirac 算子为 $D_{X'}^{\mathcal{E}'} = D_X^\mathcal{E} \oplus 0$ 且由 (5.11) 可知

$$\text{ind}(D_{X'}^{\mathcal{E}'}) = 0 \in K^0(B). \tag{5.12}$$

此时可取谱截面 P 使得其在 \mathcal{L} 的正交补上为恒等映射, 在 $\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^{\text{op}}$ 上为将 \mathcal{L} 映到 \mathcal{L}^{op} 、将 \mathcal{L}^{op} 映到 \mathcal{L} 的恒等映射. 根据定义 3.6, 可以定义带扰动的 η -形式 $\tilde{\eta}_P(\pi', \mathcal{E}') \in \Omega(B, \mathbb{R})/\text{Im } d$.

定义 5.2 ^[118] 相对于纤维丛 π 和微分 K 定向 δ 的微分 K 群的前推映射 $\hat{\pi}_!$ 定义为

$$\hat{\pi}_! : \hat{K}^0(W) \rightarrow \hat{K}^0(B), \quad [\underline{E}, \phi] \mapsto \left[\underline{\mathcal{L}}, \int_X \text{Td}(TX, L) \wedge \phi + \hat{\eta}_P(\pi', \underline{\mathcal{E}}') \right]. \quad (5.13)$$

应用定理 4.6, 可以证明定义 5.2 中的 $\hat{\pi}_!$ 是合理的, 且不依赖于 \mathcal{L} 的选取.

对于嵌入型的前推映射, 采用第 4.3 小节中的记号. 设 $i : Y \rightarrow X$ 是定向紧致 Riemann 流形间的一个等距嵌入. 假设此嵌入的法丛为偶数维且其上存在 spin^c 结构, 则对 Y 上的一个几何三元组 \underline{E} , 由 Atiyah-Hirzebruch 直接极限的几何实现可以构造 X 上的一个几何三元组 \underline{F} 使得定理 4.11 成立. 记此时的 Bismut-Zhang 流动形为 $\gamma(E, F)$.

定义 5.3 ^[118] 定义相对于嵌入 i 的微分 K 群的前推映射 $\hat{i}_!$ 为

$$\hat{i}_! : \hat{K}^0(Y) \rightarrow \delta \hat{K}^0(X), \quad [\underline{E}, \phi] \mapsto [\underline{F}, \text{Td}(N, L)^{-1} \wedge \phi \wedge \delta_Y - \gamma(E, F)], \quad (5.14)$$

其中 $\delta \hat{K}^0(X)$ 为将定义 5.1 中的微分形式替换为流动形所得到的流动形 K 群.

由 Bismut-Zhang 流动形的性质可推导出 $\hat{i}_!$ 的定义是合理的. 由非等变情形的定理 4.12 可得到下面的微分指标定理.

定理 5.1 (微分指标定理 ^[118]) 对淹没型前推映射中的 $\pi : W \rightarrow B$, 存在足够大的 $N \in \mathbb{Z}$ 及等距嵌入 $j : W \rightarrow S^N$. 记 $i := (j, \pi) : W \rightarrow S^N \times B$, $p : S^N \times B \rightarrow B$ 为投影映射, 则图

$$\begin{array}{ccc} \hat{K}^0(W) & \xrightarrow{\hat{i}_!} & \delta \hat{K}^0(S^N \times B) \\ & \searrow \hat{\pi}_! & \downarrow \hat{p}_! \\ & & \hat{K}^0(B) \end{array} \quad (5.15)$$

是交换的.

注意到, 当将微分 K 群退化到拓扑 K 群时, 对应的交换图 (5.15) 恰为 Atiyah-Singer 指标定理的 K 理论表示: $\pi_!$ 为解析指标, $p_! \circ i_!$ 为拓扑指标. 事实上, 在文献 [118] 中, 定义 5.3 的合理性与定理 5.1 的原始证明需要用到 K 同调的技术.

Freed 和 Lott ^[118] 还应用酉变换定义了 $\hat{K}^1(X)$ 并讨论了奇数维纤维对应的淹没型的前推映射和对应的微分指标定理.

接下来考虑微分 K 理论的等变推广. 假设 X 上存在一个紧 Lie 群 G 作用. 对于等变微分 K 群的定义, 难点在于微分形式部分取在哪个空间上. 首先固定 $g \in G$ 并考虑相对于 g 作用的等变微分 K 群.

定义 5.4 ^[148] 设 $\underline{E} = (E, h^E, \nabla^E)$ 是 X 上的一个等变几何三元组且 $\phi \in \Omega^{\text{odd}}(X^g, \mathbb{R})/\text{Im } d$. 称 $(\underline{E}_1, \phi_1)$ 与 $(\underline{E}_2, \phi_2)$ 等价当且仅当存在等变几何三元组 $\underline{E}_3 = (E_3, h^{E_3}, \nabla^{E_3})$ 和复向量丛的等变同构 $\Phi : E_1 \oplus E_3 \rightarrow E_2 \oplus E_3$ 使得

$$\tilde{\text{ch}}_g(E_1 \oplus E_3, \nabla^{E_1 \oplus E_3}, \Phi^* \nabla^{E_2 \oplus E_3}) = \phi_2 - \phi_1. \quad (5.16)$$

我们可以类比 (5.3) 定义加法并依照上述等价关系定义 g 等变微分 K 群 $\hat{K}_g^0(X)$. 其上自然存在类似于 (5.4) 的环结构.

假设 G 是一个 Abel 群. 此时的 g 等变微分 K 群 $\hat{K}_g^0(X)$ 是一个 $R(G)$ 模: 对复表示 M , 记 \underline{M} 为带有平凡度量与联络的、以 M 为纤维的 G 等变平凡丛, 定义

$$M : \hat{K}_g^0(X) \rightarrow \hat{K}_g^0(X), \quad [\underline{E}, \phi] \mapsto [\underline{M} \otimes \underline{E}, \chi_M(g) \cdot \phi]. \quad (5.17)$$

记 $I(g) := \{\chi \in R(G) : \chi(g) = 0\}$, 则 $I(g)$ 是 $R(G)$ 的一个素理想. 对任意 $R(G)$ 模 \mathcal{M} , 记 $\mathcal{M}_{I(g)}$ 为 \mathcal{M} 关于素理想 $I(g)$ 的局部化: $\mathcal{M}_{I(g)}$ 中的元素都可取代表元为 u/χ , $u \in \mathcal{M}$, $\chi \notin I(g)$, 其中 u/χ 和 u'/χ' 表示同一个元素当且仅当存在 $\tilde{\chi} \notin I(g)$ 使得

$$\tilde{\chi}\chi'u = \tilde{\chi}\chi u' \in \mathcal{M}.$$

注意到 $\widehat{K}_g^0(X)$ 与 $\widehat{K}_g^0(X^g)$ 的微分形式部分相同. 对于嵌入 $i : X^g \rightarrow X$, 可以将定义 5.3 中关于嵌入的前推映射推广到 g 等变情形, 且此时的流动形退化为微分形式.

定理 5.2 [148] 假设 X^g 在 X 中的法丛 N 上存在 g 等变的 spin^c 结构, 则相对于嵌入 $i : X^g \rightarrow X$ 的前推映射

$$\hat{i}_! : \widehat{K}_g^0(X^g) \rightarrow \widehat{K}_g^0(X), \quad [\underline{E}, \phi] \mapsto [\underline{E}, \text{Td}_g(N, L)^{-1} \wedge \phi] \tag{5.18}$$

是合理定义的.

作为定义 5.3 的等变推广, 一般情形下 (5.18) 中应出现等变 Bismut-Zhang 流动形 $\gamma_g(E, F)$. 但作为 X^g 到 X 的等距嵌入, 有 $\gamma_g(E, F) = 0$.

如果 $G = S^1$, 则可以得到更好的结果. 记 $A \subset S^1$ 为由 (4.52) 定义的有限集.

