谈胜利回忆录（数学版）

学院建议我们为《传承》写一篇文章，介绍个人求学和数学研究的经历，我迅速答应了，但由于工作繁忙，拖到现在才开始动笔。

1. 中小学求学阶段

我 1963 年 2 月 10 日出生于湖北省大悟县丰店街，丰店公社政府所在地。奶奶在街上做小生意，母亲是农民，父亲在公社供销社上班。七姊妹，我排行老六，五兄弟中排行老四。大哥毕业于华中师范学院（大学）数学系，分配到湖北崇阳县做中学数学老师，1976 年调回大悟师范和武汉师范学院孝感分院（后改名为孝感师专，即现在的湖北工程学院）大悟校区任教。

1970 年春天，我就读丰店小学，学校要求每人准备一把小木棍（100 根），用于算术的学习。后来改为秋季入学，因此我们读了三个学期的五年级。三年级之前，学校很注重学生的学习成绩，我的几次数学测验成绩要么是满分，要么是 98 分。一次数学老师到公社开教学研讨会，特地把我带过去，让我见见世面。之后就是开门办学，学习与劳动相结合。我被安排在文艺班，学习乐器和绘画，排练文艺节目，在学校和街上的舞台上演出，有时也为田里劳动的农民表演，已经把书本学习排在第二位。四年级的一次数学期中考试，基础题全会做，四道应用题一题也不会，就像没学过一样，也不知道后面是怎么学会的，是怎么进入初中的。作为学生代表，我参加了小学毕业生茶话会，校长亲自为我倒了一杯茶，让我感动万分。

我就读的丰店初中和小学在一起，丰店高中也在附近，都是半农半读学制，印象比较深的是学习过农业机械的工作原理，到 10 里路以外的五岳山校办农场劳动，常到各地文艺表演，参加了县楚剧团招生面试。

一直到高考制度恢复之后，学校才重视课程学习。分班考试考数学，年级最高分是 70 多分，我考了 60 多分，被分配到理科快班，成绩好的文科生也在我们班学习。任课老师都是名牌大学毕业的。我们班没有历史和地理课。早上 6 点多开始做早操，然后早自习，晚自习到 10 点，回家后还要学习一两个小时，早上总是起不来，迟到了就要罚跑操场几圈。

我比其他同学幸运一些，家里有一些数学资料，大哥偶尔回家时也会给我讲一些难题的不同解法。已经务农的三哥和他的同学们都在我家集体复习，准备参加 1978 年的中考和高考。他们讨论 1977 年各省的高考试题，我也旁听，特别是平面几何的证明题，听多了，慢慢也会做几道，等到课堂上学习平面几何时，就觉得很轻松。有一次的作业，我用倒推法做一道证明题，写出来的证明过程就反过来了，看上去不是很自然，有一步是将 1 分解成两个线段的长度相加，老师讲解我的解法时，特地表扬了这一步的想法。

学校激励学生努力学习的措施很多。比如，期末考试总分第一名的学生，会戴一朵大红花游街表彰。我的同桌考了第一名，我的数理化都考了满分，学校破例给我也佩戴了三朵小红花一起表彰，奖品是从河南买的 50 本作业本。有一次

全校做早操时，领队老师突然让我上台做数学题表演，是一道三角函数的题目，要是当时做不出来，真不知道该怎么收场。

1978 年春天，我入选丰店公社代表队，到县城参加了全县中学生数理化竞赛，代表队获得全县第二名的好成绩，我个人的数学、物理、总分三项都是第三名。学校所有的学生都到街上列队迎接我们。奖品中有一个红色塑料封面的笔记本，前面几页是几名著名科学家的介绍，包括华罗庚，陈景润，杨乐和张广厚。

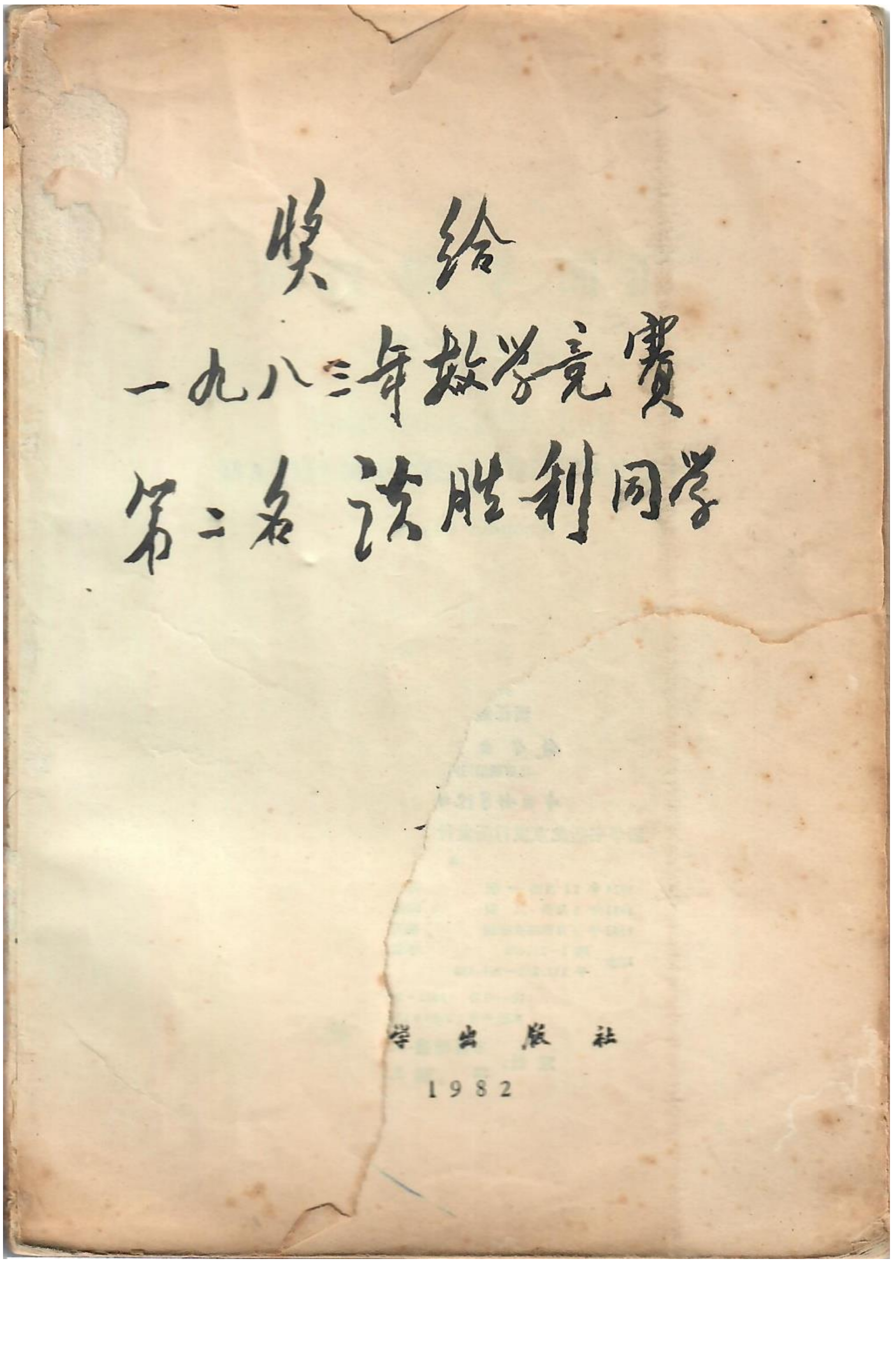
（我站在第一排的最右边）

父亲给我买了两本科普方面的书，好像一本是农业科技，另一本是科学家的故事之类的书，书中讲到一个化学家，要做一个钠与什么材料的化学反应的实验，碰到了一个难题，这两个材料放在一起无法发生反应，我当时就想是不是可以加点水促成反应，后来，化学家果然是用这个方法完成了实验，我顿时觉得好像我今后也可以从事这方面的工作。我很喜欢看《中学科技》杂志，它经常介绍一些中学生看得懂的数理化知识，例如，用流数的方法求切线方程；用割圆法和圆的面积公式求 π 的级数表示；求从斜坡滚到桌面的乒乓球弹跳的轨迹等等。

1980 年参加了高考，成绩并不是很理想，总分 388，数学 92，物理 92，化学 86，语文 53，政治 57，外语 8 分（满分 30），偏科比较严重，只比湖北的重点大学录取线多 3 分。报考的第一志愿是武汉建材学院（现武汉理工大学）的硅酸盐专业，总分差两分没被录取。最后被提前批的武汉师范学院（湖北大学）数学系录取。

2. 大学求学阶段

数学系 80 级有两个班，辅导员老师安排我担任班级的学习委员。很多同学和我一样都是因为在报考志愿上填了“服从分配”才来到武汉师院的，没有做中学老师的思想准备，学习积极性受到很大的影响。我当时有过转学物理的念头，在图书馆翻了翻理论物理的教材，发现里面全是数学，根本看不懂，也就放弃了。部分同学把考研究生作为学习的目标，得到任课老师的鼓励，也有系领导认为这部分同学不愿意当中学老师，专业思想不牢固。我喜欢做题，高等代数题目做完了，就去做矩阵论书中的题目。数学分析的题目做完了，就去做实分析书中的题目，发现很多题目看得懂，但不会做，后来知道要用到没有学过的拓扑知识。数学系每年都组织全系数学竞赛，试题中包含部分初等数学的题目，每次我都拿了奖。



有一年的暑假，我自学了复变函数和微分几何，本想把微分几何作为考研的方向，但微分几何题目太少，几所大学的研究生招生考试试卷都有重复的题目。开学后同宿舍的陈同学建议说，代数方向题目多，他把 Jacobson 的基础代数学给我看，说里面的题目很多，后来我就决定主攻代数方向。

（大学的代数学研究运算的规律，主要研究域、环、群。域中有加、减、乘、除四则运算，满足数运算的所有公理，但域中的元素不一定是数，最简单的域是有理数域，两元域，三元域等。环中有加、减、乘三则运算，乘法不一定满足交换律，最简单的环是整数环。群中只有乘法和除法两则运算，乘法不一定满足交换律。除环中有四则运算，但乘法的交换律不一定满足。）

每周上课五天半，由于课程设置很紧凑，基本上是上午上课，下午和晚上自修，我们有很多可以自由支配的时间，大多数时候都是呆在图书馆。图书馆和教室晚上 9 点锁门，听说外语系的教室关门晚，我们几位同学就接着去那里自习。周末我都去武汉建材学院的姐姐家，姐夫是工程方面的青年老师，学过很多数学，也常和他讨论数学，也通过他认识了数学教授舒湘琴。

有一年中国数学会在武汉召开年会，学校请了杨乐作报告，除了主会场，几个分会场全挤满了学生，杨乐说我们学生要向华罗庚学习，目标要远大，即使最终实现了一半，或者三分之一，也会取得很大的成就。由于会场很挤，我就把随身带的 Jacobson 的基础代数学放在座位下面，走时忘了拿，外系的同学捡到后交给数学系的同学，最后直接放到我的书桌上，并说肯定是我的。

听说武汉大学张远达教授的《有限群构造》出版了，几位同学一起去汉口购买，刚才把书从书架里拿出来翻了翻，第一卷中有很多读书笔记，书已经破烂不堪，第二卷还是新的。吉林大学的谢邦杰教授在《数学研究与评论》上发表了几篇环论方面的综述文章，介绍国际上的研究成果和最新动态，我把看得懂的几个定理抄下来，作为难一点的习题来做。比如，1964 年发表的一个定理说“具有有限个零因子的环是有限环”，花点时间也可以给出证明。有些定理，特别是关于环的交换性的定理，虽然条件和结论都明白，但证明要用到研究生课程中的环的结构定理。环的交换性条件的研究起源于推广著名的 Wedderburn 定理：有限除环必为域。除环的四则运算中乘法没有要求交换律，但域的四则运算满足交换律，如果除环的元素个数有限的话，交换律自动成立。Jacobson 和 Herstein 将该定理推广到任意环。

Jacobson 定理： 如果对环 R 中的任何元 x，总存在正整数 $n(x) > 1$，使得 $x^{n(x)} = x$，则 R 是交换环，即交换律 $xy = yx$ 恒成立。

Herstein 定理：如果对环 R 中的任何元 x, y，总存在正整数 $n(x, y) > 1$，使得 $(xy - yx)^{n(x,y)} = xy - yx$，则 R 是交换环。

Herstein 的条件是环交换的充分必要条件。我试着去读相关的论文，发现承认了环的结构定理后，也看得懂证明。这吸引我去寻找新的交换性条件。模仿论文中的证明，不久就找到了一个，与 Herstein 的条件类似：

$$(xy)^{n(x,y)} - (yx)^{n(x,y)} = xy - yx,$$

该条件也是环交换的充分必要条件。这是我从事数学研究的第一步。

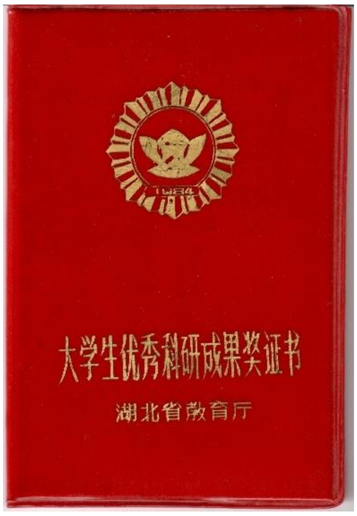
数学系的资料室对毕业班开放，以便我们撰写毕业论文。孙继逊教授是我的论文导师，我向他汇报了研究环的交换性的意向，他建议我读一读刘绍学教授刚出版的《环与代数》，详细了解一下环的结构定理，我边学习边在教室向他汇报。在资料室里，我也读了 Herstein 的书《非交换环（英文）》的相关部分。顺着谢邦杰的综述文章中提供的参考文献，也研读了几篇研究论文，撰写了《环的一个可换定理》的文章作为毕业论文，主要结果是将发现的交换性条件推广到最为一般的情形。

定理：如果对环 R 中的任何元 x 和 y，都存在有限个整数 $a_2,\cdots,a_n$ 使得

$$xy-yx=a_2((xy)^2-(yx)^2)+\cdots+a_n((xy)^n-(yx)^n),$$

则 R 是交换环。注意，这里的整数及其个数可以随着 x 和 y 的变化而变。

毕业论文获得当年湖北省大学生优秀科研成果三等奖，武汉大学喻杉的短篇小说《女大学生宿舍》获得特等奖。我的论文发表在《湖北大学学报（自然科学版）》1986 年第一期上，拿到了 90 元的稿费。



3. 在孝感师专工作的两年

大学毕业后被分配到孝感师范专科学校数学系任教，1984 年 7 月入职，报到时，人事处长告诉我，我的毕业论文被评为优。开学后不久学校通知我，毕业论文获得了教育厅的奖，并帮忙把奖品和证书带回来了。

我的教学任务是担任物理系高等数学课程的助教，也为数学系高年级学生开设抽象代数的研讨课，同时兼任团总支书记。数学系做科研的气氛很浓厚，每周政治学习之后都会进行学术研讨，要么是教学方面的，要么是科研方面的，只要武汉有学术活动，数学系都会派我们去学习。

一次会议上研讨了潘承洞等著的《阶的估计基础》一书，主要是为了数学分析和高等数学的教学，我的收获很大，用阶的估计的方法，再难的极限计算都可以转化成简单的代数计算，感觉学到了微积分的精髓。之前，在高等代数的学习过程中我有过类似的体会：高等代数的问题都可转化成矩阵的问题，矩阵的问题都可以转化成标准型的问题，标准型的问题都是简单的计算问题。有了这样的认识，高等代数的难题就有了程序式的解决方法。

记得系主任在一次研讨会上介绍了他构造连续但处处不可微函数的新方法，大家讨论得非常热烈。系主任鼓励我们年轻老师要做科研，选派了几位老师去其它高校攻读助教进修班和委培研究生。在工作期间我完成了几篇论文，科技处有专人帮忙用打字机打印成预印本。每年的下半年，全省的师专数学系都会开一次学术年会，我参加过两次，一次在咸宁师专，一次在郧阳师专，都做了报告。几篇论文的手稿至今还保存着，也没有想到投出去发表。大学毕业论文还是孙继逊教授推荐才发表的。

学校规定工作两年后可以报考研究生，但只能报考委托培养的研究生，毕业后要回校任教，数学系的系主任很理解我们，希望我们有更好的发展，因此他和分管校领导进行了沟通，给我们一次报考非委培研究生的机会。我的目标学校之一是华东师范大学，我给王建磐博士写信，询问代数群是研究什么的，他回信说是用代数几何方法研究群论，基础课包含交换代数，代数基础，代数几何，代数群等，并欢迎报考。我的一名大学同学购买了阿提亚等著的《交换代数引论》，所以对这门课有所了解，对其它课程一无所知。也从多份杂志上了解到，代数几何是重要的研究方向，国内还处于研究的空白，著名数学家们都在呼吁尽快培养这方面的研究生。王宽诚留学基金会发布了招生简章，选派留学生赴国外学习，有一个名额就是代数几何方向的，考试科目包含交换代数，我也报名参加 1986 年暑假的王宽诚留学基金会的招生考试。