定理 5.3 [148] 假设 TX 上存在 S^1 等变的 spin^c 结构. 对 $g \in S^1 \setminus A$, 前推映射的局部化

$$\hat{i}_! : \widehat{K}_g^0(X^g)_{I(g)} \rightarrow \widehat{K}_g^0(X)_{I(g)}, \quad [\underline{E}, \phi]/\chi \mapsto [\underline{E}, \text{Td}_g(N, L)^{-1} \wedge \phi]/\chi \tag{5.19}$$

是一个 $R(S^1)$ 模同构.

下面讨论上述定理中 $\hat{i}_!$ 的逆. 由 (4.53), 记

$$\underline{\lambda}_{-1}(N_\alpha^*)^{-1} = \mathcal{F}(g)^{-1} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} (\mu_{\alpha, \mathcal{N}, m, +} - \mu_{\alpha, \mathcal{N}, m, -}) \cdot g^m \right), \tag{5.20}$$

则有

$$[\underline{\lambda}_{-1}(N_\alpha^*)^{-1}, 0] \in \widehat{K}_g^0(X_\alpha^g)_{I(g)}.$$

事实上存在 \mathcal{N}_0 足够大使得对任意 α , $[\underline{\lambda}_{-1}(N_\alpha^*)^{-1}, 0]$ 不依赖于 $\mathcal{N} > \mathcal{N}_0$ 的选取且对应的 $\widehat{K}_g^0(X^g)_{I(g)} = \bigoplus_\alpha \widehat{K}_g^0(X_\alpha^g)_{I(g)}$ 中的元素恰为 $[\underline{\lambda}_{-1}(N^*), 0]$ 在 $\widehat{K}_g^0(X^g)_{I(g)}$ 中的逆 [148], 记为 $[\underline{\lambda}_{-1}(N^*), 0]^{-1}$.

定理 5.4 [148] 前推映射 $\hat{i}_!$ 的逆映射为

$$(\hat{i}_!)^{-1} = [\underline{\lambda}_{-1}(N^*), 0]^{-1} \circ \hat{i}^* : \widehat{K}_g^0(X)_{I(g)} \rightarrow \widehat{K}_g^0(X^g)_{I(g)}, \tag{5.21}$$

其中 $\hat{i}^* : \widehat{K}_g^0(X)_{I(g)} \rightarrow \widehat{K}_g^0(X^g)_{I(g)}$ 为自然诱导的拉回映射.

本节的关键结果为下面的局部化定理, 其算术类比可参见文献 [140, 184, 185].

定理 5.5 [148] 假设 TX 上存在 S^1 等变的 spin^c 结构. 对 $g \in S^1 \setminus A$, 图

$$\begin{array}{ccc} \widehat{K}_g^0(X^{S^1})_{I(g)} & \xleftarrow{[\underline{\lambda}_{-1}(N^*), 0]^{-1} \cup \hat{i}^*} & \widehat{K}_g^0(X)_{I(g)} \\ & \searrow \widehat{f}_{X^{S^1}} & \swarrow \widehat{f}_{X^1} \\ & \mathbb{C}/\mathbb{Q}_g & \end{array} \tag{5.22}$$

是交换的, 其中

$$\mathbb{Q}_g := \{P(g)/Q(g) \in \mathbb{C} : P, Q \in \mathbb{Z}[x], Q(g) \neq 0\} \subset \mathbb{C}, \quad (5.23)$$

且 $\widehat{f}_{X!}$ 定义为

$$\widehat{f}_{X!} : \widehat{K}_g^0(X)_{I(g)} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Q}_g, \quad [\underline{E}, \phi]/\chi \mapsto \chi(g)^{-1} \left(- \int_{X^g} \text{Td}_g(TX, L) \wedge \phi + \bar{\eta}_g(D_X^{S(TX, L) \otimes E}) \right). \quad (5.24)$$

应用定理 5.5 和 4.1 以及等变无穷小 η -不变量的解析性质, 可以得到 η -不变量的不动点公式—定理 4.19.

类比于等变拓扑 K 群 $K_G^0(X)$, 也期待能够定义一般的等变微分 K 群 $\widehat{K}_G^0(X)$. 但在一般情形下很难确定微分形式部分所处的空间. 但如果附加一些条件, 例如, 群作用在每一点上的稳定子群是有限群, 即群作用的商空间是轨形 (orbifold), 我们可以给出等变微分 K 群的合理定义.

设 E 是 X 上的一个 G 等变向量丛, 则其在 X^g 上的限制有对应于 (3.26) 的分解. 记 $\phi_g(E) := \sum v E_v$, 则其诱导了一个同态映射

$$\phi_g : K_G^*(X) \otimes \mathbb{C} \rightarrow [K^*(X^g) \otimes \mathbb{C}]^{C_G(g)}, \quad (5.25)$$

其中 $C_G(g)$ 是 g 在 G 中的中心化子. 记 (g) 为 g 在 G 中的共轭类. 对 $g, g' \in (g)$, 存在 $h \in G$, 使得 $g' = h^{-1}gh$. 此时有同胚映射

$$h : X^{g'}/C_G(g') \rightarrow X^g/C_G(g). \quad (5.26)$$

此同胚映射可诱导同构

$$[K^*(X^g) \otimes \mathbb{C}]^{C_G(g)} \simeq [K^*(X^{g'}) \otimes \mathbb{C}]^{C_G(g')}. \quad (5.27)$$

如果群作用在每一点上的稳定子群都是有限群, 由文献 [1, 推论 3.13] 可知

$$\phi = \bigoplus_{(g), g \in G} \phi_g : K_G^*(X) \otimes \mathbb{C} \rightarrow \bigoplus_{(g), g \in G} [K^*(X^g) \otimes \mathbb{C}]^{C_G(g)} \quad (5.28)$$

是一个同构且直和只有有限项. 由同构 (5.27) 可知 (5.28) 中的分解与共轭类中元素的选取无关.

另外, h 还诱导了一个同构

$$h^* : [\Omega^*(X^g, \mathbb{C})]^{C_G(g)} \rightarrow [\Omega^*(X^{g'}, \mathbb{C})]^{C_G(g')}. \quad (5.29)$$

记

$$\Omega_{\text{deloc}, G}^*(X, \mathbb{C}) := \bigoplus_{(g), g \in G} \{[\Omega^*(X^g, \mathbb{C})]^{C_G(g)}\}, \quad (5.30)$$

其中 $\{\cdot\}$ 表示由 (5.29) 决定的同构类. 容易看出外微分映射保持 $\Omega_{\text{deloc}, G}^*(X, \mathbb{C})$ 不变. 所以可以自然定义对应的 de Rham 上同调 $H_{\text{deloc}, G}^*(X, \mathbb{C})$. 此时等变 Chern 特征映射定义为

$$\text{ch}_G : K_G^*(X) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\simeq} H_{\text{deloc}, G}^*(X, \mathbb{C}), \quad \mathcal{K} \mapsto \bigoplus_{(g), g \in G} \{\text{ch}(\phi_g(\mathcal{K}))\}. \quad (5.31)$$

注意到此时 $\text{ch}(\phi_g(\mathcal{K})) = \text{ch}_g(\mathcal{K})$ 是 $C_G(g)$ 作用不变的.

由于 g 作用的不动点集与 g^{-1} 作用的不动点集相同, 记

$$\Omega_{\text{deloc},G}^*(X, \mathbb{R}) := \left\{ c = \bigoplus_{(g), g \in G} \{c_g\} \in \Omega_{\text{deloc},G}^*(X, \mathbb{C}) : \forall g \in G, c_{g^{-1}} = \bar{c}_g \right\} \quad (5.32)$$

并记 $H_{\text{deloc},G}^*(X, \mathbb{R})$ 为对应的上同调. 此时有同构

$$\text{ch}_G : K_G^*(X) \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} H_{\text{deloc},G}^*(X, \mathbb{R}). \quad (5.33)$$

定义 5.5 [145] 设 $\underline{E} = (E, h^E, \nabla^E)$ 是 X 上的一个等变几何三元组且 $\phi \in \Omega_{\text{deloc},G}^{\text{odd}}(X, \mathbb{R})/\text{Im } d$. 称 $(\underline{E}_1, \phi_1)$ 与 $(\underline{E}_2, \phi_2)$ 等价当且仅当存在等变几何三元组 $\underline{E}_3 = (E_3, h^{E_3}, \nabla^{E_3})$ 和复向量丛的等变同构 $\Phi : E_1 \oplus E_3 \rightarrow E_2 \oplus E_3$ 使得

$$\tilde{\text{ch}}_G(E_1 \oplus E_3, \nabla^{E_1 \oplus E_3}, \Phi^* \nabla^{E_2 \oplus E_3}) = \phi_2 - \phi_1, \quad (5.34)$$

其中 $\tilde{\text{ch}}_G$ 的定义完全类似 (4.22). 同样类比 (5.3) 定义加法并可依照上述等价关系定义等变微分 K 群 $\widehat{K}_G^0(X)$, 其上自然存在类似 (5.4) 的环结构. 我们也可自然得到等变情形的交换图 (5.1).

由于此时群作用的商空间是一个轨形, 所以上述定义也可以视为轨形的微分 K 群的定义 (参见文献 [145, 第 4.4 小节]). 相比于 Bunke 和 Schick [89] 构造的轨形的微分 K 群, 这个定义是一个解析的定义.

这里讨论了微分 K 群的特殊等变推广, 但到目前为止如何应用整体微分几何与指标理论定义一般的关于紧 Lie 群的等变微分 K 群依然是一个困难的公开问题.

5.2 微分 K 理论的 Bunke-Schick 模型

到目前为止, 微分 K 理论的 Freed-Klonoff-Lott 模型是研究中最常用的模型之一. 但这个模型在应用中也有些不便之处, 例如, 微分 K^0 群与微分 K^1 群没有统一的定义. Bunke 和 Schick [87] 应用簇指标定理构造了微分 K 群的新的模型, 其中微分 K^0 群与微分 K^1 群有统一的定义, 只是构造相对复杂. 本小节简要介绍经我们改进过的 Bunke-Schick 模型 (参见文献 [145]).

考虑相对切丛带有 spin^c 结构的簇指标定理的设定 (参见第 3.5 小节). 设 $\pi : W \rightarrow B$ 是以 X 为纤维的纤维丛. 总假设 W 和 B 都是紧致流形. 给定 TX 上的一个 spin^c 结构, 其决定了 W 上的一个复线丛 L . 记 o_X 为 TX 的定向, $T_\pi^H W$ 为水平子丛. 设 E 是 W 上的一个 \mathbb{Z}_2 分次的复向量丛. 给定几何三元组 \underline{L} 和 \underline{E} , 可以定义簇 Dirac 算子 $D_X^{S(TX, L) \otimes E}$ 且 $\text{ind}(D_X^{S(TX, L) \otimes E}) \in K^*(B)$, 其中当 X 为偶数维时, $*$ = 0; X 为奇数维时, $*$ = 1. 我们将用来定义簇 Dirac 算子的所有几何与拓扑结构放在一起, 记

$$\mathcal{F} = (\pi, W, o_X, T_\pi^H W, g^{TX}, \underline{L}, \underline{E}). \quad (5.35)$$

称 \mathcal{F} 为 B 上的一个几何族. 也记此时的簇 Dirac 算子为 $D(\mathcal{F})$. 记 $F^0(B)$ (或 $F^1(B)$) 为 B 上纤维为偶数维 (或奇数维) 的几何族组成的集合. 记 $F^*(B) = F^0(B) \oplus F^1(B)$. 此时簇指标定义了映射

$$\text{ind} : F^*(B) \rightarrow K^*(B), \quad \mathcal{F} \mapsto \text{ind}(D(\mathcal{F})). \quad (5.36)$$

我们可以证明 (参见文献 [85, 87, 145]) 由 (5.36) 定义的指标映射 ind 是满射.

记翻转 \mathcal{F} 中 E 的 \mathbb{Z}_2 分次所得的几何族为 \mathcal{F}^{op} . 对 $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \mathbf{F}^*(B)$, 定义 $\mathcal{F} + \mathcal{F}' \in \mathbf{F}^*(B)$ 使得其对应的纤维丛为 $W \sqcup W' \rightarrow B$, 其他结构由 \mathcal{F} 和 \mathcal{F}' 中的结构诱导所得; 定义 $\mathcal{F} \times \mathcal{F}' \in \mathbf{F}^*(B)$, 使得其对应的纤维丛为 $W \times_B W' \rightarrow B$, 其他结构以显然操作定义. 对 $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 \in \mathbf{F}^*(B)$, 如果 $\text{ind}(D(\mathcal{F}_0)) = \text{ind}(D(\mathcal{F}_1))$, 则显然有

$$\text{ind}(D(\mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1^{\text{op}})) = 0 \in K^*(B).$$

由定理 3.13 可知几何族 $\mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1^{\text{op}}$ 上存在谱截面 P . 记此时由定义 3.6 定义的带扰动的 η -形式为 $\tilde{\eta}_P(\mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1^{\text{op}})$. 注意在这种情形下即使纤维都是零维, 谱截面依然存在.

定义 5.6 [87, 145] 对 $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 \in \mathbf{F}^{0/1}(B)$, $\phi_0, \phi_1 \in \Omega^{\text{odd/even}}(B, \mathbb{R})/\text{Im } d$, 如果

$$\text{ind}(D(\mathcal{F}_0)) = \text{ind}(D(\mathcal{F}_1))$$

且存在谱截面 P 使得

$$\phi_1 - \phi_0 = \tilde{\eta}_P(\mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1^{\text{op}}), \quad (5.37)$$

则称从 (\mathcal{F}_0, ϕ_0) 到 (\mathcal{F}_1, ϕ_1) 是一个配对. 如果存在正整数 k 和 $(\mathcal{F}_{i/k}, \phi_{i/k})$, $0 < i < k$, 使得对任意 $0 \leq i < k$, 从 $(\mathcal{F}_{i/k}, \phi_{i/k})$ 到 $(\mathcal{F}_{(i+1)/k}, \phi_{(i+1)/k})$ 都是配对, 记 $(\mathcal{F}_0, \phi_0) \sim (\mathcal{F}_1, \phi_1)$. Bunke-Schick 模型中的微分 K 群 $\widehat{K}_{BS}^{0/1}(B)$ 定义为由半群 $\mathbf{F}^{0/1}(B)/\sim$ 生成的 Abel 群. 记 $\widehat{K}_{BS}^*(B) := \widehat{K}_{BS}^0(B) \oplus \widehat{K}_{BS}^1(B)$.

注意到这里的配对不一定是一个等价关系, 因为它不一定满足传递性. 而由配对生成的 “ \sim ” 是一个等价关系. 事实上, 每一个 $\widehat{K}_{BS}^*(B)$ 中的元素都可以写作 $[\mathcal{F}, \phi]$, 且 $-[\mathcal{F}, \phi] = [\mathcal{F}^{\text{op}}, -\phi]$.

注 5.1 在这个定义中, 如果将相对切丛上的 spin^c 结构推广到 $C(TX)$ -Dirac 丛, 或者限制为 spin 结构, 定义出的微分 K 群不会改变. 事实上在 Bunke 和 Schick 的原始构造中, 他们采用的就是 $C(TX)$ -Dirac 丛假设. 另外, 在 Bunke 和 Schick 的原始构造中, 他们用到的 η -形式不同于本文提到的任何一种, 到目前为止并不容易被进行深入分析. 本文在这个定义中将他们的 η -形式替换成了前面讨论过的带扰动的 η -形式, 定义出的微分 K 群也没有改变. 此模型的优点在于统一处理 \widehat{K}^0 和 \widehat{K}^1 , 难点在于互相等价的元素过多, 当构造涉及微分 K 群的映射时, 验证合理性比较困难, 需要 η -形式的诸多性质. 这也是第 4 节中诸多公式的用武之地.