研究生入学考试很顺利，那一年只考外语，两门基础课和一门专业课，考完后我立即开始自学《交换代数引论》，准备留学生的选拔考试。春节过了不久，我接到了华东师大的复试通知书，舒湘琴教授知道后，主动为我写了封推荐信，她还特地请武汉钢铁学院的任德麟教授也为我写了封推荐信，密封后让我带给数学系几何组的陈信漪教授，他马上转给了陈志杰教授。正常面试完了后，面试组的老师让我简单地介绍了我发表的一篇论文的结果。6 月 23 日，肖刚老师给我写了封信，建议我学习代数几何，并说他和陈志杰老师将是我的指导老师，并开始指导我学习《交换代数引论》。

六月份，光明日报等几家大报，大篇幅报道了华东师大的肖刚和郑伟安破格晋升为教授和博士生导师的新闻，他们都在法国获得了国家博士学位，正常博士学位拿到后授予的更高级别的博士学位，都是全国最年轻的教授，引起了轰动。暑假期间我正好回湖北大学参加全省的一个代数会议，向孙继逊等老师汇报了将去华东师大学习代数几何的情况，他们一致鼓励我努力学习，珍惜机会。我觉得即使去了国外，也不一定能找到像肖老师这么有名的导师学习代数几何，因此就放弃了王宽诚留学招生考试。

4. 硕士研究生学习阶段

一、课程学习。 入学后，肖老师给我们学代数几何的 6 位同学布置了任务，主要是课程学习，不久他就去美国普林斯顿高等研究院和加州伯克利的美国数学科学研究所进行两年的访问，陈志杰老师负责教授代数几何的课程。我的交换代数自学完了，导师就让我提前学习哈茨霍恩（Hartshorne）的《代数几何》第二章，学起来并不像以前自学那样顺利，一个月下来才学习了两节，并且不能完全理解背后的思想，后来才知道原因，我没有现代几何的基础，就是没有学过几何概念"流形"。（通俗地说流形上没有办法建立一套整体的坐标系，比如球面，只能在部分开集上建立坐标系，在两个坐标开集相交部分的点有两套坐标系，同一点的两组坐标之间的变换是一些好的函数，这与之前学过的解析几何与微分几何完全不同。）虽然学过平面射影几何（也称高等几何），射影平面是一个流形，但学的时候完全没把它作为流形来看。代数几何研究的对象就是流形概念的推广。比我高一届姓夏的学长是复旦大学微分几何方向的研究生，他和我有同样的感受，在湖北大学时，有机会接受代数和分析方面好的教育，但基本上没有机会接触到现代几何。目前一些数学系仍然需要解决几何课程弱的问题。

学习整体微分几何课程时，我总希望把张量计算转化成我擅长的矩阵计算，最终没有成功，做了无效的尝试，影响了课程的学习。后来才知道，张量运算与矩阵运算相比是完全不同的新运算，是一类"立体矩阵"的运算，无法用（平面）矩阵运算代替，正因如此，数学上才要研究张量运算。如果当时懂了这一点，熟练掌握了几何上的张量运算，对我的研究工作应该很有帮助。

二、研究三次覆盖 — 几何上的三次方程。肖老师在普林斯顿访问期间写信给陈老师，让我研究 Miranda 于 1985 年发表的三次覆盖的文章，希望建立和二次覆盖一样好的算法。

复旦的杨劲根老师为我们讲授过二次覆盖理论的课程。所谓二次覆盖就是研究方程 $z^2 = f(x,y)$ 定义的空间代数曲面，由于曲面可以表示成两重平面，

$$z = \sqrt{f(x,y)}, \qquad z = -\sqrt{f(x,y)},$$

就称曲面为平面的二次覆盖。类似地，也有曲面的二次覆盖，简称为二次覆盖。用十九世纪庞加莱，皮卡尔等人的语言，二次覆盖就是研究双变量的二次代数函数。方程 $f(x,y) = 0$ 定义了一条平面代数曲线 B，称它为二次覆盖的分歧曲线，因为曲面的方程在分歧曲线上有重根。二次覆盖完全由分歧曲线所决定，曲面的奇点（即非光滑点）对应于分歧曲线的奇点。所谓二次覆盖的计算是指如下两种计算，

1）**正规化的计算**：就是去掉多项式 $f(x,y)$ 的重因子的计算。如果 $f = gh^2$，g 无平方因子，曲面 $z^2 = f(x,y)$ 的正规化曲面就是指方程 $z^2 = g(x,y)$ 定义的新曲面。

2）**二次变换的计算**：如果空间原点是曲面的奇点，曲面 $z^2 = f(x,y)$ 在原点的二次变换曲面就是指新方程 $z^2 = f(xy,y)$ 定义的曲面。

交替运用两种简单计算，可以使得二次覆盖曲面变为光滑的，等价于分歧曲线是光滑的，并且有公式计算代数曲面的不变量。后来人们称上述计算为二次覆盖奇点的"典范解消"，它是研究代数曲面的一个重要工具。

肖刚对二次覆盖的计算给出了非常好的算法，并用于代数曲面的研究。他的博士论文就是用二次覆盖分类带有亏格 2 纤维化的代数曲面，作为 1137 号专著在著名的数学讲座丛书（俗称黄皮书）中出版，这是大陆学者在该丛书中出版的第一本专著（第二本是华东师大的时俭益老师出版的）。他还用二次覆盖的方法构造出单连通正指数的代数曲面，否定了著名的分水岭猜想。著名的“肖氏斜率不等式”就是用二次覆盖计算出来后，再推广到一般情形的。随后又用二次覆盖的方法解决了代数曲面分类中的几个难题。

鉴于二次覆盖的重要性，肖老师建议我研究三次覆盖，即方程

$$z^3+g(x,y)z+f(x,y)=0$$

定义的代数曲面，研究奇点的解消算法和不变量的计算公式。

Miranda 是系统研究三次覆盖的第一人，他用曲面上的秩 2 向量丛（2 维向量空间的推广）构造三次覆盖。若干年后，我发现他实际上是用曲面上的二元三次型的系数 a,b,c,d 的信息来描述三次覆盖，建立了三次覆盖与二元三次型之间的对应关系，

$$F=a\,X^3+3b\,X^2Y+3c\,XY^2+d\,Y^3,$$

其中 a,b,c,d 是 x,y 的多项式。二元三次型有三个不变量，判别式 $D(F)$，黑塞 $H(F)=Az^2+2Bzw+Cw^2$，和雅可比 $J(F)$. 判别式的零点是三次覆盖重根的轨迹，称为三次覆盖的分歧曲线。黑塞不变量的零点，即 $A,\ B,\ C$ 的公共零点，是三次覆盖的三重根的轨迹。

但二元三次型的系数不是整体量，其零点的几何意义不明显，作为构造三次覆盖的数据，理论上可行，实际操作时会有困难，要研究奇点解消和不变量的计算就更不方便。因此，我仍然喜欢用三次方程来描述三次覆盖，期待它将来有好的应用。

三、循环三次覆盖的研究。三次覆盖的研究比较困难，正规化的计算也很复杂。当三次方程的系数是整数时，这就是代数数论的整闭包的计算，即计算三次数域中的代数整数环的基（称为整基），三次数域是代数数论中的一个庞大的研究课题。我花了很多时间来计算三次覆盖的正规化，只得到了部分结果。

代数方向共有 8 名研究生，数论方向还有秦厚荣等两名学生，他们主要研究二次型理论。我们在一起学习了很多课程，包括江迪华老师的代数数论课，关于三次覆盖的正规化的计算，与江老师和秦厚荣有很多交流，由于某种原因我无法参加期末考试，江老师就让我把三次覆盖正规化计算的结果整理出来交给他，代替期末考试。

后来我着手研究简单的三次覆盖，即循环三次覆盖，它的三次方程中没有一次和二次项，$z^3=f(x,y)$，正规化的计算就相对简单，先去掉 $f(x,y)$ 中的三重因式，只剩下单重因式和二重因式，然后可以很简单地写出整基。再结合二次变换的计算，我发现三次循环覆盖也有“典范解消”，也就是说，有限次交替操作后分歧曲线变成光滑曲线。也有和二次覆盖类似的不变量计算公式。

肖老师回国后，马上了解我们的学习情况和研究工作的进展，我告诉他一般

三次覆盖的进展不大，但发现三次循环覆盖和二次覆盖很类似，有奇点的典范解消和不变量计算公式。他说一般的三次覆盖当然很难，不过循环三次覆盖是否有这么好的结论要仔细检查，如果真有的话，别人应该早就发现了。让我第二天详细汇报计算过程，听了我的汇报后，他断定结果是正确的，然后说下一步要像二次覆盖那样寻找三次循环覆盖的应用，也研究一下高次循环覆盖。不久英国的 M. Reid 访问华东师大，他用中文给我们讲了几次课，我也向他汇报了我的结果。肖老师在自然科学基金的申请书中，把利用三次循环覆盖研究代数曲面作为研究问题之一。

博维尔（A. Beauville）是肖老师在法国的导师之一，是代数曲面研究的顶级专家，他的论文新思想多，擅长构造奇特代数曲面的例子。他利用二次覆盖得到了几个非常漂亮的结果。一个非常有名的结果是他证明五次曲面上最多有 31 个奇点，并构造了一个例子，它正好有 31 个奇点。他把二元域上的编码理论引入到奇点个数的估计，这是一个很大的创新。论文是用法文写的，发表在一个会议论文集里。肖老师找到了这篇论文让我研究。

这年的寒假，我先回到武汉的姐姐家，没有急于回老家，熬了一个通宵读懂了博维尔论文中的证明。像在大学期间做研究那样，我模仿论文的研究过程，用三次循环覆盖代替二次覆盖，用三元域代替二元域，用尖点代替结点，将结点的“偶集”概念推广成尖点的“3 可除集”，推广每个结论，包括将二元域上的编码的结果，推广成三元域上的编码的结论，最后得到了完全类似的定理，解决了次数不超过 5 的曲面上尖点的最大个数问题，结论如下：

1) 三次曲面上最多有 3 个尖点，正好有 3 个尖点时，三次曲面的方程可以化为 $z^3 = xy(x+y+1)$，并且可以以 3 个尖点为分歧点，构造三次曲面上一个新的三次循环覆盖。这样的尖点集称为是 3 可除的。

2) 四次曲面（更一般地，K3 曲面）上最多有 9 个尖点，个数达到 9 时，9 个尖点是 3 可除的。

3) 五次曲面上最多有 20 个尖点，个数达到 20 时，其中一定有 15 个尖点是 3 可除的。

开学后，我在讨论班上汇报了这些结果，但没有个数达到最大的四次曲面和五次曲面的例子。第二天上课之前，肖老师介绍了他构造的具有 9 个尖点的 K3 曲面的例子，他选择有 3 阶自同构的椭圆曲线 E，考虑 $E\times E$ 上适当诱导的三阶自同构，它有 9 个不动点，乘积曲面商去这个自同构就得到具有 9 个尖点的 K3 曲面。这个商映射就是以 9 个尖点为分歧点的新三次循环覆盖。另外，我们也得知杨劲根教授证明：4 次曲面上不可能有 9 个尖点。是否存在有 20 个尖点的五次曲面，目前仍然是一个未解决的问题。

又过了一段时间，肖老师拿来德国波恩马普所所长希策布鲁赫（F. Hirzebruch）的一篇预印本给我，里面有奇点最大个数估计的一般不等式，它就是带奇点的宫冈-丘成桐（Miyaoka-Yau）不等式，它直接推出我得到的尖点个数的最大数，因此这一部分结果就不是新结果，也就没有整理出来发表，也没有放在硕士论文中。

作为第二个应用，我用三次循环覆盖研究代数曲面的典范映射。典范映射是用代数曲面上的全纯微分 2-形式定义的映射。如果典范映射是一个一般有限覆

盖，覆盖的次数就称为曲面的“典范次数”。博维尔利用宫冈-丘成桐不等式证明：

1）如果典范映射不保持微分 2-形式不变，那么曲面的典范次数最大为 36，并且除了有限类代数曲面外，典范次数最多为 9.（称这样的曲面为第一类代数曲面）

2）如果典范映射保持微分 2-形式不变，那么典范次数最多是 9，并且除了有限类代数曲面外，典范次数最多为 3.（第二类代数曲面）。

肖老师在他的论文《高典范次数的曲面》中证明，除了有限类代数曲面，第一类代数曲面的典范次数最多为 8. 已知的例子说明，第一类曲面的典范次数可以是 2，3，4，6，8，16，次数为 3 和 16 的例子各有一个，其它几个偶数的例子都有无穷多。

关于第二类代数曲面，有很多典范次数是 1 的曲面，比如次数大于 4 的空间光滑曲面。1930 年代，有人猜想第二类代数曲面的典范次数只能是 1. 几个著名数学家（包括数论学家 D. Zagier）用不同的方法构造了一个典范次数为 2 的例子。后来博维尔构造了无穷多典范次数为 2 的例子。其它的次数能否出现是一个没解决的问题，几个代数几何学家在不同的文章中提出了下述问题，

未解决问题（Open Problem）：第二类代数曲面的典范次数是否可以为 3？

肖刚猜想：除了有限类代数曲面，第二类代数曲面的典范次数最多为 2.

我研究了第二类代数曲面，假设它的典范映射是三次循环覆盖，那么覆盖一定是分歧在有限个尖点上的三次循环覆盖，就是来自 3 可除的尖点集。但是没有找到例子，也没有在这种特殊情形下证出肖刚猜想。到目前为止，肖刚关于典范映射的猜想仍然没有得到解决。

上述结果是我 1989 年硕士论文的主要结果。论文中循环三次覆盖典范解消的结果发表在 1991 年的《中国科学》（中文、英文）上。

1999 年，我在以色列访问，有一天我看到德国数学家 Barth 于 1998 年发表的一篇文章，他证明：K3 曲面上最多有 9 个尖点，正好 9 个时，它们是 3 可除的。这就是上面提到的结果 2）。我把没有发表的结果整理出来发给他，他来信说他们对我用三元编码研究尖点个数的方法很感兴趣，他和他的学生们在之后的研究中就是采用了这个方法。我的相关成果一直没有发表，他们就只好引用我整理出来的预印本。Barth 写了一篇文章，介绍代数曲面上结点和尖点的研究在编码理论中的应用。

5. 博士研究生学习阶段

1989 年 9 月，我免试直升进入博士研究生的学习阶段。肖老师正在为上海科技出版社撰写一本《代数曲面的纤维化》的专著，他用自己汉化的 TeX 软件写作，打印出来的书稿就像正式出版的一样。他给了我几页书稿，是他关于代数曲面纤维化的基变换的一个猜想，希望寻找纤维化的不变量在基变换下的变化规律，就是要证明一个不等式，希望我把它作为博士期间的研究问题。我在下面提及的“肖刚猜想”都是指这个猜想。

肖老师对二次覆盖、基变换和代数曲面的自同构群进行了大量复杂的计算，并能从中找出规律，进一步发现出更一般的定理，这样取得的成果往往是人们意想不到的，创新性非常强。他的这种精神对我的影响很大，碰到需要复杂计算的问题时，我也不会回避，甚至期待有惊喜出现。

肖刚猜想涉及到 n 次循环覆盖 $z^n = f(x,y)$ 产生奇点的不变量的计算，他在普林斯顿时已经做过大量计算，相关结果发表在德国的《数学杂志》上。我继续了计算，这些计算对我的研究工作有非常大的帮助。

我在研究肖刚猜想的同时，也很关注典范次数问题的研究。在硕士论文中已经知道，要构造典范次数为 3 的第二类代数曲面的例子，我们需要构造 3 可除的尖点集。

一个例子突然让我觉得要仔细研究，就是三次曲面上的三个尖点一定是 3 可除的，我是用编码理论证明该结论的，并且知道这样的曲面的方程很简单，可以化为 $z^3 = \ell_1\ell_2\ell_3$，分歧曲线是 3 条直线 L_1, L_2, L_3，它们围成一个三角形，三个尖点来自三角形的三个顶点。当时就想到

问题：能否不用编码理论直接证明 3 个尖点是 3 可除的？

由于循环三次覆盖的奇点有典范解消算法，我就对它进行了计算，并且计算了 3 次曲线 $L_1 + 2L_2$ 在解消曲面上的原像，得到的结果正好是“3 个尖点是 3 可除的”，原因就是 $L_1 + 2L_2$ 的次数是 3 的倍数。

如果把三条直线换成三条二次曲线 Q_1, Q_2, Q_3, 每两条有 4 个不同交点，共有 12 个交点。由 $z^3 = q_1q_2q_3$ 构造的曲面 Σ 是平面的三次循环覆盖，分歧在三条二次曲线上，覆盖曲面上有 12 个尖点，它们也是 3 可除的，因为曲线 $Q_1 + 2Q_2$ 的次数是 6，被 3 整除，因此可以以 12 个尖点为分歧点构造 Σ 的三次循环覆盖，得到曲面 S, 它是平面的 9 次覆盖。由典范解消容易知道曲面 S 是光滑的，由不变量的计算可知曲面 S 是第一类曲面，典范映射正好是这个 9 次覆盖，意外地得到了典范次数是 9 的曲面，是一个新的例子，让我很激动。