在这个定义下, 遗忘映射和曲率映射定义为

$$I: \widehat{K}_{BS}^*(B) \rightarrow K^*(B), \quad [\mathcal{F}, \phi] \mapsto \text{ind}(D(\mathcal{F})), \quad (5.38)$$

$$R: \widehat{K}_{BS}^*(B) \rightarrow \Omega^*(B, \mathbb{R}), \quad [\mathcal{F}, \phi] \mapsto \int_X \text{Td}(TX, L) \text{ch}(E, \nabla^E) - d\phi, \quad (5.39)$$

其中曲率映射的合理性由 (3.119) 决定. 此时由 I 和 R 的定义以及 Atiyah-Singer 簇指标定理 (3.88) 可知图 (5.1) 是一个交换图. 定义映射

$$a: \Omega^*(B, \mathbb{R})/\text{Im } d \rightarrow \widehat{K}_{BS}^0(B), \quad \phi \mapsto [\emptyset, -\phi]. \quad (5.40)$$

我们有 $R \circ a = d$, 而且有长正合列

$$K^{1/0}(B) \xrightarrow{\text{ch}} \Omega^{\text{odd/even}}(B, \mathbb{R})/\text{Im } d \xrightarrow{a} \widehat{K}_{BS}^{0/1}(B) \xrightarrow{I} K^{0/1}(B) \longrightarrow 0 \quad (5.41)$$

成立. 应用上一节讨论过的微分 K 群的唯一性可知 $\widehat{K}_{BS}^0(B)$ 与上一节中的 $\widehat{K}^0(B)$ 同构. 映射 I, R 和 a 也与上一节中的映射一致. 事实上, 可以将从 $\widehat{K}^0(B)$ 到 $\widehat{K}_{BS}^0(B)$ 的同构映射具体构造出来: 将 E 看

作纤维为一个点时的 B 上的几何族, 微分形式部分取恒等映射. 当 $* = 1$ 时, $\widehat{K}_{BS}^1(B)$ 与 Freed-Lott 定义的 $\widehat{K}^1(B)$ 同构. 所以从现在开始, 也记 $\widehat{K}_{BS}^*(B)$ 为 $\widehat{K}^*(B)$.

对 $[\mathcal{F}, \phi] \in \widehat{K}^i(B)$, $[\mathcal{F}', \phi'] \in \widehat{K}^*(B)$, 利用 (3.119), 可以合理定义乘积:

$$[\mathcal{F}, \phi] \cup [\mathcal{F}', \phi'] := \left[\mathcal{F} \times_B \mathcal{F}', (-1)^i \int_X \text{Td}(TX, L) \text{ch}(E, \nabla^E) \wedge \phi' + \phi \wedge \int_{X'} \text{Td}(TX', L') \text{ch}(E', \nabla^{E'}) - (-1)^i d\phi \wedge \phi' \right]. \quad (5.42)$$

容易验证对 $x, y \in \widehat{K}^*(B)$, $\phi \in \Omega^*(B, \mathbb{R})/\text{Im} d$, 有

$$R(x \cup y) = R(x) \wedge R(y), \quad I(x \cup y) = x \cdot y, \quad a(\phi) \cup x = a(\phi \wedge R(x)). \quad (5.43)$$

接下来考虑淹没型的前推映射. 设 $\pi : V \rightarrow B$ 是纤维为定向紧致流形 Y 的纤维丛. 假设 B 是紧致流形且假设 TY 上存在 spin^c 结构. 记此时由 spin^c 决定的 V 上的复线丛为 L_Y , 则有微分 K 定向

$$\hat{o} := \{g^{TY}, T_\pi^H V, o_Y, \underline{L}_Y\}.$$

给定 V 上的一个几何族 $\mathcal{F} = (\pi_X, W, o_X, T_{\pi_X}^H W, g^{TX}, \underline{L}_X, \underline{E})$, 利用微分 K 定向 \hat{o} , 可以得到 B 上的几何族

$$\mathcal{F}_Z := \{\pi_Z := \pi \circ \pi_X, W, o_Z := \pi_X^* o_Y \cup o_X, T_{\pi_Z}^H W, g^{TZ} := \pi^* g^{TY} \oplus g^{TX}, \underline{\pi_X^* L_Y} \otimes \underline{L}_X, \underline{E}\}. \quad (5.44)$$

定义 5.7 [87] 相对于纤维丛 π 和微分 K 定向 \hat{o} 的微分 K 群的前推映射 $\hat{\pi}_!$ 定义为

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_! : \widehat{K}^*(W) &\rightarrow \widehat{K}^*(B), \\ [\mathcal{F}, \phi] &\mapsto \left[\mathcal{F}_Z, \int_Y \text{Td}(TY, L_Y) \wedge \phi + \int_Z \widetilde{\mathbb{A}}(TZ, {}^0\nabla^{TZ}, \nabla^{TZ}) \exp\left(\frac{1}{2}c_1(L_Z, \nabla^{L_Z})\right) \text{ch}(E, \nabla^E) \right]. \end{aligned} \quad (5.45)$$

在文献 [87] 中, 关于微分 K 定向有更精细的讨论. 为简单起见, 此处只针对一个特殊的微分 K 定向对前推映射进行了定义. 限制在微分 K^0 群上, 这里的前推映射与定义 5.2 中的一致.

定理 5.6 [87, 145] 前推映射 $\hat{\pi}_!$ 是合理定义的且如果还存在另外一个可以定义前推映射的纤维丛 $\pi' : B \rightarrow S$, 则有

$$\widehat{\pi' \circ \pi}_! = \widehat{\pi'}_! \circ \widehat{\pi}_!. \quad (5.46)$$

定理 5.6 的证明本质地用到了定理 4.16. 事实上, Bunke 和 Schick [87] 在假设定理 4.16 对另外一种 η -形式成立的前提下得到了定理 5.6. 文献 [145] 对带扰动的 η -形式证明了定理 4.16, 应用带扰动的 η -形式改进了 Bunke-Schick 模型并最终得到了定理 5.6 的完整证明.

类比于 FKL 模型, 也可以对 BS 模型尝试定义关于嵌入的前推映射并证明对应的微分指标定理 (定理 5.1). 我们还可以用完全相同的方法将本节中的微分 K 群推广到上一节提到的两种等变情形: 稳定子群有限情形和 g -等变情形. 应用 η -形式各种性质的等变推广, 本节中的所有讨论都可以被自然地推广到这两种等变情形. 注意到当群作用的稳定子群有限时, 群作用的商空间是一个轨形. 所以此时的等变微分 K 理论也对应了轨形的微分 K 理论. 另外, 当考虑 g -等变推广时, 定理 5.5 中的 \mathbb{C}/\mathbb{Q}_g 恰好等于一个点的微分 K^1 群的局部化. 所以一个自然的问题是, 我们是否可以在定理 5.5 中

将点推广到一个紧致流形? 如果可以, 我们将能够得到一个 η -形式的局部化公式, 将定理 4.19 推广到高维.

致谢 感谢张伟平教授、麻小南教授和戴先哲教授仔细阅读了本文初稿并提出了宝贵的修改意见! 感谢审稿人为本文提出了大量非常有价值的修改意见!