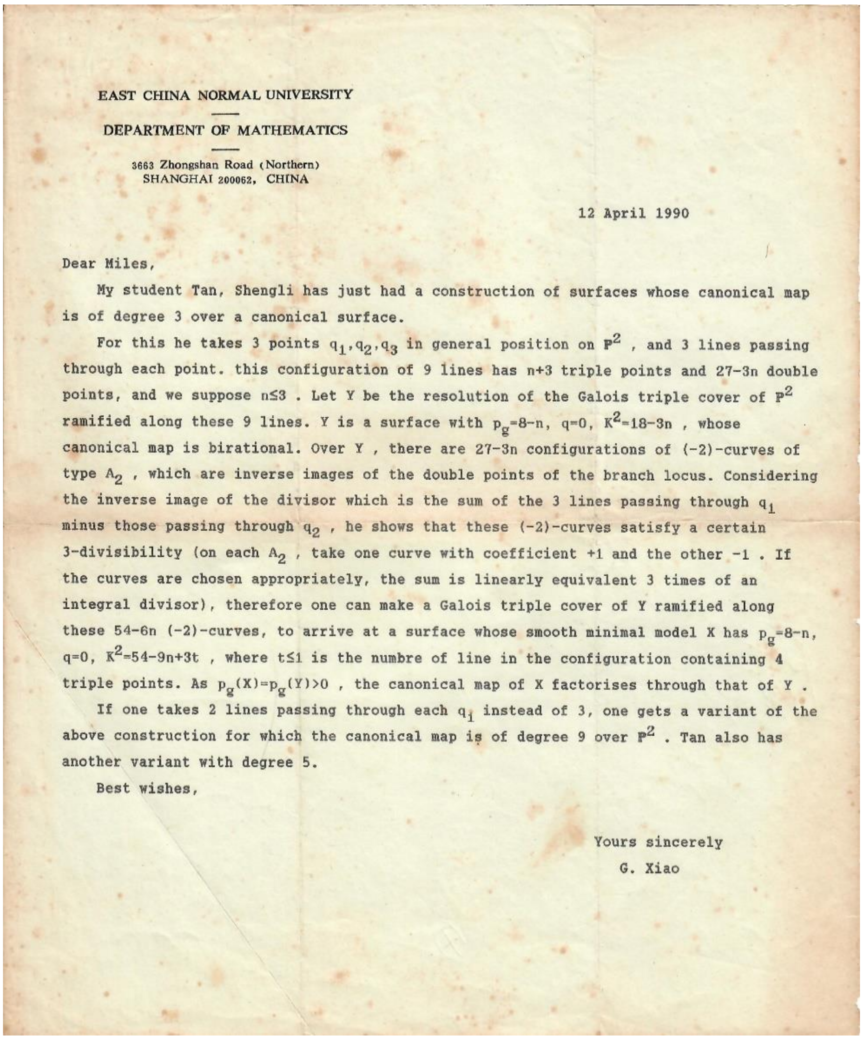
实际上我最开始的做法是在三角形的每个顶点处加一条直线，因此三条二次曲线是退化的。我立即试了试在三角形的每个顶点处加 2 条直线，共 9 条直线，有 27 个二重点（两条直线通过的点），3 个三重点（三条直线通过的点），以 9 条直线为分歧曲线的 3 次循环覆盖曲面 Σ 上有 27 个尖点，同理它们是 3 可除的，以它们为分歧点构造的三次循环覆盖曲面 S 是第二类曲面，典范映射正好是 Σ 上的三次覆盖，因此构造出典范次数为 3 的第二类代数曲面。美国的《数学评论》的评论员说，这解决了一个长期悬而未决的问题。

我并没有停止，由于花了一年的时间研究 n 次循环覆盖的奇点解消和不变量的计算，我立即试了试分歧在 5 条一般位置的直线 $L_1, \cdots, L_5$ 上的 5 次循环覆盖，$z^5 = \ell_1 \cdots \ell_5$, 分歧曲线共有 10 个交点，五次循环覆盖曲面 Σ 上有 10 个奇点，因为 $L_1 + 2\,L_2 + 3\,L_3 + 4L_4$ 的次数为 10，被 5 整除，所以 10 个奇点是 5 可除的，以它们为分歧点可以构造 Σ 的五次循环覆盖，得到光滑代数曲面 S，计算知它是第二类曲面，典范映射正好是 Σ 上的 5 次覆盖，因此也构造出典范次数为 5 的第二类代数曲面。

后来在上面构造的例子的基础上，进一步发现了一个第一陈省身数为 5，几

何亏格为 0 的一般型代数曲面，这也是当时人们试图寻找的新例子。再试了试更高次数的覆盖，没有发现有趣的例子。

我向肖老师、陈老师汇报了结果，当时他们一致认为计算正确，肖老师还告诉我线性系计算的一个技巧，可以简化计算。第二天，肖老师给了我他写给几位同行的一封信（当时还没有电子邮件），信的内容是介绍我构造的例子。信中对 9 条直线的例子做了一点变动，使得三重点的个数可以超过 3 个，结论还是不变，例子更多了。他告诉我，我可以用这些例子作为博士论文的结果，提前一年毕业。并让我先把论文写出来，投出去发表。听到这个消息，我非常高兴。


EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

3663 Zhongshan Road (Northern)
SHANGHAI 200062, CHINA

12 April 1990

Dear Miles,

My student Tan, Shengli has just had a construction of surfaces whose canonical map is of degree 3 over a canonical surface.

For this he takes 3 points q_1, q_2, q_3 in general position on $\mathbb{P}^2$, and 3 lines passing through each point. this configuration of 9 lines has n+3 triple points and 27-3n double points, and we suppose $n \le 3$. Let Y be the resolution of the Galois triple cover of $\mathbb{P}^2$ ramified along these 9 lines. Y is a surface with $p_g=8-n$, $q=0$, $K^2=18-3n$, whose canonical map is birational. Over Y, there are 27-3n configurations of (-2)-curves of type A_2, which are inverse images of the double points of the branch locus. Considering the inverse image of the divisor which is the sum of the 3 lines passing through q_1 minus those passing through q_2, he shows that these (-2)-curves satisfy a certain 3-divisibility (on each A_2, take one curve with coefficient +1 and the other -1. If the curves are chosen appropriately, the sum is linearly equivalent 3 times of an integral divisor), therefore one can make a Galois triple cover of Y ramified along these 54-6n (-2)-curves, to arrive at a surface whose smooth minimal model X has $p_g=8-n$, $q=0$, $K^2=54-9n+3t$, where $t \le 1$ is the numbre of line in the configuration containing 4 triple points. As $p_g(X)=p_g(Y)>0$, the canonical map of X factorises through that of Y.

If one takes 2 lines passing through each q_i instead of 3, one gets a variant of the above construction for which the canonical map is of degree 9 over $\mathbb{P}^2$. Tan also has another variant with degree 5.

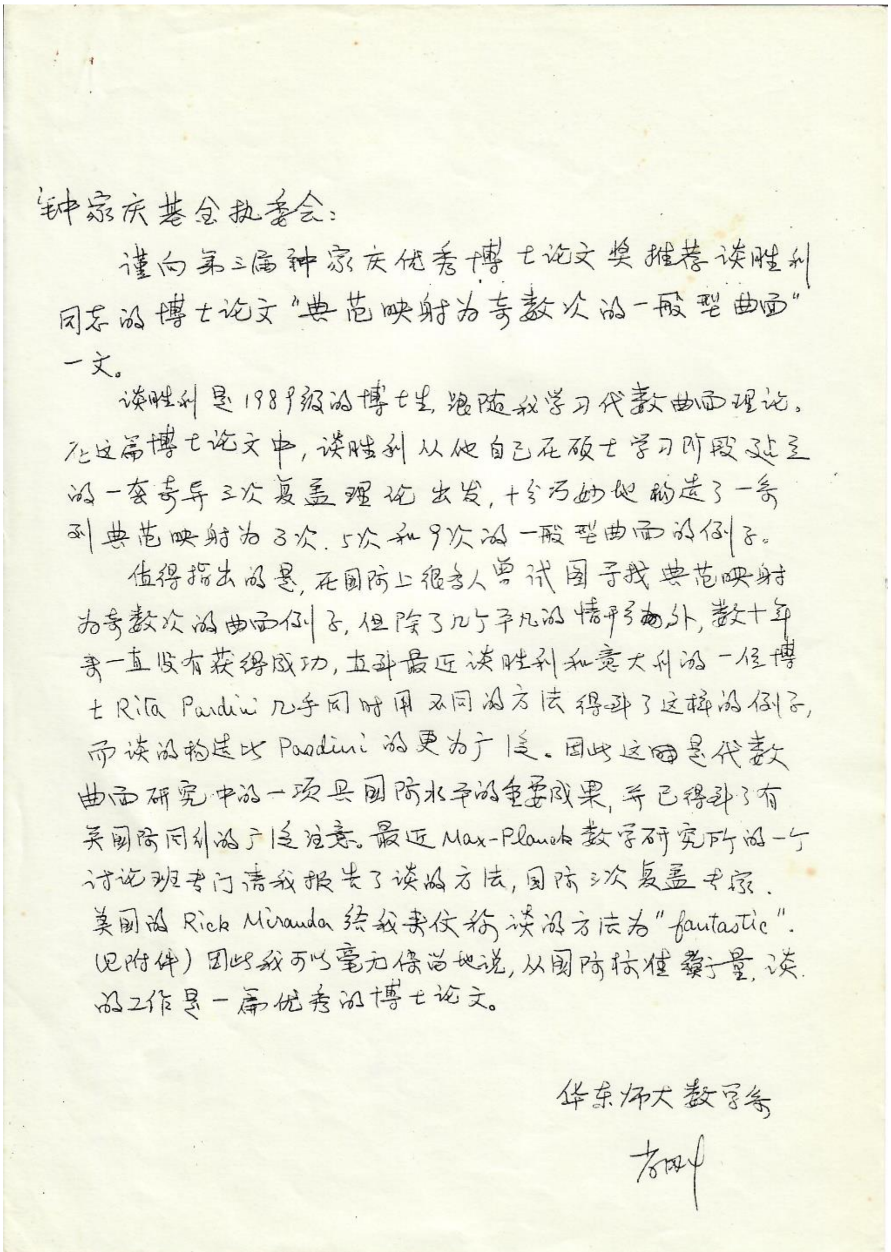
Best wishes,

Yours sincerely
G. Xiao

我们虽然学过计算机编程软件，但很少接触计算机，因此我要先学会使用计算机软件 WPS 输入文件，还要学会肖老师汉化的中文 TeX，第三是要学会肖老师自己编写的画图软件 TeXdraw，我花了几个月打印好了论文，原来的题目是《具有高典范次数的代数曲面的例子》，后来肖老师把题目改为《具有奇数次典范映射的曲面》，顿时觉得题目更贴切，把例子的特点展现出来了，标题上也看不出仅仅是构造了几个例子。论文投到德国的《数学年刊》，希策布鲁赫是编辑，很快就接受了，由于没有经验，在第一次修改时忘记感谢审稿人，第二次修改时才加上。

三次覆盖专家 Miranda 给肖老师回信说我构造的例子是三次覆盖的极好的（fantastic）应用。杨劲根教授从日本访问回来后告诉我，京都大学的森重文（Mori）说看过我的论文，知道上海开始有研究代数几何的学生。在投稿论文第二次修改时，英国的 Reid 寄来了意大利 Pardini 的论文预印本，她用阿贝尔覆盖的方法也构造出典范次数为 3 的第二类代数曲面的例子，我立即把这篇文章加到了参考文献中，代数组的邱森教授鼓励我说，这说明我研究的大方向是正确的。最近的论文引用这些例子时，都会说现在已经是众所周知的例子。

肖老师于 1991 年初去德国马普所访问，没有参加我的博士论文答辩，我很幸运，博士的两年时间里，几乎每天可以与肖老师和陈老师见面，接受指导，没有走弯路。3 月 8 日，他来信让我把有关论文初稿寄给他，包括三次覆盖的计算公式，他准备在马普所介绍一下我的工作。我毕业后留校任教。在肖老师和陈老师的推荐下，论文获得钟家庆数学奖，光明日报等报纸发布了新闻。


钟家庆基金执委会：

谨向第三届钟家庆优秀博士论文奖推荐谈胜利同志的博士论文“典范映射为奇数次的一般型曲面”一文。

谈胜利是1989级的博士生，跟随我学习代数曲面理论。在这篇博士论文中，谈胜利从他自己在硕士学习阶段建立的一套奇异三次复盖理论出发，十分巧妙地构造了一系列典范映射为3次、5次和9次的一般型曲面的例子。

值得指出的是，在国际上很多人曾试图寻找典范映射为奇数次的曲面例子，但除了几个平凡的情形之外，数十年来一直没有获得成功，直到最近谈胜利和意大利的一位博士 Rita Pardini 几乎同时用不同的方法得到了这样的例子，而谈的构造比 Pardini 的更为广泛。因此这是代数曲面研究中的一项具国际水平的重要成果，并已得到了有关国际同行的广泛注意。最近 Max-Planck 数学研究所的一个讨论班专门请我报告了谈的方法，国际三次复盖专家、美国的 Rick Miranda 给我来信称谈的方法为“fantastic”.（见附件）因此我可以毫无保留地说，从国际标准衡量，谈的工作是一篇优秀的博士论文。

华东师大数学系

肖刚

我国数学研究后继有人
三位博士获第三届钟家庆数学奖

新华社北京5月27日电 （科技日报记者范建　新华社记者张锦胜）我国3位青年博士今日荣获第三届钟家庆数学奖。以著名数学家杨乐、张恭庆、龚升、肖树铁组成的“钟家庆基金执行委员会”认为，这三位青年学者在纯数学和应用数学方面具有的创造性研究成果和突出学术业绩表明，我国数学事业后继有人。

中国科学院系统科学研究所35岁的博士朱力行，在《投影寻踪拟合优度检验的概率不等式及其它》获奖论文中，运用近代统计学报为重视的投影寻踪这种新的统计方法，丰富和改进了已有的结果，并给出“尾部概率一个相当精确的上、下界估计”，否定了世界著名统计学家赫伯的一个猜测。这项研究具有明显的实用价值和理论意义。因此，使我国在这个领域里的研究处于世界领先地位。

从事数论研究的中国科学院数学研究所29岁的博士陈永安，在《关于丢番图逼近中的一个猜想》获奖论文中，给出了更便于研究的等价形式。他还在国内外权威刊物上发表一系列卓有见地的学术论文，其创造性成果意义重大。

专攻代数几何论的上海华东师范大学数学系29岁的博士谈胜利则独辟蹊径，他的获奖论文《具有奇次数典范映射的曲面》，巧妙构造了一系列典范映射为奇次数的一般类型代数曲面，解决了代数几何学家们近年来试图寻找而没有成功的问题。这一成果引起国内外同行的普遍关注。

被3位博士称为“能有开花结果日，全靠园丁栽培”的导师、著名数学家成平、王元、肖刚说，愿培养选拔优秀年轻数学人才为宗旨的“钟家庆数学奖”发现更多的后起之秀。

6. 肖刚研究代数曲面纤维化的背景介绍

代数曲面纤维化的研究一方面是由于代数曲面分类理论的需要，另一方面又受到数论丢番图问题研究的很大影响。实际上，庞加莱在 1891 年就建议用代数曲面纤维化的理论研究常微分方程，近年来该研究也有很大进展。纤维化不变量的系统研究是肖刚发展起来具有华东师大特色的研究，对中国代数几何的发展有很大的影响，值得介绍一下这些研究的背景。

一、参数曲线与代数曲面纤维化。代数曲面纤维化不变量的研究是肖老师的特色研究之一，大致上说是用代数曲面中的参数曲线的不变量研究代数曲面的不变量，起源于诺特、庞加莱等人在十九世纪发展的一套方法。给定一个代数曲面，

$$X:\quad f(x,y,z)=0\,,$$

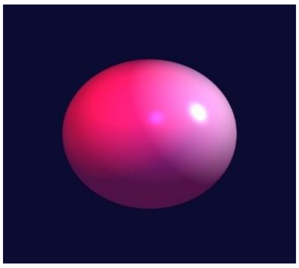
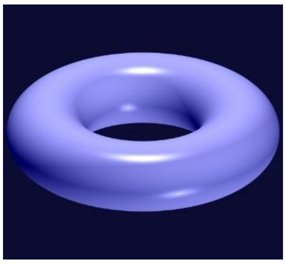
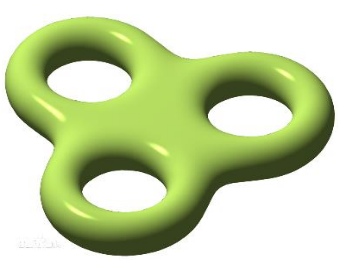
如果把一个变量看作参数，比方说，$z=t$，固定参数 t，上述方程就定义了一条平面曲线，

$$C_t:\quad f(x,y,t)=0\,,$$

它是代数曲面 X 和平面 $z=t$ 的交线。代数曲面就被分解成参数曲线的并。

十九世纪中叶，黎曼用代数函数（复平面 $\mathbb{C}$ 的有限次数的覆盖）和黎曼曲面的方法，对代数曲线进行了精细分类，引进了数学上的第一个拓扑不变量“亏格”，对固定亏格的代数曲线建立了漂亮的分类理论，即曲线模空间理论。