参考文献

- 1 Adem A, Leida J, Ruan Y B. Orbifolds and Stringy Topology. Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 171. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2007
- 2 Alvarez-Gaumé L. Supersymmetry and the Atiyah-Singer index theorem. *Comm Math Phys*, 1983, 90: 161–173
- 3 Atiyah M F. *K-Theory*. New York-Amsterdam: W A Benjamin, 1967
- 4 Atiyah M F. *Collected Works, Volume 3*. Oxford: Oxford Univ Press, 1988
- 5 Atiyah M F, Bott R. The index problem for manifolds with boundary. In: *Differential Analysis, Bombay Colloquium*. Bombay: Tata Inst Fund Res, 1964, 175–186
- 6 Atiyah M F, Bott R. A Lefschetz fixed point formula for elliptic differential operators. *Bull Amer Math Soc (NS)*, 1966, 72: 245–250
- 7 Atiyah M F, Bott R. A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes: I. *Ann of Math (2)*, 1967, 86: 374–407
- 8 Atiyah M F, Bott R. A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes: II. Applications. *Ann of Math (2)*, 1968, 88: 451–491
- 9 Atiyah M F, Bott R, Patodi V K. On the heat equation and the index theorem. *Invent Math*, 1973, 19: 279–330
- 10 Atiyah M F, Donnelly H, Singer I M. Eta invariants, signature defects of cusps, and values of L -functions. *Ann of Math (2)*, 1983, 118: 131–177
- 11 Atiyah M F, Hirzebruch F. Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds. *Bull Amer Math Soc (NS)*, 1959, 65: 276–281
- 12 Atiyah M F, Hirzebruch F. Vector bundles and homogeneous spaces. In: *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. III. Providence: Amer Math Soc, 1961, 7–38
- 13 Atiyah M F, Patodi V K, Singer I M. Spectral asymmetry and Riemannian geometry. *Bull Lond Math Soc*, 1973, 5: 229–234
- 14 Atiyah M F, Patodi V K, Singer I M. Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, 1975, 77: 43–69
- 15 Atiyah M F, Patodi V K, Singer I M. Spectral asymmetry and Riemannian geometry. II. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, 1975, 78: 405–432
- 16 Atiyah M F, Patodi V K, Singer I M. Spectral asymmetry and Riemannian geometry. III. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, 1976, 79: 71–99
- 17 Atiyah M F, Segal G B. The index of elliptic operators: II. *Ann of Math (2)*, 1968, 87: 531–545
- 18 Atiyah M F, Singer I M. The index of elliptic operators on compact manifolds. *Bull Amer Math Soc (NS)*, 1963, 69: 422–433
- 19 Atiyah M F, Singer I M. The index of elliptic operators: I. *Ann of Math (2)*, 1968, 87: 484–530
- 20 Atiyah M F, Singer I M. The index of elliptic operators: III. *Ann of Math (2)*, 1968, 87: 546–604
- 21 Atiyah M F, Singer I M. Index theory for skew-adjoint Fredholm operators. *Publ Math Inst Hautes Études Sci*, 1969, 37: 5–26
- 22 Atiyah M F, Singer I M. The index of elliptic operators: IV. *Ann of Math (2)*, 1971, 93: 119–138
- 23 Atiyah M F, Singer I M. The index of elliptic operators: V. *Ann of Math (2)*, 1971, 93: 139–149
- 24 Bär C, Ballmann W. Boundary value problems for elliptic differential operators of first order. In: *Surveys in Differential Geometry*, vol. XVII. Boston: Int Press, 2012, 1–78
- 25 Bär C, Ballmann W. Guide to elliptic boundary value problems for Dirac-type operators. In: *Arbeitstagung Bonn 2013. Progress in Mathematics*, vol. 319. Cham: Birkhäuser/Springer, 2016, 43–80
- 26 Berline N, Getzler E, Vergne M. *Heat Kernels and Dirac Operators*. Grundlehren Text Editions. Berlin: Springer-Verlag, 2004
- 27 Berline N, Vergne M. The equivariant index and Kirillov’s character formula. *Amer J Math*, 1985, 107: 1159–1190
- 28 Berline N, Vergne M. A computation of the equivariant index of the Dirac operator. *Bull Soc Math France*, 1985, 113: 305–345

- 29 Berline N, Vergne M. A proof of Bismut local index theorem for a family of Dirac operators. *Topology*, 1987, 26: 435–463
- 30 Berthomieu A. Direct image for some secondary K -theories. *Astérisque*, 2009, 327: 289–360
- 31 Berthomieu A, Bismut J-M. Quillen metrics and higher analytic torsion forms. *J Reine Angew Math*, 1994, 457: 85–184
- 32 Bismut J-M. The Atiyah-Singer theorems: A probabilistic approach. I. The index theorem. *J Funct Anal*, 1984, 57: 56–99
- 33 Bismut J-M. The Atiyah-Singer theorems: A probabilistic approach. II. The Lefschetz fixed point formulas. *J Funct Anal*, 1984, 57: 329–348
- 34 Bismut J-M. The infinitesimal Lefschetz formulas: A heat equation proof. *J Funct Anal*, 1985, 62: 435–457
- 35 Bismut J-M. Localization formulas, superconnections, and the index theorem for families. *Comm Math Phys*, 1986, 103: 127–166
- 36 Bismut J-M. The Atiyah-Singer index theorem for families of Dirac operators: Two heat equation proofs. *Invent Math*, 1986, 83: 91–151
- 37 Bismut J-M. The Witten complex and the degenerate Morse inequalities. *J Differential Geom*, 1986, 23: 207–240
- 38 Bismut J-M. Demailly's asymptotic Morse inequalities: A heat equation proof. *J Funct Anal*, 1987, 72: 263–278
- 39 Bismut J-M. Transgressed Chern forms for Dirac operators. *J Funct Anal*, 1988, 77: 32–50
- 40 Bismut J-M. A local index theorem for non-Kähler manifolds. *Math Ann*, 1989, 284: 681–699
- 41 Bismut J-M. Eta invariants and complex immersions. *Bull Soc Math France*, 1990, 118: 211–227
- 42 Bismut J-M. Superconnection currents and complex immersions. *Invent Math*, 1990, 99: 59–113
- 43 Bismut J-M. Koszul complexes, harmonic oscillators, and the Todd class. *J Amer Math Soc*, 1990, 3: 159–256
- 44 Bismut J-M. Equivariant Bott-Chern currents and the Ray-Singer analytic torsion. *Math Ann*, 1990, 287: 495–507
- 45 Bismut J-M. Complex equivariant intersection, excess normal bundles and Bott-Chern currents. *Comm Math Phys*, 1992, 148: 1–55
- 46 Bismut J-M. Bott-Chern currents, excess normal bundles and the Chern character. *Geom Funct Anal*, 1992, 2: 285–340
- 47 Bismut J-M. Equivariant short exact sequences of vector bundles and their analytic torsion forms. *Compos Math*, 1994, 93: 291–354
- 48 Bismut J-M. Equivariant immersions and Quillen metrics. *J Differential Geom*, 1995, 41: 53–157
- 49 Bismut J-M. Holomorphic Families of Immersions and Higher Analytic Torsion Forms. *Astérisque*, no. 244. Paris: Soc Math France, 1997
- 50 Bismut J-M. Quillen metrics and singular fibres in arbitrary relative dimension. *J Algebraic Geom*, 1997, 6: 19–149
- 51 Bismut J-M. Local index theory, eta invariants and holomorphic torsion: A survey. In: *Surveys in Differential Geometry*, vol. III. Boston: Int Press, 1998, 1–76
- 52 Bismut J-M. Holomorphic and de Rham torsion. *Compos Math*, 2004, 140: 1302–1356
- 53 Bismut J-M. Eta invariants, differential characters and flat vector bundles. *Chin Ann Math Ser B*, 2005, 26: 15–44
- 54 Bismut J-M, Bost J B. Fibrés déterminants, métriques de Quillen et dégénérescence des courbes. *Acta Math*, 1990, 165: 1–103
- 55 Bismut J-M, Cheeger J. η -invariants and their adiabatic limits. *J Amer Math Soc*, 1989, 2: 33–70
- 56 Bismut J-M, Cheeger J. Families index for manifolds with boundary, superconnections, and cones. I. Families of manifolds with boundary and Dirac operators. *J Funct Anal*, 1990, 89: 313–363
- 57 Bismut J-M, Cheeger J. Families index for manifolds with boundary, superconnections and cones. II. The Chern character. *J Funct Anal*, 1990, 90: 306–354
- 58 Bismut J-M, Cheeger J. Remarks on the index theorem for families of Dirac operators on manifolds with boundary. In: *Differential Geometry. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*, vol. 52. Harlow: Longman Sci Tech, 1991, 59–83
- 59 Bismut J-M, Cheeger J. Transgressed Euler classes of $SL(2n, \mathbf{Z})$ vector bundles, adiabatic limits of eta invariants and special values of L -functions. *Ann Sci Éc Norm Supér (4)*, 1992, 25: 335–391
- 60 Bismut J-M, Freed D S. The analysis of elliptic families. I. Metrics and connections on determinant bundles. *Comm Math Phys*, 1986, 106: 159–176
- 61 Bismut J-M, Freed D S. The analysis of elliptic families. *Comm Math Phys*, 1986, 107: 103–163
- 62 Bismut J-M, Gillet H, Soulé C. Analytic torsion and holomorphic determinant bundles I. Bott-Chern forms and analytic torsion. *Comm Math Phys*, 1988, 115: 49–78

- 63 Bismut J-M, Gillet H, Soulé C. Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. *Comm Math Phys*, 1988, 115: 79–126
- 64 Bismut J-M, Gillet H, Soulé C. Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. *Comm Math Phys*, 1988, 115: 301–351
- 65 Bismut J-M, Gillet H, Soulé C. Bott-Chern currents and complex immersions. *Duke Math J*, 1990, 60: 255–284
- 66 Bismut J-M, Gillet H, Soulé C. Complex immersions and Arakelov geometry. In: *The Grothendieck Festschrift*, vol. I. Progress in Mathematics, vol. 86. Boston: Birkhäuser, 1990, 249–331
- 67 Bismut J-M, Goette S. Holomorphic equivariant analytic torsions. *Geom Funct Anal*, 2000, 10: 1289–1422
- 68 Bismut J-M, Goette S. Families Torsion and Morse Functions. *Astérisque*, no. 275. Paris: Soc Math France, 2001
- 69 Bismut J-M, Goette S. Equivariant de Rham torsions. *Ann of Math (2)*, 2004, 159: 53–216
- 70 Bismut J-M, Köhler K. Higher analytic torsion forms for direct images and anomaly formulas. *J Algebraic Geom*, 1992, 1: 647–684
- 71 Bismut J-M, Lebeau G. Complex immersions and Quillen metrics. *Inst Hautes Études Sci Publ Math*, 1991, 74: 1–291
- 72 Bismut J-M, Lott J. Flat vector bundles, direct images and higher real analytic torsion. *J Amer Math Soc*, 1995, 8: 291–363
- 73 Bismut J-M, Lott J. Torus bundles and the group cohomology of $GL(N, \mathbb{Z})$. *J Differential Geom*, 1997, 47: 196–236
- 74 Bismut J-M, Ma X N. Holomorphic immersions and equivariant torsion forms. *J Reine Angew Math*, 2004, 575: 189–235
- 75 Bismut J-M, Ma X N, Zhang W P. Asymptotic torsion and Toeplitz operators. *J Inst Math Jussieu*, 2017, 16: 223–349
- 76 Bismut J-M, Vasserot E. The asymptotics of the Ray-Singer analytic torsion associated with high powers of a positive line bundle. *Comm Math Phys*, 1989, 125: 355–367
- 77 Bismut J-M, Vasserot E. The asymptotics of the Ray-Singer analytic torsion of the symmetric powers of a positive vector bundle. *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, 1990, 40: 835–848
- 78 Bismut J-M, Zhang W P. An extension of a theorem by Cheeger and Müller (with an appendix by Laudienbach F). *Astérisque*, 1992, 205: 235
- 79 Bismut J-M, Zhang W P. Real embeddings and eta invariants. *Math Ann*, 1993, 295: 661–684
- 80 Bismut J-M, Zhang W P. Milnor and Ray-Singer metrics on the equivariant determinant of a flat vector bundle. *Geom Funct Anal*, 1994, 4: 136–212
- 81 Bleecker D D, Booss B. *Topology and Analysis*. Universitext. New York: Springer-Verlag, 1985
- 82 Bleecker D D, Booss B. *Index Theory—With Applications to Mathematics and Physics*. Somerville: Int Press, 2013
- 83 Booss B, Wojciechowski K P. *Elliptic Boundary Problems for Dirac Operators*. Mathematics: Theory & Applications. Boston: Birkhäuser, 1993
- 84 Bott R. *Lectures on $K(X)$* . Mathematics Lecture Note Series. New York-Amsterdam: W A Benjamin, 1969
- 85 Bunke U. Index theory, eta forms, and Deligne cohomology. *Mem Amer Math Soc*, 2009, 198: 928
- 86 Bunke U, Ma X N. Index and secondary index theory for flat bundles with duality. In: *Aspects of Boundary Problems in Analysis and Geometry*. Operator Theory: Advances and Applications, vol. 151. Basel: Birkhäuser, 2004, 265–341
- 87 Bunke U, Schick T. Smooth K-theory. *Astérisque*, 2009, 328: 45–135
- 88 Bunke U, Schick T. Differential K-theory: A survey. In: *Global Differential Geometry*. Springer Proceedings in Mathematics, vol. 17. Heidelberg: Springer, 2012, 303–357
- 89 Bunke U, Schick T. Differential orbifold K-theory. *J Noncommut Geom*, 2013, 7: 1027–1104
- 90 Cartan H. Théorème d’Atiyah-Singer sur l’Indice d’un Operateur Differentiel. *Séminaire Cartan-Schwartz*, 16^e Année: 1963/64. Paris: Secrétariat Mathématique, 1965
- 91 Cheeger J. On the spectral geometry of spaces with cone-like singularities. *Proc Natl Acad Sci USA*, 1979, 76: 2103–2106
- 92 Cheeger J. Spectral geometry of singular Riemannian spaces. *J Differential Geom*, 1983, 18: 575–657
- 93 Cheeger J. η -invariants, the adiabatic approximation and conical singularities. I. The adiabatic approximation. *J Differential Geom*, 1987, 26: 175–221
- 94 Chern S S. A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds. *Ann of Math (2)*, 1944, 45: 747–752
- 95 Chern S S. *Complex Manifolds Without Potential Theory* (with an Appendix on the Geometry of Characteristic Classes), 2nd ed. Universitext. New York: Springer-Verlag, 1995
- 96 Chern S S, Simons J. Characteristic forms and geometric invariants. *Ann of Math (2)*, 1947, 99: 48–69