紧黎曼曲面的图形是带有若干个洞的曲面，洞的个数就称为黎曼曲面的亏格。

光滑代数曲线就是黎曼曲面。通过坐标的二次变换，任何奇异代数曲线都可以变为唯一条光滑代数曲线，其亏格也称为原代数曲线的亏格。（注：我们所说的代数曲线是复数域上的“曲线”，真实图形是 2 维的，即通常的曲面。同理，代数曲面是复数域上的“曲面”，真实图形是 4 维的。）直线、二次曲线的亏格总为 0，光滑三次曲线的亏格为 1，奇异三次曲线的亏格为 0，对任何代数曲线，诺特建立了其亏格的计算公式。

庞加莱等人为了推广黎曼的定理到代数曲面，就将代数曲面分解成参数曲线的并，以便利用代数曲线分类的深刻理论。

黎曼曲面是代数曲线好的模型，代数曲面纤维化是参数曲线好的模型，它可以这样得到，首先去掉参数曲线的公共分支，使得参数曲线没有公共的曲线，这时参数曲线最多只有有限个公共交点，称为参数曲线的“基点”，通过对这些基点做二次变换，可以使得不同参数对应的曲线不相交，我们就得到好的模型，即代数曲面纤维化

$$f\colon\ S \to B\ ,$$

它是代数曲面 S 到代数曲线 B 的满的全纯映射，参数 $t \in B$ 的原像 F_t 是参数对应的曲线，称为纤维化的纤维，除了有限条纤维是奇异曲线外，其它的纤维都是光滑的，具有相同的亏格 g，称为纤维化的亏格，也是原始参数曲线的一个不变量。亏格 0 的纤维化称为有理纤维化，曲面称为直纹曲面。亏格 1 的纤维化称为椭圆纤维化，曲面称为椭圆曲面。

代数曲面 S 本身有不变量，比如，陈省身数 $c_1^2(S),\ c_2(S),\ \chi(\mathcal{O}_S)$，小平维数 $\mathrm{Kod}(S)$，多重几何亏格 $p_n(S)$ 等。并有诺特公式 $c_1^2(S)+\ c_2(S)=12\chi(\mathcal{O}_S)$. 宫冈-丘成桐不等式就是 $c_1^2(S)\le 3c_2(S)$，等价地，$c_1^2(S)\le 9\chi(\mathcal{O}_S)$，除了几类有比较好分类的曲面外，其它代数曲面都满足这个不等式。

1960 年代，黎曼的光滑代数曲线分类理论得到了很大的发展，分类被推广到“半稳定”奇异曲线，黎曼的曲线模空间得到了“紧化”（相当于把黎曼原来的模空间的无穷远点也加进来了），导致参数曲线的一些新的不变量被发现，当时还没有人给这些不变量取名字，我就称它们为“模不变量”（因为它们来自模空间和模函数），最重要的模不变量是纤维化的陈省身数 $c_1^2(f),\ c_2(f),\ \chi(f)$，分别由模空间中的三个除子类定义，芒福德（D. Mumford）类 $\kappa=12\lambda-\delta$，边界类 δ，霍奇（Hodge）类 λ，我在以前的文章中，用 $\kappa(f),\ \delta(f),\ \lambda(f)$ 表示这些不变量，仅简单地称它们为纤维化的模不变量。在后来的研究中发现，这些不变量可以推广到常微分方程，称为微分方程的“陈省身数”，为了统一，我后来就改称它们为纤维化（或者参数曲线）的陈省身数。

陈数都是非负有理数，衡量了光滑纤维之间的差别，也自动满足诺特公式，

$$c_1^2(f)+c_2(f)=12\,\chi(f)\,.$$

1990 年代初，F. Serrano 引进了纤维化的一种新的典范除子，我称它为模典范除子 $K(f)$，利用这个除子，它定义了纤维化的小平维数 $\mathrm{Kod}(f)$，多重几何亏格 $p_n(f)$，这些不变量没有引起人们的足够重视，后来也被推广到了常微分方程，才引起人们的注意。

有理纤维化的陈省身数都是 0，椭圆纤维化的陈省身数的计算公式是日本代数几何学家小平邦彦（K. Kodaira）在 1960 年代找到的，他对椭圆曲面的研究成果也是他获得菲尔兹奖的成果的一部分。之后人们开始寻找亏格 2 纤维化的陈省身数的计算公式，这时的代数曲面是直纹曲面的二次覆盖，有定义方程 $z^2 = f(x,y)$，日本数学家 Horikawa 和肖刚分别找到一个陈省身数的计算公式，这为肖刚分类亏格 2 纤维化曲面提供了工具。

二、参数曲线与数论中丢番图问题。数论中的丢番图问题是要研究一条代数曲线上有多少有理点和整数点的问题，比如，费马大定理说 $n \geq 3$ 时方程 $X^n + Y^n = Z^n$ 没有正整数解，即代数曲线 $x^n + y^n = 1$ 上没有坐标是正有理数的点，注意该费马曲线是光滑的，亏格为

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

考虑一般的整系数不可约多项式 $f(x,y) = \sum_{i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j$,

$$f(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \cdots + a_{0n}y^n\,,$$

系数 a_{ij} 都是整数。$f(x,y) = 0$ 定义的曲线 C 上也有有理点个数的问题。如果平面上点 P 的坐标都是有理数，那么就称它为有理点。莫德尔（Mordell）提出了一个著名猜想，

莫德尔猜想：亏格至少为 2 的曲线上有理点的个数有限。

有理点的坐标可以写为 $P = \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$，其中 a, b, c 是没有公因子的整数。可以定义有理点的高度

$$h(P) = \max\{\,|a|,\ |b|,\ |c|\,\},$$

数论学家希望建立亏格 $g \geq 2$ 的代数曲线 C 上有理点的“高度不等式”，即寻找只依赖与 C 的常数 H，使得 C 上的有理点 P 都满足不等式

$$h(P) \leq H\,.$$

如果高度不等式找到了，莫德尔猜想就证明了。如果还可具体求出常数 H，那么费马大定理也可以验证了。

另一方面，参数曲线上也有丢番图问题。将参数曲线的定义多项式改写为

$$f(x,y,t) = \sum_{i+j \leq n} a_{ij}(t) x^i y^j\ ,$$

系数 $a_{ij}(t)$ 是复系数多项式，多项式定义了有理函数域 $\mathbb{C}(t)$ 的代数闭域 K 上的一条代数曲线，此时有理点为 $P = \left(\frac{a(t)}{c(t)}, \frac{b(t)}{c(t)}\right) \in K^2$， 其中 $a(t), b(t), c(t)$ 是没有公因式的多项式，P 的高度定义为

$$h(P) = \max\{\,\deg a(t),\ \deg b(t),\ \deg c(t)\,\},$$

有理点 P 落在曲线上的意思是

$$f\left(\frac{a(t)}{c(t)},\frac{b(t)}{c(t)},t\right)\equiv 0.$$

参数曲线的亏格至少为 2 时，也有莫德尔猜想：其上有理点的个数有限。

整数与一个变量的多项式有很强的相似性，比如都有因式分解，都有辗转相除法。与参数曲线类比，丢番图问题中的参数是素数

$$p\in \operatorname{Spec}\mathbb{Z}=\{\,2,\ 3,\ 5,\ 7,\cdots\},$$

也有纤维化 $\pi\colon C\to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$，这时就把 C 理解为“算术曲面”。参数 p 所对应的纤维是方程模 p 的解集，

$$C_p=\left\{\,(x,y)\in \mathbb{F}_p^2\ \ :\ \ f(x,y)\equiv 0\mod p\right\}.$$

人们希望在参数曲线的情形先证明莫德尔猜想，即建立参数曲线上有理点的高度不等式。然后，将证明方法推广到数论的情形，如果成功，那么数论上将有高度不等式，一些重大的数论问题就迎刃而解，比如著名的 ABC 猜想。

1960 年代，前苏联的 S. Arakelov（阿拉克洛夫），P. S. Parshin（帕尔辛）等人发现，参数曲线高度不等式问题，是代数曲面纤维化 $f\colon\ S\to B$ 的陈省身数的计算问题，可以归结为建立陈省身数 $c_1^2(f)$ 或者 $\chi(f)$ 的上界不等式。因此希望寻找纤维化的陈省身数的计算公式。

问题：给出纤维化的陈省身数 $c_1^2(f)$ 和 $\chi(f)$ 的计算公式。

数论中的丢番图问题与参数曲线的丢番图问题也有本质的差别，数论中的参数是素数，是离散的，参数曲线中的参数是复数，是连续的，后者可以定义“微分” $\mathrm{d}t$，前者没有相应的定义，这也是目前碰到的最大困难。要克服这种困难，我们研究的不变量要尽量不依赖于参数。纤维化的陈省身数 $c_1^2(f)$ 和 $\chi(f)$ 就是不依赖于参数的不变量，可以在数论中使用，数论学家称 $\chi(f)$ 为法尔廷斯（G. Faltings）高度。

参数曲线 C_t 的定义方程是由多项式 f_t 给出的，多项式有因式分解

$$f_t=g_1^{n_1}\cdots g_k^{n_k},$$

对应的曲线就可以写成一些分支的相加，$C_t=n_1\Gamma_1+\cdots+n_k\Gamma_k$，如果这些分支的重数都为 1，$n_1=\cdots=n_k=1$，且 $C_t=\Gamma_1+\cdots+\Gamma_k$ 的奇点都是最简单的奇点，称为结点（两个光滑分支正常相交产生的奇点），就称曲线 C_t 是半稳定的。如果纤维化 $f\colon\ S\to B$ 的所有奇异纤维都是半稳定的，那么就称纤维化是半稳定的。

半稳定纤维化的陈省身数可以由曲面的陈省身数来计算，

$$c_1^2(f)=K_f^2=:c_1^2(S)-8(g-1)(b-1),$$

$$c_2(f)=e_f\coloneqq c_2(S)-4(g-1)(b-1),$$

$$\chi(f)=\Delta_f:=\chi(\mathcal{O}_S)-(g-1)(b-1).$$

这里 g 是纤维化的亏格，即光滑纤维的亏格，b 是纤维化的底曲线 B 的亏格。后

来人们把右边式子定义的不变量 K_f^2 ,e_f ,Δ_f 称为纤维化的相对不变量。当纤维化是半稳定时，只要研究相对不变量即可，这时 e_f 的计算非常简单，它就是奇异纤维中奇点个数的总和。

对半稳定纤维化，Arakelov 和 Vojta 分别建立了以下的不等式，

$$\Delta_f \le \frac{g}{2}(2b-2+s),$$

$$K_f^2 \le (2g-2)(2b-2+s).$$

称为 Arakelov **不等式**和**典范类不等式**，这里 s 是纤维化奇异纤维的条数。

肖刚在 1987 年对任意纤维化（不要求半稳定）建立了著名的**斜率不等式**，

$$K_f^2 \ge \frac{4g-4}{g}\Delta_f\ ,$$

当 $\Delta_f \neq 0$ ，$g \ge 2$ 时，肖刚将 $\lambda_f = \frac{K_f^2}{\Delta_f}$ 称为纤维化的斜率，它在 2 和 12 之间。由此可知，斜率不等式加上典范类不等式可以推出 Arakelov 不等式。特别地，

$$2\chi(f) \le c_1^2(f) \le 12\,\chi(f)\ ,$$

所以 $c_1^2(f)$ 和法尔廷斯高度 $\chi(f)$ 是等量的“高度”。

代数曲面纤维化的理论被推广到算术曲面，称为 Arakelov 理论。纤维化的陈省身数、奇异纤维的条数、底曲线的亏格等在算术曲面上都有对应的定义。

7. 肖刚猜想的解决

一、肖刚猜想。在建立半稳定曲线的模空间理论时，德利涅（P. Deligne）和芒福德证明通过适当的参数变换，$t=\pi(s)$，可以使参数曲线在新的参数下变为半稳定的参数曲线，

$$f\big(x,y,\pi(s)\big)=0\,,$$

这里 $\pi(s)$ 是新参数 s 的 n 次多项式。用纤维化的语言，就是存在适当的 n 次覆盖 $\pi\colon \widetilde{B} \to B$，称为 n 次**基变换**，可以使得纤维化 $f\colon\ S \to B$ 在基变换下的拉回纤维化 $\tilde{f}\colon\ \widetilde{S} \to \widetilde{B}$ 是半稳定的，纤维化的亏格保持不变。这个过程称为纤维化的**半稳定约化**。如果不要求拉回的纤维化是半稳定的，就称拉回的纤维化是原来纤维化的基变换。

大概从 1986 年起，肖刚就开始从不变量的角度研究半稳定约化。他找到了一个只依赖于亏格 g 的整数 N_g ，并证明对任何亏格 g 的纤维化，存在次数不超过 N_g 的基变换，使得拉回纤维化是半稳定的，后来有人举例说明 N_g 是最佳的。然后，肖刚开始研究下述自然的问题，

问题：纤维化 $f\colon\ S \to B$ 的不变量在 n 次基变换下的拉回是如何变化的？

陈省身数不依赖于参数，在任何基变换下成倍增长，

$$c_1^2(\tilde{f}) = nc_1^2(f), \qquad c_2(\tilde{f}) = nc_2(f), \qquad \chi(\tilde{f}) = n\chi(f)\,.$$

肖刚经过复杂的计算，发现两个相对不变量满足下述不等式关系，

$$K_{\tilde{f}}^2 \le nK_f^2, \qquad \Delta_{\tilde{f}} \le n\Delta_f\,,$$

他在专著《代数曲面的纤维化》中给出了详细证明，并猜想剩下的相对不变量也满足不等式关系，

猜想（肖刚）：$e_{\tilde{f}} \le ne_f$.

这就是肖老师给我的博士论文题目。

二、肖刚猜想的证明。留校后，我继续研究肖刚猜想。相对不变量 e_f 涉及到曲面的第二陈省身数 $c_2(S)$，它是一个纯粹的拓扑不变量，所以基变换的计算中涉及到循环覆盖产生的奇点的拓扑不变量的估计，比如，奇点的米尔诺（Milnor）数。计算异常复杂，我的一个师弟说帮我计算，我把厚厚一叠手稿拿给他，他一看有 90 多页，马上说算了，你应该快算出来了。经过一年的研究，终于证明了肖刚猜想。在讨论班上我介绍过证明过程，大家都觉得证明应该没有问题。1992 年暑假我写信给在巴黎访问的肖老师，告诉他证明的思路。

肖老师回信说，证明思路很好，特别是使用米尔诺数是个很漂亮的想法，但需要证实，请杨劲根老师看看证明是否正确。杨老师研究过有限覆盖的奇点，对我的证明提了不少建议，并认为我直接从几何上看出循环覆盖的正规化是个有用的方法。后来与张德琪合作计算正规化时再次避免了代数计算。

肖老师在回信中还说，这是这个问题研究的第一步，以后需要做下去，他建议了两个待研究的问题，

问题 1：求出三个不等式两边的差，即计算

$$K_f^2 - \frac{1}{n}K_{\tilde{f}}^2, \qquad e_f - \frac{1}{n}e_{\tilde{f}}, \qquad \Delta_f - \frac{1}{n}\Delta_{\tilde{f}}\,.$$

问题 2：对高亏格情形的奇异纤维进行分类。

由此可知，肖老师从量的角度研究半稳定约化是有全盘计划的。

1960 年代，小平邦彦对亏格 1 的奇异纤维进行了分类，共 8 类，并计算了每一类纤维对陈省身数的贡献，从而得到陈省身数的计算公式，第一陈数总为 0，$c_1^2(f) = 0$，第二陈数 $c_2(f)$ 是光滑纤维 F_t 的 j-函数 $j(t) = j(F_t)$ 关于参数的次数，j-函数是一个模函数，来自椭圆曲线的 j-不变量。小平邦彦还用奇异纤维给出了第二个计算公式，

$$\begin{aligned} c_2(f) = c_2(S) &- 0\nu(\mathrm{I}) - 2\nu(\mathrm{II}) - 3\nu(\mathrm{III}) - 4\nu(\mathrm{IV}) \\ &- 6\nu(\mathrm{I}^*) - 10\nu(\mathrm{II}^*) - 9\nu(\mathrm{III}^*) - 8\nu(\mathrm{IV}^*)\,. \end{aligned}$$

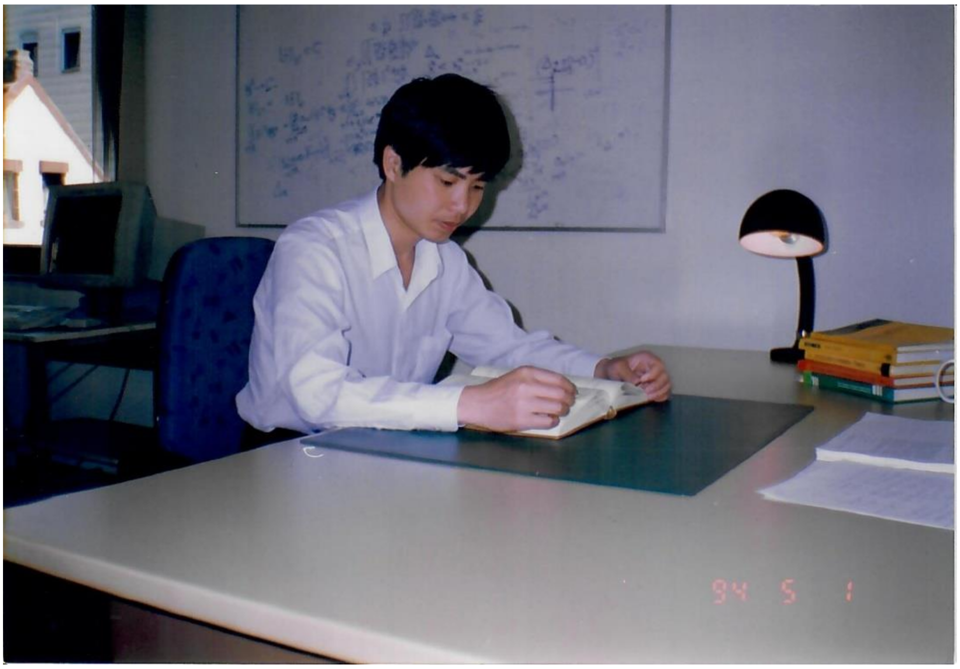
在随后的十多年里，几位日本数学家对亏格 2 的奇异纤维进行了分类，共有 100 多类，由于种类太多，无法像亏格 1 时那样找到陈省身数的计算公式。后来，Horikawa 和肖刚利用二次覆盖，依据对不变量的贡献，简化了奇异纤维的分类，

只剩下 5 大类，然后利用二次覆盖不变量的计算公式，计算出每一类纤维对陈省身数的贡献，从而发现了陈省身数和相对不变量的计算公式。

后来，有人试图分类亏格 3 的奇异纤维，发现至少有 3000 多种。用这种方式寻找不变量的计算公式已经不现实。肖刚的计划是试图通过研究奇异纤维对整体不变量的贡献来做分类。

8. 在德国马普所的访问：参数曲线不变量公式的发现与数论应用

1993 年 10 月 15 日，我在入境签证到期前几个小时进入德国，开始了在波恩马普所为期一年的访问。前几年的大量计算开始得到回报。



马普所的所长是希策布鲁赫，他对代数曲面的研究贡献很大，由于他的大力推动，代数曲面是当时非常活跃的研究领域。他用有限覆盖研究平面上的直线排列，就是以这些直线为分歧曲线，构造特殊的有限覆盖，计算覆盖曲面的陈省身数，利用宫冈-丘成桐不等式 $c_1^2(S) \leq 3c_2(S)$，找到了直线排列中“多重点”个数的一个非平凡不等式，构造了几个使等式 $c_1^2(S) = 3c_2(S)$ 成立的代数曲面，由丘成桐的定理，这样的曲面是球商曲面，当时知道的例子很少。宫冈在马普所访问期间将宫冈-丘成桐不等式推广到带奇点的代数曲面，就是 $3c_2(S) - c_1^2(S)$ 大于等于奇点的贡献量，它的一个应用就是对空间曲面上的奇点个数给出了一个上界估计。希策布鲁赫写了一个预印本介绍如何计算奇点的贡献量，我在硕士研究生阶段已经读过这篇文章。

到研究所报道的当天，所长让秘书把我叫到他的办公室，先问我住在哪里，是不是第一次离开中国，12 生肖中我是属什么的，等等，我的紧张情绪一下轻松下来了。后来问我当时在研究什么问题，我说在研究肖刚的基变换问题，也在研究博维尔关于奇异纤维个数的一个猜想。他向我介绍了当时在马普所访问的研究代数几何的几个人，并说 Serge Lang 过一段时间要到访，他对代数曲面纤维化非常感兴趣，让我和他多交流。

在马普所访问的数学家，来自不同国家，不同方向，从学术报告，平常的交流，很容易了解到其它方向的最新进展，很多和我年龄差不多的国外数学家都是在马普所认识的。波恩大学的物理学家 Werner Nahum 在马普所有讨论班，也有国内的物理学家到访马普所，比如理论物理所的郭汉英教授。陈省身先生在南开大学召开了一次纪念周炜良和陈国才的学术会议，邀请了阿蒂亚作报告，他花了半小时介绍 Nahum 方程。Nahum 的夫人把到访马普所的客人的夫人召集起来，每周搞几次交流活动，在那里又认识了一些人。

一、发现纤维化的陈省身数的计算公式。在波恩期间，全部的精力都在研究肖刚提出的问题 1，寻找计算公式。有几天晚上通宵计算，白天睡觉，德国冬天的白天时间短，连续几天几乎没有见到阳光。最后终于算出结果，感觉算透彻了。

当基变换是半稳定约化时，拉回的纤维化是半稳定的，这时相对不变量就是陈省身数，它是成倍增长的，问题 1 要计算的量就是

$$K_f^2 - c_1^2(f), \qquad e_f - c_2(f), \qquad \Delta_f - \chi(f),$$

我完全计算出每条奇异纤维 F 对它们的贡献量 $c_1^2(F)$, $c_2(F)$, $\chi(F)$，假设有 s 条奇异纤维 $F_1, \cdots, F_s$，我实际上得到了纤维化的陈省身数的计算公式，

$$c_1^2(f) = c_1^2(S) - 8(g-1)(b-1) - \sum_{i=1}^{s} c_1^2(F_i),$$

$$c_2(f) = c_2(S) - 4(g-1)(b-1) - \sum_{i=1}^{s} c_2(F_i),$$

$$\chi(f) = \chi(\mathcal{O}_S) - (g-1)(b-1) - \sum_{i=1}^{s} \chi(F_i).$$

当时我并没意识到这实际上解决了纤维化研究中的一个非常重要的基本问题。亏格 1 时我们的公式正好是小平邦彦的著名公式，接下来的 30 多年中，人们一直在寻找亏格至少为 2 时这样的公式，推广小平邦彦的结果。我把上面右边的量分别记为 $I_K(f)$, $I_e(f)$, $I_\chi(f)$，因为它们刻划了纤维化的 isotrivial 性质，我就选择了第一个字母 I 来表示。到了 1998 年，我在研究曲线模空间的斜率猜想时才意识到它们就是人们关心的模不变量。到 2008 年，看到小平邦彦的公式后，才意识到公式的重要性，是人们一直在寻找的公式。不过，这并不影响我用公式解决其它问题。

我没有对奇异纤维的量 $c_1^2(F)$, $c_2(F)$, $\chi(F)$ 给出名字，从用的符号可以看出，我实际上是想把它们称为奇异纤维的陈省身数。亏格 1 时的 8 类纤维的陈数都可直接算出。对亏格大于 1 的奇异纤维，证明了它们的一些有趣性质，比如，

1）**（半稳定性的判别法）** 陈数都是非负有理数，其一为 0 当且仅当奇异纤维是半稳定的。

2）**（诺特公式）** $c_1^2(F) + c_2(F) = 12\,\chi(F)$.

3）**（宫冈-丘成桐不等式）** $c_1^2(F) \le 2c_2(F)$，等价地，$c_1^2(F) \le 8\,\chi(F)$，并且分类了等号成立的纤维。

4）**（典范类不等式）** $c_1^2(F) \le 4g-4$.

5）**（斜率不等式猜想*）** $c_1^2(F) \ge \chi(F)$.

这些计算导致了一些意想不到现象的发现，比如，由于奇异纤维的斜率不超

过 8，对任何斜率大于 8 的纤维化，如果它不是半稳定的，那么半稳定约化后，斜率一定严格增加。作为奇异纤维典范类不等式的一个应用，我将半稳定情形的典范类不等式推广到任意情形，只要把奇异纤维个数 s 换成 $3s$ 即可，

$$K_f^2 \leq (2g-2)(2b-2+3s).$$

结合肖刚的斜率不等式，也可将 Arakelov 不等式推广到非半稳定的情形，

$$\Delta_f \leq \frac{g}{2}(2b-2+3s).$$

评注：这项工作发表在德国的《数学杂志》上，杂志不是顶级杂志，标题也不吸引人，能理解主要结果的人很少，造成后来三个国家的研究团队的重复研究。1）2002 年在上海召开的代数几何卫星会议期间，有日本数学家介绍基变换下纤维化不变量 $c_1^2(f)-2c_2(f)$ 的一个性质。2）2015 年在韩国 KIAS 参加会议期间，有人告诉我，美国有个大学建立了一个网站，推动研究稳定约化与不变量的计算，并说好像他们不知道我的公式。3）近年来，意大利一些人在研究 isotrivial 纤维化的相对不变量的计算问题，就是陈省身数都为 0 的纤维化。我们的公式本质上完全解决了这些问题。

不过我自己也是在 2008 年看到小平邦彦的公式后才意识到公式的重要性，正是由于有了这些公式，后来才将陈省身数推广到常微分方程，解决庞加莱 1891 年提出的问题，也推进了著名的雅可比猜想的研究。

二、博维尔猜想的解决。半稳定纤维化 $f\colon\ S\to B$ 的 Arakelov 不等式为

$$\Delta_f \leq \frac{g}{2}(2b-2+s),$$

左边的量大于 0，自然就有 $2b-2+s>0$，其中，b 是底曲线的亏格，s 是奇异纤维的条数。当底曲线是射影直线时，$B=\mathbb{P}^1=\mathbb{C}\cup\infty$，亏格 $b=0$，这就说明至少有 3 条奇异纤维。这些不等式可以看作是奇异纤维最小条数的估计。博维尔和 Szpiro 研究了奇异纤维最小个数问题，排除平凡纤维化 $f\colon\ F\times\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$，博维尔证明了下述定理，

定理（博维尔，1979）：如果 $f\colon\ S\to\mathbb{P}^1$ 是亏格 $g\geq 1$ 的非平凡半稳定纤维化，则奇异纤维的个数 $s\geq 4$，且个数等于 4 时，$\Delta_f=g$.

猜想（博维尔，1979）：$g\geq 2$ 时，$s\geq 5$.

定理（博维尔，1981）：$g=1,\ s=4$ 时，共有 6 类纤维化，它们对应于 6 条模曲线。(还给出了参数曲线具体的定义方程)。

用射影平面的齐次坐标来表示，其中一类的参数曲线的方程为

$$X^3+Y^3+Z^3-3tXYZ=0,$$

四条奇异曲线对应的参数是 $1,\ \omega,\ \omega^2,\ \infty$，这里 ω 是三次单位根，$\omega^3=1$. 通过因式分解知道，每条奇异曲线是由三条不共点的直线组成。

1992 年底，肖老师给了我一份代数曲面未解决问题的清单，都是他自己研究过的问题或感兴趣的问题，并在每个问题后加上了评注：非常难，难，可以研究。我是在这个清单上看到博维尔猜想的。

来德国之前，我已经在 Lang 的《Arakelov 理论引论》中了解到 Vojta 的典范类不等式，它和肖老师的斜率不等式结合起来就推出 Arakelov 不等式。博维尔自己证明： $g \geq 2,\ s=4$ 时，Arakelov 不等式等号成立，因此典范类不等式和斜率不等式的等号同时成立。

肖刚在 1987 年的文章中猜想，斜率不等式等号成立，可以推出曲面是直纹曲面的二次覆盖，这个猜想被日本的 K. Konno 证实。因此，博维尔猜想的研究归结为二次覆盖的研究，是我擅长的问题。

1994 年春天，肖老师的问题 1 解决之后，我就来计算这个二次覆盖，先是证明底下的直纹曲面很简单，就是 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$，分歧曲线也很简单，我把 4 条奇异纤维的像加到分歧曲线上，以新的分歧曲线重新构造一个二次覆盖曲面，这个代数曲面上就有一些简单奇点，再用带奇点的宫冈-丘成桐不等式，马上就得出纤维化的亏格不超过 4. 因此除了亏格 2，3，4，已经证明了博维尔猜想。我马上发电子邮件把结果告诉了在日本访问的博维尔，他在日本讲学时介绍了我的结果，几个同行马上向我要预印本，但是我没有预印本，还只是手稿，还在继续排除剩下的情形，我就传真和邮寄了手稿给他们。

后来我把新二次覆盖修改为高次覆盖，同样的技巧就排除了 2，3，4 的情形。同时构造了一个亏格 2 且有 5 条半稳定奇异纤维的例子，之前博维尔构造了一个亏格 3 的例子。将这些结果整理出来，在马普所出了预印本。

Essen 大学的 Esnault 和 Viehweg 来信要了预印本，也因此和他们建立了联系，多次互访，联合申请基金委和 DFG 的合作交流项目，对中国代数几何方向的年轻人的发展有很大的帮助。

麻省理工学院的 Kovács 也来信要了论文的预印本，他说他希望研究高维情形的奇异纤维最小个数问题。

再后来，在研究高度不等式时，继续使用高次覆盖技巧，我发现 Vojta 的典范类不等式是严格的，等号不能成立，结合肖刚的斜率不等式，Arakelov 不等式也是严格的，这就直接证明了博维尔猜想。我把这个简化版本的证明放在公开的预印本网站上。

猜想的证明发表在《代数几何杂志》上，影响明显大一些。不认识的人第一次给我发邮件，往往会说因为这项工作了解我的。

研究近复结构（辛几何）的数学家和数论学家也关心所谓的 Szpiro 问题，即半稳定纤维化的奇异纤维中奇点个数 N 的最大值问题，这样的不等式称为 Szpiro 不等式。2001 年，博维尔写了一篇短文，用肖刚的斜率不等式把我的“严格典范类不等式”改写一下就得到一个“严格 Szpiro 不等式”，

$$N = e_f < (4g+2)(2b-2+s),$$

博维尔拿他以前构造的一个例子来检验不等式，$b=0,\ g=3,\ s=5$，$N=40$，不等式为 $N<42$，已经很接近最佳估计。后来上海师大的徐万元和我合作给出了进一步的改进，结果发表在《数论杂志》上。

进一步的研究发现，奇异纤维个数还与曲面的小平维数有密接联系，比如，与 García Zamora 和武汉大学的涂玉平合作证明：曲面的小平维数非负时，$s \geq 6$，

涂玉平构造了 4 个例子，小平维数为 0，$s=6$.　与吕鑫、左康、浙江大学的于飞等合作证明：小平维数为 2 时，$s \geq 7$. 进一步合作研究发现了高维情形小平维数与奇异纤维最小个数的最佳关系，审稿人说我们“完全解决了这个经典问题”。

这些严格不等式的意义也超出了代数几何领域。1）博维尔的分类和我的严格不等式说明，Arakelov 不等式等号成立，当且仅当底曲线是模空间中的“模曲线”。2）德国的 Martin Möller 证明：法尔廷斯推广的 Arakelov 不等式等号成立，当且仅当底曲线是模空间中的“Teichmüller 曲线”。3）左康-Viehweg 证明：他们推广的 Arakelov 不等式等号成立，当且仅当底曲线是模空间中的“Shimura 曲线”。特别地，涂玉平的例子构造了 4 条“Teichmüller 曲线”，这样的例子很稀少。模空间中这些特殊曲线是数论和动力系统领域的数学家非常关注的研究对象。

“严格典范类不等式”也很有意义。刘克峰教授用微分几何的方法给出了新证明，并且发现球商曲面上的纤维化一定有奇异纤维，用多复变的语言来说，就是两维球到单位圆盘的全纯映射一定有奇点，后来莫毅明教授与合作者将这一结论推广到高维，高维球到低维球的全纯映射一定有奇点，并且有很多。

陆俊、左康和我将典范类不等式推广到高维，在 3 维时，我们发现了一个涉及到第三陈省身数的陈类不等式，引起《数学评论》的评论员的关注。

总之，博维尔猜想的研究带来的后续发展超出了我的想象，推动了几个领域奇异纤维个数问题的研究。

三、Serge Lang 猜想的解决：最佳高度不等式的建立。1994 年春天，Serge Lang 访问马普所，我去办公室拜访了他。他是用代数几何方法研究数论丢番图问题的主要推动者。他非常热情，了解到我是肖刚的学生，正在研究代数曲面纤维化后，马上建议我试试是否可以找到好的高度不等式，并告诉我他的猜想。我查了查，在假设半稳定的条件下，已经有几个高度不等式，都在竞相寻找最佳的高度不等式，

Szpiro:	$h_K(P) \leqq 8 \cdot 3^{3g+1}(g-1)^2\left(d(P)/3^g + s + 1 + 1/3^{3g}\right)$,
Vojta:	$h_K(P) \leqq (8g-6)/3\, d(P) + O(1)$,
Parshin:	$h_K(P) \leqq (20g-15)/6\, d(P) + O(1)$,
Esnault-Viehweg:	$h_K(P) < 2(2g-1)^2\left(d(P) + s\right)$,
Vojta:	$h_K(P) \leqq (2+\varepsilon)\, d(P) + O(1)$,
Moriwaki:	$h_K(P) \leqq (2g-1)\, d(P) + O(1)$,

Lang 的猜想是 $d(P)$ 的系数应该是亏格 g 的一次函数，常数项 $O(1)$ 应该具体算出来。后来我在他著的数学百科全书《数论》中找到了他的原始猜想。