- 97 Chou A W. The Dirac operator on spaces with conical singularities and positive scalar curvatures. [Trans Amer Math Soc](#), 1985, 289: 1–40
- 98 Dai X Z. Adiabatic limits, nonmultiplicativity of signature, and Leray spectral sequence. [J Amer Math Soc](#), 1991, 4: 265–321
- 99 Dai X Z. Geometric invariants and their adiabatic limits. In: *Differential Geometry: Geometry in Mathematical Physics and Related Topics* (Los Angeles, CA, 1990). *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 54. Providence: Amer Math Soc, 1993, 145–156
- 100 Dai X Z. APS boundary conditions, eta invariants and adiabatic limits. [Trans Amer Math Soc](#), 2002, 354: 107–122
- 101 Dai X Z, Freed D S. η -invariants and determinant lines. [J Math Phys](#), 1994, 35: 5155–5194
- 102 Dai X Z, Melrose R B. Adiabatic limit, heat kernel and analytic torsion. In: *Metric and Differential Geometry*. *Progress in Mathematics*, vol. 297. Basel: Birkhäuser/Springer, 2012, 233–298
- 103 Dai X Z, Zhang W P. Circle bundles and the Kreck-Stolz invariant. [Trans Amer Math Soc](#), 1995, 347: 3587–3593
- 104 Dai X Z, Zhang W P. Splitting of the family index. [Comm Math Phys](#), 1996, 182: 303–317
- 105 Dai X Z, Zhang W P. Higher spectral flow. [J Funct Anal](#), 1998, 157: 432–469
- 106 Dai X Z, Zhang W P. Real embeddings and the Atiyah-Patodi-Singer index theorem for Dirac operators. [Asian J Math](#), 2000, 4: 775–794
- 107 Dai X Z, Zhang W P. Adiabatic limit, Bismut-Freed connection, and the real analytic torsion form. [J Reine Angew Math](#), 2010, 647: 87–113
- 108 Dai X Z, Zhang W P. Eta invariant and holonomy: The even dimensional case. [Adv Math](#), 2015, 279: 291–306
- 109 Dirac P. The quantum theory of the electron. [Proc R Soc Lond Ser A](#), 1928, 117: 610–624
- 110 Donnelly H. Eta invariants for G -spaces. [Indiana Univ Math J](#), 1978, 27: 889–918
- 111 Donnelly H. Local index theorem for families. [Michigan Math J](#), 1988, 35: 11–20
- 112 Donnelly H, Patodi V K. Spectrum and the fixed point sets of isometries—II. [Topology](#), 1977, 16: 1–11
- 113 Duistermaat J J. The Heat Kernel Lefschetz Fixed Point Formula for the Spin- c Dirac Operator. *Modern Birkhäuser Classics*. New York: Birkhäuser/Springer, 2011
- 114 Duistermaat J J, Heckman G J. On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space. [Invent Math](#), 1982, 69: 259–268
- 115 Fang H. Equivariant spectral flow and a Lefschetz theorem on odd-dimensional spin manifolds. [Pacific J Math](#), 2005, 220: 299–312
- 116 Feng H T, Xu G B, Zhang W P. Real embeddings, η -invariant and Chern-Simons current. [Pure Appl Math Q](#), 2009, 5: 1113–1137
- 117 Freed D S. The Atiyah-Singer index theorem. [Bull Amer Math Soc \(NS\)](#), 2021, 58: 517–566
- 118 Freed D S, Lott J. An index theorem in differential K -theory. [Geom Topol](#), 2010, 14: 903–966
- 119 Friedan D, Windey P. Supersymmetric derivation of the Atiyah-Singer index and the chiral anomaly. [Nuclear Phys B](#), 1984, 235: 395–416
- 120 Friedrich T. *Dirac Operators in Riemannian Geometry*. *Graduate Studies in Mathematics*, vol. 25. Providence: Amer Math Soc, 2000
- 121 Getzler E. Pseudodifferential operators on supermanifolds and the Atiyah-Singer index theorem. [Comm Math Phys](#), 1983, 92: 163–178
- 122 Getzler E. A short proof of the local Atiyah-Singer index theorem. [Topology](#), 1986, 25: 111–117
- 123 Gilkey P B. Curvature and the eigenvalues of the Laplacian for elliptic complexes. [Adv Math](#), 1973, 10: 344–382
- 124 Gilkey P B. Curvature and the eigenvalues of the Dolbeault complex for Kaehler manifolds. [Adv Math](#), 1973, 11: 311–325
- 125 Gilkey P B. Curvature and the eigenvalues of the Dolbeault complex for Hermitian manifolds. [Adv Math](#), 1976, 21: 61–77
- 126 Gilkey P B. *Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah-Singer Index Theorem*, 2nd ed. *Studies in Advanced Mathematics*. Boca Raton: CRC Press, 1995
- 127 Gillet H, Soulé C. Characteristic classes for algebraic vector bundles with Hermitian metric, I. [Ann of Math \(2\)](#), 1990, 131: 163–203
- 128 Gillet H, Soulé C. Characteristic classes for algebraic vector bundles with Hermitian metric, II. [Ann of Math \(2\)](#), 1990, 131: 205–238
- 129 Goette S. Equivariant η -invariants and η -forms. [J Reine Angew Math](#), 2000, 526: 181–236
- 130 Gorokhovsky A, Lott J. A Hilbert bundle description of differential K -theory. [Adv Math](#), 2018, 328: 661–712

- 131 Hamilton W R. The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton, Volume III: Algebra. Cunningham Memoir, no. XV. London-New York: Cambridge Univ Press, 1967
- 132 Hirzebruch F. Hilbert modular surfaces. *Enseign Math (2)*, 1973, 19: 183–281
- 133 Hirzebruch F. Topological Methods in Algebraic Geometry. Classics in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1995
- 134 Ho M. An extended variational formula for the Bismut-Cheeger eta form and its applications. *New York J Math*, 2023, 29: 1496–1530
- 135 Hopkins M J, Singer I M. Quadratic functions in geometry, topology, and M-theory. *J Differential Geom*, 2005, 70: 329–452
- 136 Karoubi M. *K-Theory*. Classics in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 2008
- 137 Kirillov A A. The method of orbits in the theory of unitary representations of Lie groups. *Funkc Anal Priložen*, 1968, 2: 96–98
- 138 Klonoff K R. An Index Theorem in Differential K-Theory. Ann Arbor: ProQuest LLC, 2008
- 139 Kotake T. An analytic proof of the classical Riemann-Roch theorem. In: *Global Analysis. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vols. XIV–XVI. Providence: Amer Math Soc, 1970, 137–146
- 140 Köhler K, Roessler D. A fixed point formula of Lefschetz type in Arakelov geometry I: Statement and proof. *Invent Math*, 2001, 145: 333–396
- 141 Lafferty J D, Yu Y L, Zhang W P. A direct geometric proof of the Lefschetz fixed point formulas. *Trans Amer Math Soc*, 1992, 329: 571–583
- 142 Lawson H B, Michelsohn M-L. *Spin Geometry*. Princeton Mathematical Series, vol. 38. Princeton: Princeton Univ Press, 1989
- 143 Liu B. Functoriality of equivariant eta forms. *J Noncommut Geom*, 2017, 11: 225–307
- 144 Liu B. Real embedding and equivariant eta forms. *Math Z*, 2019, 292: 849–878
- 145 Liu B. Equivariant eta forms and equivariant differential K-theory. *Sci China Math*, 2021, 64: 2159–2206
- 146 Liu B. Bismut-Cheeger eta form and higher spectral flow. *Int Math Res Not IMRN*, 2023, 13: 10964–10996
- 147 Liu B, Ma X N. Differential K-theory, η -invariant, and localization. *C R Math Acad Sci Paris*, 2019, 357: 803–813
- 148 Liu B, Ma X N. Differential K-theory and localization formula for η -invariants. *Invent Math*, 2020, 222: 545–613
- 149 Liu B, Ma X N. Comparison of two equivariant η -forms. *Adv Math*, 2022, 404: 108163
- 150 Liu B, Yu J Q. Rigidity and vanishing theorems on \mathbb{Z}/k Spin^c manifolds. *Trans Amer Math Soc*, 2015, 367: 1381–1420
- 151 Liu K F, Ma X N. On family rigidity theorems. I. *Duke Math J*, 2000, 102: 451–474
- 152 Liu K F, Ma X N, Zhang W P. Spin^c manifolds and rigidity theorems in K-theory. *Asian J Math*, 2000, 4: 933–960
- 153 Liu K F, Ma X N, Zhang W P. Rigidity and vanishing theorems in K-theory. *C R Acad Sci Paris Sér I Math*, 2000, 330: 301–305
- 154 Liu K F, Ma X N, Zhang W P. Rigidity and vanishing theorems in K-theory. *Comm Anal Geom*, 2003, 11: 121–180
- 155 Lott J. \mathbf{R}/\mathbf{Z} index theory. *Comm Anal Geom*, 1994, 2: 279–311
- 156 Lück W, Schick T, Thielmann T. Torsion and fibrations. *J Reine Angew Math*, 1998, 498: 1–33
- 157 Ma X N. Formes de torsion analytique et familles des submersions I. *Bull Soc Math France*, 1999, 127: 541–621
- 158 Ma X N. Submersions and equivariant Quillen metrics. *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, 2000, 50: 1539–1588
- 159 Ma X N. Functoriality of real analytic torsion forms. *Israel J Math*, 2002, 131: 1–50
- 160 Ma X N, Marinescu G. Holomorphic Morse inequalities and Bergman kernels. *Progress in Mathematics*, vol. 254. Basel: Birkhäuser Verlag, 2007
- 161 Ma X N, Zhang W P. Eta-invariants, torsion forms and flat vector bundles. *Math Ann*, 2008, 340: 569–624
- 162 McKean H P Jr, Singer I M. Curvature and the eigenvalues of the Laplacian. *J Differential Geom*, 1967, 1: 43–69
- 163 Mei J Q. Introduction to Manifold and Geometry (in Chinese). Beijing: Science Press, 2013 [梅加强. 流形与几何初步. 北京: 科学出版社, 2013]
- 164 Melrose R B. The Atiyah-Patodi-Singer Index Theorem. *Research Notes in Mathematics*, vol. 4. Wellesley: A K Peters, 1993
- 165 Melrose R B, Piazza P. Families of Dirac operators, boundaries and the b -calculus. *J Differential Geom*, 1997, 46: 99–180
- 166 Melrose R B, Piazza P. An index theorem for families of Dirac operators on odd-dimensional manifolds with boundary. *J Differential Geom*, 1997, 46: 287–334
- 167 Minakshisundaram S, Pleijel A. Some properties of the eigenfunctions of the Laplace-operator on Riemannian manifolds. *Canad J Math*, 1949, 1: 242–256
- 168 Mukherjee A. Atiyah-Singer Index Theorem. *Texts and Readings in Mathematics*, vol. 69. New Delhi: Hindustan