也是碰巧，研究这个问题的所有工具我都准备好了，带奇点的宫冈-丘成桐不等式，半稳定约化不变量的计算等，我大概花了 10 天左右的时间就得到了不等式，花了 20 天左右的时间成文。当纤维化是半稳定时，高度不等式为

$$h_K(P) \leq (2g-1)(d(P)+s) - K_f^2,$$

如果去掉纤维化的半稳定性要求，则只要把上不等式中的 s 换成 $3s$，不等式为

$$h_K(P) \leq (2g-1)(d(P)+3s) - K_f^2.$$

Lang 对不等式非常满意，和日本九州大学的翁林等几位参加算术几何会议的人一起讨论了不等式，我对他们说的两点印象比较深，一是说常数项不仅具体算出来了，而且是负的。另一点是不要求半稳定条件，方便应用。也通过他认识了几位专家。在他 1995 年的评论性文章《莫德尔的评论，西格尔（Siegel）给莫德尔的信，丢番图几何，与 20 世纪的数学》中，作为最新成果引用了我的这篇文章，他还详细介绍了这一研究的数论意义。

1997 年，数论学家金明炯（Minhyong Kim）写了一篇题为《高度不等式和典范类不等式》的综述文章，专门分析上面的高度不等式，说从多方面来看不等式都是最佳的。对平面 d 次参数曲线，他用初等的形式表述高度不等式。

and define $h(x,y) = \text{supdeg}(p,q,r)$. Among many results on apriori bounds, we mention one, which is in many senses the sharpest [14]:

Theorem 1 *(S.-L. Tan) With the assumptions above, one has the following bound for the height of solutions in* $\mathbf{C}(t)$ *to the equation* $f(x,y,t)=0$:

$$h(x,y) \leq \frac{(d^2-3d+1)(s-1)+k}{d-3}$$

2003 年和 2004 年，我们在华东师大组织了两次本科生和研究生的代数几何暑期学校，邀请了国外多名著名数学家来上课，包括肖荫堂，张寿武，李俊，左康，Esnault，Viehweg，Moriwaki 等，当时的年轻人袁新意，张伟和国内不少老师也开了课，现在活跃在数学界的很多年轻人在暑期学校学习过。张寿武教授在课堂上说函数域上最好的不等式差不多都是谈胜利建立的。

虽然纤维化的各类最佳不等式都找到了，相关问题的研究因此停止了，但参数曲线上有理点个数问题是值得研究的问题，公式和算法可以保证给定的参数曲线上有理点都能找到，在人工智能时代，这应该是很有应用价值的数学理论，目前缺乏一个引导性的问题和应用场景，值得探究。

2019 年开始，我用微分方程的不变量完成了两个人工智能的国家项目，具体就是将陈省身数引入到博弈论的研究，给每一个博弈系统定义其不变量陈数，用不变量指导建立计算纳什均衡点的快速算法。人工智能的专家对我们的期望是，数学家要主动将理论成果转化成人工智能成果，只有这样，才有可能在人工智能领域带来颠覆性的技术革命，只是帮助他们改进算法远远不够。

9. 在意大利 ICTP 的访问：三次覆盖正规化算法的发现

1995 年 1 月 3 日，我离开德国波恩前往意大利的里雅斯特（Trieste）的国际理论物理中心（ICTP）访问。在德国研究的问题都圆满解决了，现在准备选择一个新的研究方向。

研究中心大部分访问人员是物理学家，除了听数学的学术报告，我也经常会去听听物理的报告，特别是像 Witten 这样既是物理学家也是数学家的报告。曲线模空间也是物理学家经常提的数学名词，特别是研究超弦理论的人。感觉物理

学家和数学家很不相同，他们不大关心证明过程，更注重对一个数学结论的物理解释。数学家刚刚开始注重超弦理论，他们又说理论过时了。

一、曲线模空间的斜率猜想与 K3 曲面。在一个偶然的机会我了解到曲线模空间上有一个“斜率猜想”，说是来自超弦理论，与“宇宙学常数”有关。我就去查看原始问题。对亏格 g 的曲线模空间，可以定义其斜率 s_g，

斜率猜想：$s_g \geq 6 + \frac{12}{g+1}$，等号成立，当且仅当 $g+1$ 是合数，或者 $g = 1, 2.$

计算出斜率对了解模空间的几何非常有帮助。著名数学家的多篇文章计算了斜率的值，亏格从 1 到 6，这些值分别为 12，10，9，8.5，8，47/6.

另一方面，肖刚的斜率不等式是最佳的，等号成立一般纤维是超椭圆曲线，即曲线是直线的二次覆盖。亏格 $g \geq 3$ 时，超椭圆曲线在模空间中只占少部分，组成一个真闭子集，人们就开始研究非超椭圆纤维化斜率的下界，比如陈志杰证明 $g = 3$ 时，斜率下界为 3，$g = 4$ 时，为 3.5. 这时一般的曲线是直线的三次覆盖。人们也在研究最一般的曲线形成的纤维化的斜率下界的精确值 λ_g，实际上 $s_g = 12 - \lambda_g$，因此两个方向的研究者研究的问题是一样的。研究模空间用的纤维化可以假设是半稳定的，因此斜率猜想就是计算一般纤维化的陈省身数。这个问题的研究让我注意到我定义的纤维化的不变量 $I_K(f)$, $I_e(f)$, $I_\chi(f)$ 就是纤维化的陈数。

亏格从 3 到 9，和亏格 11 的一般曲线都可以放在一个 K3 曲面中，因此我选择其中的参数曲线，计算对应的纤维化，计算其陈数和斜率，马上发现这时斜率猜想成立，并且，$g = 7$，8，9，11 时，$s_g = 6 + \frac{12}{g+1}$.

亏格 10 是个例外，能放在一个 K3 曲面上的亏格 10 曲线在模空间中组成一个超曲面 $\mathcal{K}$，

$$\mathcal{K} \equiv 7\lambda - \delta_0 - b_1\delta_1 - \cdots - b_5\delta_5\,,$$

系数之比已经出现 $7 = 7/b_0$，只要算算其它 4 个系数，就可以说明这个超曲面的斜率很有可能是 7，由模空间斜率的定义，$s_{10} = 7$，斜率猜想不成立。这是我在 1998 年的论文中建议的反例。多年后，哈佛大学和普林斯顿大学的两位年轻人合作计算出这四个系数，证实了我的猜想，给出了斜率猜想的第一个反例。

斜率猜想是 Harris 和 Morrison 在 1990 年的文章中正式提出来的。研究模空间的人当中，很少有人知道我发表的结果，因为我不是这个圈子的。我自己也没有继续研究这个问题。几年后，在麻省理工学院的讨论班上，有个学生提了一下我的结果，当时包括 Harris 本人也不知道，有人就发邮件给我询问其中的计算，并说我之前应该告诉 Harris 我的结果。我的这篇文章开始引起人们的注意。

黄孝军教授告诉我，有一次在普林斯顿大学数学系，看到一个年轻人在读我的文章，就告诉那人作者是自己的朋友，估计就是这篇文章。

我的一个同事从美国回来之前，导师问他到那个学校，说这个学校我知道，几年前他也发现可以用 K3 曲面研究斜率猜想，跑去告诉 Harris 计算结果，最后得知 10 年前华东师大已经有人发表了同样的结果。

从曲线模空间最新的研究成果看，K3 曲面的几何对斜率猜想和模空间的几何有本质的影响，不是一个偶然因素。这也算是我对这个领域的一点小贡献。

二、哈茨霍恩猜想与三次覆盖。硕士阶段我研读了 Miranda 三次覆盖的文章，知道任何秩二向量丛都可由一个好的三次覆盖构造出（允许相差一个“倍数”），也就是说秩二向量丛由一个三次方程决定，可以用三次方程研究秩二向量丛，这是一个朴素的想法。

1970 年代，代数几何中有一个著名的哈茨霍恩猜想，

哈茨霍恩猜想：维数 $n \geq 7$ 的射影空间 $\mathbb{P}^n$ 上，秩二向量丛 E 都是分裂的，也就是说是两个秩 1 向量丛的直和，$E = L \bigoplus M$.

这个猜想至今未解决，向量丛的分裂性与乘一个“倍数”无关，因此可以假设向量丛来自三次覆盖。我决定用三次覆盖的方法研究一下这个猜想，把问题归结为研究三次方程

$$z^3 + g(x_1, \cdots, x_n)z + f(x_1, \cdots, x_n) = 0\,,$$

两个系数 f 和 g 是 n 个变量的多项式。不妨设 $g \neq 0$，否则向量丛自动分裂。

第一个难题就是秩二向量丛是如何从三次方程构造出来的？等价于要计算三次覆盖的“正规化”，我们知道这是一个很复杂的问题，只有在三次数域上（就是三次方程的系数为整数时）有相关的计算结果可以参考，但是结果很不相同。

我又一次沉浸于复杂的计算之中，晚上安静，又通宵演算。当时夫人在中心的图书馆上班，每天早上把算的结果给她，她下班后在中心的电脑上输入成 TeX 文件，编译好后打印带回来。不知经过了多久，终于把正规化计算出来了。

正规化算法：

1） 先把系数的“多余因式”p 去掉，把方程变为“极小”，即没有多余因式。

所谓多余因式就是满足 $p^2 \mid g$, $p^3 \mid f$ 的因式 p . 通过变量代换 $z = pz'$ 可以去掉多余的因式。这个过程不影响正规化的计算结果。

2） 对极小三次方程的系数做因式分解

$$g = a_1 a_2^2 b_1 a_0, \quad f = a_1 a_2^2 b_1^2 b_0\,,$$

其中，a_1 , a_2, b_1 无平凡因式，a_0 , b_0 互素。这样的分解是唯一的。

3） 计算三次方程的判别式 $4g^3 + 27f^2$，去掉 $4g^3$ 和 $27f^2$ 的公因式，结果记为 c ,

$$a = 4a_1 a_2^2 a_0^3\,, \quad b = 27 b_1 b_0^2\,, \quad c = a + b,$$

注意，a, b, c 没有公因式。

4） 对 c 做因式分解 $c = c_1 c_0^2$，其中 c_1 无平方因式。

三次覆盖所有信息全部包含在上面的因式分解中。

算法的应用：

- **（三次覆盖的 abc 数据）** 由极小三次方程可以得到互素的多项式 a,b,c，满足$a+b=c$．反之，给定这样的 a,b,c，通过分解 $a=4a_1a_2^2a_0^3$，$b=27b_1b_0^2$，可以求出极小三次方程的系数 $g=a_1a_2^2b_1a_0$，$f=a_1a_2^2b_1^2b_0$．因此下述对象等价。

  1．三次覆盖。 2. 极小三次方程。3. 互素的 a,b,c，满足 $a+b=c$．

- **（秩二向量丛的方程）** 全分歧曲线（覆盖在其上有 3 重根）的定义方程是 $a_1a_2=0$，简单分歧曲线（覆盖在其上有 2 重根和单重根）的定义方程为 $b_1c_1=0$．正规化和秩二向量丛，都是下方程的解（解为多项式），

$$f_1X+f_2Y+f_3Z=0.$$

  其中 $(f_1,f_2,f_3)=(2a_0a_2,3b_0,3c_0)$．历史上称为 Syzygy 方程。

- **（奇点的典范解消）** 1999 年 7 月到 2000 年 7 月，在以色列巴伊兰大学访问期间，又发现了三次覆盖的“典范解消”和“不变量的计算公式”。

  利用三次覆盖数据 $a+b=c$ 计算奇点解消非常方便，对分歧曲线的奇点作二次变换，直接在等式上 $a+b=c$ 上作即可，$\sigma^*a+\sigma^*b=\sigma^*c$，去掉公因式，就得到新的三次覆盖的定义数据 $a'+b'=c'$. 有限步后，分歧曲线 $a_1a_2b_1c_1=0$ 变为光滑曲线，三次覆盖曲面也变为光滑曲面，所以，与二次覆盖和三次循环覆盖一样，任意的三次覆盖也有典范解消。

  注意有理函数 $j=\frac{a}{c}$ 就是椭圆曲线 $y^2=x^3+gx+f$ 的 j 不变量。三次覆盖也由其 j 不变量唯一决定，称为三次覆盖的 j 函数。三次覆盖的典范解消与 j 函数的奇点解消一致（见后面的参数曲线和常微分方程的奇点解消与不变量的计算）。代数曲面上任何非常数有理函数都能作为某三次覆盖的 j 函数。

  2019 年，Kresh 和 Chinkel 将结果推广到高维，证明高维时也有奇点的典范解消。注意，四次时，即使是循环覆盖，也不存在典范解消。

  依据代数曲面三次覆盖的奇点解消，可以给出不变量的计算公式。

- **（循环覆盖的刻划）** 三次覆盖是循环覆盖当且仅当没有简单分歧曲线，且 $\frac{b_0}{c_0}$ 是代数曲面上的有理函数（Shioda 和张德琪提醒后才找到这个条件）。

因此，任何秩二向量丛可以由三个多项式构造出来。维数 $n\geq 3$ 时，这种方法构造的向量丛有奇点，因此，要构造出没有奇点的向量丛，对三个多项式有条件限制，这个条件也容易找到，很初等的条件。这样就把哈茨霍恩猜想转成三个多项式的一个初等猜想，不过仍然困难（缺少好的算法）。（哈茨霍恩猜想收录在《10000 个科学难题》，数学卷）。把这些结果整理出来，做成 ICTP 的预印本。

用三次覆盖将哈茨霍恩猜想转换成另外一个同样困难的初等猜想，想证明哈茨霍恩猜想的努力算是失败了。一直到 1999 年，才把正规化的计算部分整理出来发表，哈茨霍恩猜想只能在最后提一提，完全看不出猜想是正规化计算的动机。

评论：虽然越来越多的人开始将三次覆盖的算法作为工具研究代数曲面，但三次覆盖的神秘面纱还远远没有被揭开。例如，代数曲面上三次覆盖的存在性问题还未解决。代数曲线类似的问题叫“黎曼存在定理”，扎里斯基研究过平面上

一般覆盖的存在性问题，答案都和拓扑学的基本群有关。

问题 1（三次覆盖的存在性问题）：给定曲线 $a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ b_1 = 0,\ c_1 = 0$，什么条件下存在三次覆盖以它们为分歧曲线，即下不定方程在代数曲面上有解

$$a_1 a_2^2 X^3 + b_1 Y^2 = c_1 Z^2 .$$

更对称一点的表述：a 没有立方因式，b 和 c 没有平方因式，它们两两互素，问不定方程

$$aX^3 + bY^2 + cZ^2 = 0$$

何时有互素的解？有解的话，有多少解？即有多少不同的三次覆盖存在。

我在 2011 年的一篇文章中研究了一般三次覆盖的存在性问题，这时没有全分歧曲线，所以 $a = 1$，简单分歧曲线 C 是不可约曲线，奇点都是尖点，不妨设 $b = 1$，曲线 C 的定义方程为 $c = 0$，不定方程

$$X^3 + Y^2 + cZ^2 = 0$$

有解的充分必要条件是： C 为偶曲线，且尖点集是 3 可除的。数论中有类似问题的研究，也是要求分歧在素数上。

问题 2（三次覆盖稳定性问题）：三次覆盖有一个自然的秩二向量丛（可能有奇点，此时向量丛称为秩二自反层），有稳定性的概念，特别是有 Bogomolov 不等式，将这些深刻结果转换成三次覆盖的性质。

问题 3（三次覆盖的基变换问题）：从三次方程的求根公式可以看出，系数开平方，再开立方，就可以解出方程的根。用三次覆盖的语言，作底的二次覆盖 $w^2 = b_1 c_1$，称为二次基变换，拉回的三次覆盖变为循环覆盖，因此原来覆盖的向量丛的拉回变成分裂的，分裂成 $L^- \oplus L^+$，试用这个经典理论研究三次覆盖和秩二向量丛。Donaldson 理论与 Seiberg-Witten 理论之间出现过类似现象。

问题 4（三次覆盖的数值不变量）：三次覆盖的 j 函数是三次覆盖的不变量，它定义的参数曲线 $j = t$ 有不变量：小平维数 $\mathrm{Kod}(j)$，几何亏格 $p_n(j)$ 和陈省身数 $c_1^2(j),\ c_2(j),\ \chi(j)$，也是三次覆盖的数值不变量。问三次覆盖与它的数值不变量之间有什么深刻的关系？

问题 5（三次覆盖非平坦点的计算）：高维时三次覆盖的秩二向量丛可能有奇点（称为三次覆盖的非平坦点），如何求奇点集合的定义方程？（与哈茨霍恩猜想有关的算法问题。）

另外数论上的 abc 猜想是模拟单变量多项式方程 $a(x) + b(x) = c(x)$ 的结论，后者在几何上几乎是平凡的结论，也许多变量时的方程

$$a(x,y) + b(x,y) = c(x,y)$$

的相应结论和证明方法可以为数论上的 abc 猜想提供有价值的参考。

陈志杰教授很早就一直跟同事们说，三次覆盖是一项重要的工作，发表在会议论文集上很可惜，得不到现在评价体系的认可。从现在越来越多的人开始使用这个工具来看，陈老师说的没错。

从数学上来讲，三次方程还有那么多基本问题没有解决，的确值得我们重视。数论上的三次方程（椭圆曲线）已经受到高度的关注，几何与拓扑上的三次方程同样应该受到关注，更何况二者是密切相关的。

10. 在美国 MSRI 的访问：代数曲面的沙勒定理的发现

在王宽诚基金会的资助下（陈省身为我申请的），1996 年 3 月初我到美国数学科学研究所（MSRI）访问三个月，参加多复变年和代数几何的活动，见到了几个老朋友，也认识了不少新朋友。

在讨论班上，我做了两次报告，介绍了正规化的计算和在向量丛上的应用。第二次报告结束后，一名德国来的向量丛专家告诉我，秩二向量丛可以用三个多项式构造出不是一个新结论，可以抽象的证明，当然，也可能由三次方程来的多项式有一些特殊的性质。因此，这条路彻底走不通了，我就放弃了哈茨霍恩猜想的研究。

用三条曲线在代数曲面上构造秩二向量丛不会产生奇点，因此我就试着计算这样构造的向量丛的陈省身数。当时秩二稳定向量丛 E 的 Bogomolov 不等式 $c_1^2(E) \leq 4c_2(E)$ 在代数曲面的研究上非常有效，即所谓的 Reider 方法。我把不等式应用到 3 条平面三次曲线构造的向量丛上，得到了一个意想不到的结论，得出三次曲线著名的沙勒（Chasles）定理：假设两条三次曲线相交于 9 个点，如果第三条三次曲线通过 8 个点，它一定通过第 9 个点。我立即把相关的计算推广到代数曲面 S 上，

$$\Delta = A \cap B - A \cap B \cap C\,,$$
$$L = A + B - C$$

利用 Bogomolov 不等式，得到和 Reider 方法一样的限制条件。Reider 方法说，如果有限点集 Δ 对相伴线性系 $|K_S + L|$ 中的代数曲线没有给出独立条件，那么可以找到次数低的曲线通过 Δ. 用 Reider 方法可以证明代数曲面上的 Fujita 猜想。利用我们的方法，可以将沙勒定理推广到代数曲面。在平面上更容易理解这些结论。假设 $k = \ell - 3 \geq 0$.

Fujita **猜想**：任何 $k+1$ 个点对 k 次代数曲线总给出了 $k+1$ 个独立条件。

沙勒定理的推广：假设一条 m 次曲线和一条 n 次曲线有 mn 个交点，第三条曲线的次数为 $m+n-\ell$，如果第三条曲线通过其中的 $mn-(\ell-2)$ 个交点，那么它一定通过所有点。

当 $\ell = 3$ 时，这个推广的定理称为 Cayley-Bacharach 定理。我把相关结果整理出来了，准备投出去发表。

受朱永昌教授的邀请，回国时路过香港，访问了香港科技大学。日本京都大学的代数几何学家 Ueno 结束大陆的访问后，正好在香港大学访问，莫毅明教授让我去他的办公室，与 Ueno 教授见一面，讨论一下去京都大学访问的事情，有一位支持中日友好的日本女士捐赠了一笔经费，资助中国学者访问日本。

11. 回国开设本科生代数几何选修课

1996 年 6 月初，我从香港回到上海。肖老师也正好在上海，他和陈志杰老师负责一项天元基金，专门用于代数几何的学术交流。他们组织了一周的学术交流会，四个上午留给我作报告，这要讲很多东西，刚回来还没有时间准备，又只好熬夜，每个晚上大概睡 2 个小时。最后一次我讲了将 Cayley-Bacharach 定理推广到代数曲面的结果，虽然出发的条件不一样，但用的工具和所得结论与 Reider 方法中的一模一样。肖老师立即说“这两类结果肯定是等价的”，就是 Fujita 猜想和 Cayley-Bacharach 猜想等价，但这是两类性质完全相反的问题，虽然都是线性方程组的问题，前者的结论是至少有多少方程是独立的，后者的结论是至少有多少个方程是多余的。

回来后还完成了几件事。先是国家杰出青年基金申请的答辩，因为是学校第一个进入答辩的，各方面都很重视，我在北京答辩的当天，陈老师代我到学校答辩，破格申请教授。第二天吴文俊先生让我们几位答辩的老师去系统所做了学术交流，回上海后吴先生让我写了一份研究工作总结给他。暑假期间还参加了 10 月份基金委在桂林召开的青年基金获得者成果汇报会，由于汇报时间只有 20 分钟，就罗列式的汇报了正式发表的成果。

参加了 11 月在华东师大召开的“第六届全国代数会议”，并作了大会报告，也在年底召开的上海市数学会年会上做了报告。报告的内容是从平面几何里共点共线的 Pappus 定理和帕斯卡定理出发，再到三次曲线的沙勒定理，高次曲线的 Cayley-Bacharach 定理，一直到在代数曲面上我自己的推广。正好在当年，Eisenbud，Green，Harris 在美国数学会通报上发表了一篇综述文章《Cayley-Bacharach 定理和猜想》，使我对这个问题的历史起源有所了解，定理成立的代数原因是多项式代数的 Gorenstein 性质。

我申请为本科生开设代数几何选修课，当时陈老师让我再考虑一下，这么难学的课，国内外又没有现成的教材，有可能吃力不讨好。数学系倒是很快就批准了，课程还是开出来了，期末考试题目有点难，陈老师又提醒，今后不要考这么难，会打击学生学习的积极性。按照陈老师的指点，后面几年课程开设很顺利，大部分年份有 60 多学生选，最多时有 80 多人。

12. 访问德国埃森大学：两个猜想的等价性证明

1997 年 2 月，应 Esnault 和 Viehweg 的邀请，我到德国埃森（Essen）大学访问。

Esnault 关注抽象代数几何的研究，偏向在正特征域和数论上的应用。她说在法国研究具体代数几何的人不多，博维尔和肖刚是个例外。有一次我拿了两篇法语的论文去问她问题，其中一篇是庞加莱的，她直接把另一篇文章拿去放在边上，说这篇不用读，就读庞加莱的文章就够了。还有一次有人希望讨论庞加莱关于“正规函数”的文章，她立即推荐我来读，说实话，我当时还没有仔细读过庞加莱的文章。受她的影响，我特地收集了庞加莱关于代数曲面的论文。

Viehweg 问我能否用霍奇结构把奇异纤维个数的博维尔猜想重新证明一下，他并没有说明为什么要这样做，我也没放太多注意力在这个问题上。后来，从他和左康持续的合作研究中了解到，他们是要研究高维纤维化类似的问题，高维时没有好的不变量计算公式，要仔细研究霍奇结构。Viehweg 也很关心 Fujita 猜想，

因为他的一个定理是研究猜想的主要方法之一。

我当时的注意力在 Cayley-Bacharach 猜想与 Fujita 猜想的等价性上面。这项研究与我之前的研究性质完全不同，这是纯理论方面的，要通过“上同调理论”建立它们的联系，一个表现为低阶上同调，一个表现为高阶上同调，通过上同调为零的技巧，建立起它们之间的“对偶关系”，因此等价。花了大半年的时间完成了证明。

埃森大学的代数几何、数论、交换代数都有很强的研究队伍。数论方面有格哈德 • 弗雷（Gerhard Frey）教授，他是建立费马问题与椭圆曲线联系的第一人，它为费马大定理的证明指出了一条全新的途径，Wiles 沿着这条路劲最终完成了证明。没有弗雷的工作，按照法尔廷斯的说法，费马问题二十年内不可能被解决，相比之下知道弗雷的人并不多，说明数学界并不重视原始创新，更重视解决难题，要是在物理学界，得诺贝尔奖的有可能是弗雷。三个方向的老师在一起开讨论班，每次参加的人都很多。我在讨论班上介绍了等价性的证明。

研究这两个猜想的团队是独立的，Cayley-Bacharach 猜想主要是交换代数团队在研究，Fujita 猜想主要是代数几何与复几何团队在研究。两边都有哈佛大学的著名数学家在推动。以前都认为平面几何中的共点、共线问题是用来训练思维的，在现代数学中没什么作用，现在看来它和代数几何最核心的问题是等价的。后来，一些人也会从平面几何共点共线问题开始介绍 Fujita 猜想。

1997 年底，我将论文投稿了，一周后就有人与我讨论这篇文章，主要是让我把他的三篇文章加在我的参考文献中。我当时只同意加一篇，说另两篇关系不大，就没有加。论文审了一年半也没有回音，我写信问编辑，编辑说催了审稿人很多次都没有回复。最后编辑换了一个审稿人，很快就接受了。

Viehweg 和我仔细讨论了等价性的证明，发现有限个点不一定要求是曲线相交得来的，向量丛的截面的零点也可以，证明方法类似。这样发现向量丛也有 Cayley-Bacharach 性质。之前 Griffiths 和 Harris 在一个点的特殊情形发现过这个性质。我们合写了这篇短文，本来我写的文章开头是“本文推广…”，Viehweg 把它改为“本文介绍和推广…”，说这样写对我有利。上海师大的孙浩发现有限个点也不必来自向量丛截面的零点，将定理推广到更大范围。湖南大学的李木林用微分几何做了更进一步的推广，后来 L. Ein 等人对李木林的定理给出了代数几何证明。

与 Viehweg 还讨论了通过代数曲面的 Cayley-Bacharach 定理去证明 Bloch 猜想，至今还保留着讨论时他留下的草稿。

1998 年，花了大半年的时间研究高维时的 Cayley-Bacharach 猜想，感觉找到一个证明，Viehweg 访问上海时，我讲给他听，最后他发现了证明中的错误，这一年没有发现数学上的新结果。

应 Ueno 教授的邀请，10 月份开始访问京都大学三个月。在讨论班上，我介绍了两个猜想的等价性证明。每次的讨论班森重文都来参加，中午还一起去餐馆吃饭。这期间还访问了名古屋大学，参加代数几何年会和在奈良召开的数学大会。有一次在讨论班上轮流签字，我以为是第二天讨论班之后一起吃饭签字，就签了。某一天晚上，他们打电话让我快下来去参加传统节日晚会，我说我不知道有这个

晚会，对方说我签过字，我作为唯一外国客人参加了，免了我一个人的单。

13. 以色列巴伊兰大学访问：三次覆盖典范解消算法的发现

1999 年 7 月，应 Mina Teicher 教授的邀请到以色列巴伊兰大学访问。

Teicher 教授是以色列国家科技部首席科学家，研究兴趣广泛，除了代数几何以外，还研究拓扑学，特别是平面曲线补集的基本群的计算，另外还研究脑科学，在巴伊兰大学有她的脑科学实验室。也是数学教育家，担任过国际数学教育委员会副主席，参加以色列精英人才培养计划，张英伯教授还专门采访过她。担任副校长期间，她与华东师大签过合作协议。

Mina 团队是用“一般覆盖”的方法研究代数曲面，就是通过一般投影，将空间代数曲面表示为平面的一般覆盖，分歧曲线是不可约偶数次曲线，最多只有结点和尖点作为奇点，简称为尖点曲线。覆盖在有限个尖点上有 3 重根，在其它点上都只有二重根。覆盖的次数一般很高，现在知道，覆盖次数大于 5 时，一般覆盖是唯一的，因此代数曲面由尖点曲线唯一决定，也就是说，代数曲面的研究理论上可以归结为平面尖点曲线的研究。尖点曲线补集的基本群是代数曲面的重要不变量。

她和 Moishezon 利用一般覆盖的伽罗瓦闭包构造出“单连通、正指数”的一般型代数曲面，否定了“分水岭猜想”。单连通的意思是曲面的基本群是平凡的，只有一个元素 1. 正指数是指曲面的陈省身数满足 $2c_2 < c_1^2 < 3c_2$，论文很长，计算很复杂。丘成桐证明满足 $c_1^2 = 3c_2$ 的一般型代数曲面是球商曲面，所以基本群是无穷的，分水岭猜想说：正指数曲面的基本群都是无穷的。

不久，肖刚就用很简单的二次覆盖方法也构造出这样的曲面，陈志杰将方法扩充，构造了一大批这样的曲面，两个陈数之比接近 3，超过 2.7，由于肖老师和陈老师的方法简单，反而更受人们的关注。最近在美国的《数学年刊》的一篇文

章中，作者构造了可以无限接近于 3 的例子。

上世纪末，平面上的一般覆盖的唯一性基本解决，次数大于 5 时，覆盖由分歧曲线唯一决定。但存在性是一个经典难题：一条尖点曲线在什么条件下是某一般覆盖的分歧曲线？1930 年代，扎里斯基就研究过这个问题，他考虑具有 6 个尖点的 6 次曲线，他证明这条曲线是某一般三次覆盖的分歧曲线，当且仅当 6 个尖点落在一条二次曲线上，当且仅当曲线的补集的基本群是无限的。另一方面，不是分歧曲线的例子也存在，和分歧曲线一样多。假设这样的 6 次曲线 C 的方程为 $c=0$，存在性问题就是下面的丢番图方程是否有解的问题，

$$X^3+Y^2+cZ^2=0$$

由扎里斯基的结果可知，是否有解是个拓扑问题。

这再次让我觉得三次覆盖是一个重要的数学问题，三次方程里面还包含有数学上未知的东西（和椭圆曲线一样），要想使得它成为每个人能够使用的工具，就必须寻找和二次覆盖一样好的算法，这是受到肖刚研究数学的思想的影响，不过这已经背离了 Miranda 研究三次覆盖的方法，他是从秩二向量丛出发，试图描述正规化以后曲面的定义方程，我是从三次方程出发，让正规化的信息显现在方程的系数中，有利于寻找算法。

在正规化算法的基础上，最终发现了前面提到的三次覆盖奇点的“典范解消”算法和不变量计算公式，就是三次方程定义的奇点的解消算法，这已经是 2000 年暑假期间，我在香港中文大学访问，研究奇点的专家丘成栋教授和黄孝军教授也在那里，我马上告诉他们我的算法，并且，拿了个例子现场演算给它们看，丘教授用其它算法验证了我的计算的正确性，觉得算法很好，建议尽快投稿，还帮忙修改了文字，也建议了投给哪位编辑。后来我又算了很多例子，在很多情况下可以不用看方程就能算出结果，与二次覆盖一样。当时有点兴奋，有一个晚上通过网络视频，我把算法告诉了陈老师，算例子给他看。

接着华东师大团队就用三次覆盖研究了一些问题。例如，与陈志杰合作，发现亏格 3 纤维化斜率的上界，因为这样的纤维化来自直纹曲面的三次覆盖。与陈志杰，杜荣，于飞合作，求出所有有理三重奇点的三次方程。与陆俊合作求出了来自三次覆盖的纤维化的不变量，计算了三重奇点的极大理想闭链等。

三次覆盖的原始文章发表并不顺利，审稿人全盘否定了用三次方程研究三次覆盖的方法，认为这是一个“非常奇怪的方法”。文章后来就在一个会议论文集中发表了。

正规化计算部分的论文发表很顺利，后来与新加坡国立大学的张德琪教授合作，发现可以用曲线奇点解消来计算正规化，把三次覆盖的计算推广到形如

$$z^n+g(x,y)z+f(x,y)=0$$

的方程定义的高次覆盖。这些结果被 Vasconcelos 收录在他于 2005 年出版的斯普林格数学专著丛书《整闭包》中。

在以色列访问期间，Mina 常带我和夫人去参加各种各样的活动。一次是以色列全国艺术家的聚会，Mina 把我介绍给一位看上去年纪有点大的艺术家，艺术家马上问我是否认识中国的一位年轻物理学家，他说了姓名，住在哪个城市，

几年前在以色列访问过。Mina 马上过来告诉艺术家，中国是个很大很大的国家，哪能相互认识。她转身对我说，这是以色列人的习惯，见了面都会这样问，以色列小，还真有可能问到相互认识的人。

Mina 为我弄到一张票，到议会去参加总统为沃尔夫奖获得者的颁奖典礼和招待会，当年获奖的数学家有法国的塞尔（J. P. Serre）和美国的博特（R. Bott），可惜不能带相机进会场。

还有一次，德国马普所的 Zagier 访问巴伊兰大学，Mina 请他到家作客，我作陪。虽然我在马普所访问过一年，听说 Zagier 懂中文，但没有机会和他深入的交流。他突然问我，在中国，数学家的地位怎样？我告诉他，地位应该不高，他马上表示不同意我的看法，他说，20 多年前访问中国，他和宾馆服务员聊天，得知他是数学家后，服务员马上说，哦，数学家，我知道，华罗庚，陈景润，Zagier 当时很吃惊。他说，英国的阿蒂亚也是有名的数学家，但英国老百姓没几个人知道他。

离开以色列的当天上午，我去了一趟数学系，秘书把我领到一间小屋，推开门，数学系所有的秘书都在场鼓掌，中间桌子上放着一个大蛋糕，上面写着欢送谈胜利，当时我激动得话都说不出来。下午使馆教育处的老师开车把我送到了机场。

2001 年春天，我在香港大学数学所访问时，收到意大利国际理论物理中心的邮件，告知我获得 2000 年度的 ICTP 奖，我有点惊奇，因为我没有申请过这个奖，至今也不知道是谁推荐的。这一年的奖正好是以希策布鲁赫的名字命名，在颁奖仪式上，希策布鲁赫还介绍了我在马普所访问的经历，以及在那里完成的三项工作。