- Book Agency, 2013
- 169 Müller W. Signature defects of cusps of Hilbert modular varieties and values of L -series at $s = 1$. *J Differential Geom*, 1984, 20: 55–119
- 170 Palais R S. Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem. *Annals of Mathematics Studies*, no. 57. Princeton: Princeton Univ Press, 1965
- 171 Patodi V K. Curvature and the eigenforms of the Laplace operator. *J Differential Geom*, 1971, 5: 233–249
- 172 Patodi V K. An analytic proof of Riemann-Roch-Hirzebruch theorem for Kaehler manifolds. *J Differential Geom*, 1971, 5: 251–283
- 173 Patodi V K. Holomorphic Lefschetz fixed point formula. *Bull Amer Math Soc (NS)*, 1973, 79: 825–828
- 174 Quillen D. Superconnections and the Chern character. *Topology*, 1985, 24: 89–95
- 175 Ray D B, Singer I M. R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds. *Adv Math*, 1971, 7: 145–210
- 176 Ray D B, Singer I M. Analytic torsion for complex manifolds. *Ann of Math (2)*, 1973, 98: 154–177
- 177 Rosenberg S. The Laplacian on a Riemannian Manifold. *London Mathematical Society Student Texts*, vol. 31. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1997
- 178 Seeley R T. Complex powers of an elliptic operator. In: *Singular Integrals (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics Chicago Ill 1966)*. Providence: Amer Math Soc, 1967, 288–307
- 179 Segal G. Equivariant K-theory. *Publ Math Inst Hautes Études Sci*, 1968, 34: 129–151
- 180 Shanahan P. The Atiyah-Singer Index Theorem. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 638. Berlin: Springer, 1978
- 181 Simons J, Sullivan D. Structured vector bundles define differential K -theory. In: *Quanta of Maths*. Clay Mathematics Proceedings, vol. 11. Providence: Amer Math Soc, 2010, 579–599
- 182 Soulé C. *Lectures on Arakelov Geometry*. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1992
- 183 Su J C. *Topology of Manifold (in Chinese)*. Wuhan: Wuhan Univ Press, 2005 [苏竞存. 流形的拓扑学. 武汉: 武汉大学出版社, 2005]
- 184 Tang S. Concentration theorem and relative fixed point formula of Lefschetz type in Arakelov geometry. *J Reine Angew Math*, 2012, 665: 207–235
- 185 Tang S. An arithmetic Lefschetz-Riemann-Roch theorem (with an appendix by Ma X N). *Proc Lond Math Soc (3)*, 2021, 122: 377–433
- 186 Tradler T, Wilson S O, Zeinalian M. An elementary differential extension of odd K-theory. *J K-Theory*, 2013, 12: 331–361
- 187 Witten E. Constraints on supersymmetry breaking. *Nuclear Phys B*, 1982, 202: 253–316
- 188 Witten E. Global gravitational anomalies. *Comm Math Phys*, 1985, 100: 197–229
- 189 Witten E. D-branes and K -theory. *J High Energy Phys*. 1998, 12: 19, 41
- 190 Yu Y L. Local index theorem for Dirac operator. *Acta Math Sin (Engl Ser)*, 1987, 3: 152–169
- 191 Yu Y L. *The Index Theorem and the Heat Equation Method*. Nankai Tracts in Mathematics, vol. 2. River Edge: World Sci Publ, 2001
- 192 Yu Y L. From the Angle Sum in a Triangle (in Chinese). Beijing: Higher Ed Press, 2021 [虞言林. 从三角形内角和谈起. 北京: 高等教育出版社, 2021]
- 193 Wang Y. Volterra calculus, local equivariant family index theorem and equivariant eta forms. *Asian J Math*, 2016, 20: 759–784
- 194 Zhang W P. Local Atiyah-Singer index theorem for families of Dirac operators. In: *Differential Geometry and Topology (Tianjin 1986–87)*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1369. Berlin: Springer, 1989, 351–366
- 195 Zhang W P. A note on equivariant eta invariants. *Proc Amer Math Soc*, 1990, 108: 1121–1129
- 196 Zhang W P. Circle bundles, adiabatic limits of η -invariants and Rokhlin congruences. *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, 1994, 44: 249–270
- 197 Zhang W P. On the mod k index theorem of Freed and Melrose. *J Differential Geom*, 1996, 43: 198–206
- 198 Zhang W P. *Lectures on Chern-Weil Theory and Witten Deformations*. Nankai Tracts in Mathematics, vol. 4. River Edge: World Sci Publ, 2001
- 199 Zhang W P. Sub-signature operators, η -invariants and a Riemann-Roch theorem for flat vector bundles. *Chin Ann Math Ser B*, 2004, 25: 7–36
- 200 Zhang W P. η -invariant and Chern-Simons current. *Chin Ann Math Ser B*, 2005, 26: 45–56
- 201 Zhang W P. The mathematical work of V. K. Patodi. *Commun Math Stat*, 2014, 2: 253–277
- 202 Zhang W P. *Introduction to Local Index Theory*. The Institute Lecture (Chinese Academy of Sciences) 2014 (in Chinese). Beijing: Science Press, 2014, 84–103 [张伟平. 局部指标理论简介. (中国科学院) 数学所讲座 2014. 北

京: 科学出版社, 2014, 84–103]

203 Zhang W P, Feng H T. Geometry and Analysis on Manifold (in Chinese). Beijing: Higher Ed Press, 2022 [张伟平, 冯惠涛. 流形上的几何与分析. 北京: 高等教育出版社, 2022]

The local index theorem and the Bismut-Cheeger η -form

Bo Liu

Abstract In this paper, we provide an introduction to the local Atiyah-Singer index theorem along with its various generalizations. Furthermore, we present a survey of the recent progress of the Bismut-Cheeger η -form and review its applications in differential K-theory.

Keywords local index theorem, Dirac operator, η -invariant, η -form, differential K-theory

MSC(2020) 58J20, 58J28, 58J35, 19L50, 53C27, 58J30

doi: 10.1360/SSM-2024-0247