在收到邮件之前，杨振宁先生约我到香港中文大学见了个面，聊了很多数学，估计他是提前知道我得奖的的事，1998 年度的 ICTP 奖是以他的名字命名的。

14. 解决了代数曲面的各种有效性问题

1999 年底，我从以色列去香港大学参加一个迎接千禧年的学术会议，中途在北京参加了数理学部组织的杰出青年基金中期考核汇报会，所有人在一起听汇报，记得有一位汇报者在介绍他论文发表的杂志时，专家组的组长马上提问说，这个基金是要支持出重大成果，不用介绍杂志，就介绍自己是否研究过什么重大问题，即使没解决，取得了什么样的进展。我听了后心里一下子有底了，1996 年写申请书时我正在意大利用三次覆盖研究向量丛的哈茨霍恩猜想，项目名称是《代数簇的几何与向量丛》，虽然猜想没做出来，但是证明了 Cayley-Bacharach 猜想与 Fujita 猜想等价，特别地，在代数曲面时解决了 Cayley-Bacharach 猜想，把三次曲线的沙勒定理推广到了代数曲面。

北京大学的张芷芬教授是评委，几位数学的汇报者汇报完了后，她把我叫出会场，说后面的不用听，我们去讨论一下数学。她说，我研究了两条三次曲线相交的问题，第三条三次曲线通过所有 9 个交点，它的方程是不是前面两个三次方程的线性组合？以前研究二次微分系统，知道二次曲线时，答案是对的，现在研究三次微分系统，碰到了这个问题。她问过其他人，没有得到答案。

说来也巧，我在意大利访问时，一个明斯克来的年轻人向数学部的主任 Narasimhan 问了同样的问题，问题是关于任意次数的曲线，年轻人也是研究常微分方程的，Narasimhan 知道我研究过这个问题，就把年轻人带到我的办公室，我告诉他代数几何的有关结果，几个月后，他寄给我改写过的论文，以前的论文中一个矩阵就占了两页，通篇是解线性方程组，新论文中这些全没有了，取而代之的是代数几何的结果。

我立即告诉张教授说结论是对的，她问哪里可以找到证明，我给了参考书的书名，并说证明在第几页，她又问，你怎么记得这么清楚，我说这个结论叫诺特基本定理，经典的 Cayley-Bacharach 定理就是用它来证明的。她还说，希尔伯特的第十六问题就是建议用代数几何方法研究常微分方程，我当时并没有完全理解

她说的代数几何方法，不过这次交流给我留下了深刻印象，促使我后来我把参数曲线的陈省身数推广到了常微分方程。

从这时起，我决定用自己创建的方法研究几个我感兴趣的问题，不再跟踪国际上的热点，特别地，不再查看每天更新的预印本网站，以免我的研究受到干扰。

一次偶然的机会看到二元三次型（两个变量的三次齐次多项式）的判别式，发现与 Miranda 研究三次覆盖时发现的判别式的公式一样，我就花了几天的时间仔细学习了希尔伯特写的不变量理论的书，这本书是他給大学生上课的讲课记录，学起来很容易。希尔伯特的书很有启发性，都是用计算介绍二元型的不变量理论，让我在学习的过程中发现，二元 n 次型及其不变量的概念可以用秩二向量丛的语言推广到代数曲面，Miranda 就是用二元三次型描述三次覆盖的，他计算出的两个量就是二元三次型的两个不变量。把整个不变量理论翻译成向量丛的语言，就自动得到向量丛的“稳定性”的概念，并且可以直接用不变量的结论证明 Bogomolov 不等式。后来我在《数学译林》上看到 Rota 的文章《不变量的两个转折点》（译文把作者标错了），文章说不变量理论就是研究在坐标变换下不变的量，是研究的几何问题，还说只有很少的不变量在几何上得到了研究。这篇文章让我意识到，几何不变量理论就是把代数不变量理论用几何的语言表示出来，研究所有不变量为零的问题就是几何中的稳定性问题。因此，对不变量理论有了更加深刻的认识。

用自己的方法给出秩二向量丛的 Bogomolov 不等式的证明后，我就想能否用不变量的方法对秩大于 2 的向量丛寻找类似的不等式，如果可以的话，就能在高维空间上解决 Cayley-Bacharach 猜想和 Fujita 猜想。后来了解到，要寻找涉及到第三或者更高次陈类的不等式，是几何上的一个难题。

因为 Reider 方法和我研究 Cayley-Bacharach 猜想使用的方法本质上是等价的，都是先构造一个秩二向量丛，然后利用 Bogomolov 不等式推出结论，我的方法是用三条曲线构造向量丛，很直接。Reider 方法需要向量丛第一陈类的半正性，在我的方法中不需要这个条件。这一点点的改进使得代数曲面上所有和有效性有关的问题都得到解决。

代数曲面中有很多定理都是“当次数 n 充分大时”，某某定理成立，所谓有效性问题，就是要求出使得定理成立时 n 的最小值。Reider 方法对 Fujita 猜想有效，由于半正性的限制，对其它问题用不上。

我研究了曲线组成的“线性系” $|nA+B|$ 的 k 可分性，k 是非负整数。

曲线组成的集合 $|nA+B|$ 称为线性系，意思是 $|nA+B|$ 中曲线的定义方程组成一个有限维向量空间，比如，平面上的 n 次曲线就组成一个线性系。

所谓线性系 $|nA+B|$ 是 k 可分的，意思是任何 k 个点对线性系都给出了独立条件。曲线通过 k 个点，就得到了 k 个线性方程，这些方程中没有多余方程。0 可分也有意义。

我计算出两个整数 $\alpha(A,B)$ 和 $\beta(A,B)$，都有计算公式，$\alpha(A,B)$ 是线性系 k 可分的 k 的最大值（可以为无穷大）。我得到定理

定理：假设 $\alpha=\alpha(A,B)\geq 0$，$0\leq k\leq\alpha$，当 $n\geq\beta(A,B)+k$ 时，线性系

$|nA+B|$ 是 k 可分的。

通过选取不同的 A,B，这个定理解决了代数曲面上能找到的所有有效性问题，包括著名的"有效黎曼-洛赫问题（Riemann-Roch Problem）"，"有效 Matsusaka 大定理"，"有效 Serre 定理"，"有效 Artin 定理"，"有效假设问题"等，其中有效假设问题是 1949 年出版的代数几何书中明确提出来的未解决问题。当然定理也包含了 Fujita 猜想。对所有这些问题，这里的结果不仅有效，而且都是最佳。

因此，代数曲面上关于线性系的有效性问题就彻底解决了。代数曲线的有效性问题是黎曼和洛赫解决的，是著名的黎曼-洛赫公式的推论。

在香港大学召开的代数几何会议上，我汇报了相关结果，报告一结束，萧荫堂教授马上站起来评价说，结果非常好，把所有有效性问题统一解决了。当时《亚洲数学杂志》正准备出两期，献给萧荫堂教授 60 岁生日，丘成栋教授是编辑，他问我，我投的文章是不是报告的文章，我说是，他说那很好。

15. 研究的重大转折：从雅可比猜想到庞加莱问题

2006 年，张德琪教授和我同时访问德国美茵兹大学的左康教授，我们在一起聊起著名的雅可比猜想，张德琪参加了一个动力系统的会议，他说有人在用动力系统的方法研究这个猜想，并讲了个故事，说一次关于雅可比猜想的会议快结束时，组织者发起了投票，最后有 62.4% 的人认为这个猜想不成立。我当时马上说这就是代数曲面有限覆盖的问题，我们做代数曲面研究的人应该试一试这个问题。大家赞同，并说就是要证明覆盖的次数为 1.

一、雅可比猜想简介。雅可比猜想是 Keller 在 1939 年提出来的，并不是雅可比提的猜想，它是关于两个变量的多项式方程组求解的问题。假设 $f(x,y)$ 和

$g(x,y)$ 是多项式， z,w 是两个复数，考虑方程组

$$\begin{cases} f(x,y) = z\,, \\ g(x,y) = w, \end{cases}$$

一个自然的问题是，什么条件下方程组对任何 z,w 都有解，且解是唯一的，并且解是 z,w 的多项式。即存在多项式 $x = u(z,w)$， $y = v(z,w)$ ，使得

$$\begin{cases} f(u(z,w),v(z,w)) = z\,, \\ g(u(z.w),v(z,w)) = w, \end{cases} \qquad \begin{cases} u(f(x,y),g(x,y)) = x\,, \\ v(f(x,y),g(x,y)) = y, \end{cases}$$

学过微积分的人都知道，方程组必须满足雅可比条件：$f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 的雅可比是一个非零常数，即

$$f_x g_y - f_y g_x = \ c \neq 0,$$

这里下标表示对变量求的偏导数。雅可比猜想说这个结论的逆也成立。

雅可比猜想：如果 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 的雅可比 $f_x g_y - f_y g_x = \ c$ 是一个非零常数，那么对任何 z,w ，方程组都有解，且解唯一，并且解是 z,w 的多项式。

这个有 80 多年历史的猜想至今未被解决，曾经有多名著名数学家发表过证明，最后发现证明都有错误。

两个多项式给出了两个平面之间的映射，它将点 (x,y) 映射成点

$$(z,w) = (f(x,y),g(x,y))$$

如果雅可比条件满足，就称这个映射为 Keller 映射。雅可比猜想包含 3 部分。

1） **解的存在性**。对任何 z,w 都有解，等价于 Keller 映射是满映射。

2） **解的唯一性**。等价于 Keller 映射是单映射。（最难的部分）

3） **求出公式解**。公式解由多项式给出。

Keller 映射可以看作是一个有限覆盖映射，覆盖的次数为 N. 经过几十年的研究，人们知道：1）最多只有有限个点 (z,w) 使方程组没有解。2）如果能证明覆盖次数 $N = 1$，那么猜想成立。3）需要给出解方程的算法。

关于存在性，知道的结果不多。2013 年，Ronen Peretz 对方程没有解的点的个数给了一个估计，不超过 $N^3 + N^2 - N$. 他还给出了 Keller 映射是满射的一个充分条件。

关于唯一性，要证明覆盖的次数不能大于 1. 人们在 1970 年代就知道覆盖的次数不能是 2，莫斯科研究雅可比猜想的学派花了很大的精力证明 Keller 映射的次数不能是 3 或者 4. 按照他们的方法，再往更高次数走已经不可行了。

这个猜想也深深地吸引着我。

二、雅可比猜想与参数曲线的不变量。如果将 z 和 w 都看作参数，我们就得到两组参数曲线 $f(x,y) = z$ 和 $g(x,y) = w$，雅可比条件说明参数曲线中每一条曲线都光滑，两组参数曲线正常相交（不相切），它们的奇点和不正常相交的点

都在无穷远处。参数曲线的陈省身数不依赖于参数，而雅可比条件也不依赖于参数，因此这些不变量是研究雅可比猜想的最佳选择，这是一个全新的想法。要用这个思路证明雅可比猜想，关键是要证明两组参数曲线的亏格都为 0。

1993 年，S. Kaliman 提出了一个“弱雅可比猜想”，就是在雅可比猜想中加上额外条件：一组参数曲线中的每一条都是不可约的。他证明弱雅可比猜想与雅可比猜想等价。

有限覆盖和参数曲线的不变量都是我擅长的问题，从 2006 年起，我就集中精力研究这个问题，和以前一样，通过大量的计算，了解 Keller 覆盖的结构，了解参数曲线对应的纤维化的结构，称这样的纤维化为 Keller 纤维化。

黄孝军教授访问上海时问我最近在研究什么问题，我说雅可比猜想。他马上建议说，你不能对外这么说，否则别人会以为你准备不做数学了。我觉得他说的很有道理，在研究的过程中没有对外透漏任何信息。

我结合 Keller 覆盖，开始计算 Keller 纤维化的不变量，试图从不变量来证明猜想。2008 年在博士生的讨论班上，我发现以前得到的公式在亏格 1 时与小平邦彦的公式一样，他把不变量称为模函数的不变量，或者 j 不变量，我一下子觉得这些公式非常重要，即使不研究雅可比猜想，这些不变量也值得再进行研究。

萧荫堂，Esnault，Viehweg 在越南河内组织了一个代数几何会议，《越南数学学报》计划出一期代数几何与复几何的专辑，邀请参会人员投稿。我在投稿的文章中正式将参数曲线的不变量叫“模不变量”。

Keller 纤维化不变量的计算带来了大量新的问题，博士研究生和几个同事也开始研究这些问题，我告诉他们，这些问题来自对一个大猜想的研究，学生们也一直在猜到底是哪一个大问题。

第一个需要进一步研究的问题是奇异纤维的陈数的性质。1996 年我已经得到了一些关系式，比如奇异纤维的宫冈-丘成桐不等式 $c_1^2(F) \leq 2c_2(F)$，典范类不等式 $c_1^2(F) \leq 4g-4$ 等。有了计算公式，我们可以研究非半稳定纤维化的几个问题，因此发现了很多新应用。

- 苏州大学的龚成计算了亏格 2 奇异纤维的陈数，发现 $c_1^2(F) \leq \frac{1}{2}c_2(F)$.
- 与陆俊合作，进一步研究了奇异纤维的不等式。对满足 $2c_2(F) - c_1^2(F) < 6$ 的奇异纤维进行了分类。证明典范类不等式是严格的，分类了满足 $c_1^2(F) > 4g - 5.5$ 的奇异纤维，共 22 类，亏格不超过 6. 有例子说明满足 $c_1^2(F) = 4g - 5.5$ 的奇异纤维的亏格可以到无穷。终于实现了肖刚利用不变量来分类奇异纤维的愿望。
- 与龚成、陆俊合作，证明具有 2 条奇异纤维的纤维化 $f: S \to \mathbb{P}^1$ 的曲面的第一陈数不超过 -2，并对亏格 2 时的纤维化进行了分类，共 11 类。
- 与龚成、吕鑫合作，证明具有 3 条奇异纤维，其中 2 条半稳定，的纤维化 $f: S \to \mathbb{P}^1$ 的曲面的第一陈数在 $4-4g$ 和$-2g$ 之间，有无穷多例子达到下界。
- 与刘小雷合作，解决了肖刚 1991 年在他的专著中提出的一个问题，构造了

具有最大斜率的超椭圆纤维化的例子。

- 与刘小雷合作，给出了有效 Bogomolov 猜想的一致下界估计，即得到函数域上代数点的高度的一致下界。
- 与刘小雷合作，建立了纤维化的陈数的下界不等式，亏格 2 时是最佳的。
- 与陆俊，于飞，左康合作，建立了纤维化曲面的霍奇数 $h^{1,1}$ 的一个新不等式，可以推出之前其他人建立的所有 Arakelov 不等式。
- 与吕鑫合作，得到一般型代数曲面阿贝尔自同构群的最佳上界 $12.5c_1^2+100$. 首个线性界 $54c_1^2+32$ 是肖刚在 1990 年得到的。对具有亏格 2 纤维化的曲面的最佳上界是陈志杰于 1997 年得到的，他猜想这个界对所有曲面都是最佳的。我们证实了这个猜想，论文很长，几天前，在美国数学会的 Memoirs 的 1576 卷上出版。

最开始的几篇文章，从概念到研究的问题都是我们提出来的，能被接受发表，实属不易。

三、从参数曲线到常微分方程：庞加莱问题。我对 Keller 映射的计算主要包含两个方面。一是把它作为有限覆盖来计算，计算分歧曲线，奇点解消，典范除子，不变量等。二是计算两个 Keller 纤维化的奇异纤维的结构，模典范除子，陈省身数等。边计算边记录结果。

到了 2012 年 6 月，学校安排我担任数学系的系主任，我知道可能做研究的时间会受到影响，就开始把现有结果整理成文，发现已经记满了 5 个笔记本。同时仔细研读其他人用纤维化研究雅可比猜想的论文，总的来说，这样的论文不多，很多论文是错的，我就转而重点关注几个专家的论文，比如，Le Dung Trang 等。

在代数几何中，我们把参数曲线都通过的点叫参数曲线的“基点”，但这些文章中都把它称为 dicritical 奇点，网上搜索这个概念，发现都是研究微分方程的人在使用这个概念，他们在研究“庞加莱问题”。顺藤摸瓜，找到了庞加莱和潘勒维在 1891 年的原文，他们首先使用了这个概念。

读到庞加莱的文章让我很吃惊，他在 1891 年的文章中就建议用参数曲线的方法研究常微分方程，即下述形式的一阶微分方程，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}\ .$$

达布 1878 年前就开始在复射影平面上研究它。庞加莱说，自从达布的工作以来，这个问题被几何学家忽视了 20 年。

为什么要用参数曲线研究微分方程？假设微分方程有首次有理积分，也就是说存在有理函数 $\varphi(x,y)=\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ ，使得微分方程由 $d\varphi=0$ 得到，即微分方程为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{gf_x-fg_x}{fg_y-gf_y}\ .$$

微分方程的解集就是参数曲线 $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=t$，即 $f(x,y)-tg(x,y)=0$，所以参数曲线也是某微分方程的解，这样的微分方程称为代数可积的。也就是说，参数曲线的研究是微分方程研究的一部分。

黎曼引进了复代数曲线的拓扑不变量亏格，对具有相同规格的代数曲线作了精细分类，建立了曲线分类的模空间，因此有更多的拓扑工具研究参数曲线。庞加莱明确建议：

1）先寻找参数曲线的拓扑不变量，例如参数曲线的亏格，检查哪些是微分方程的不变量，即可以用参数曲线的微分方程的量来计算。

2）对那些是微分方程不变量的量，用相同的公式，对任意的微分方程定义相应的不变量，即将参数曲线的不变量推广到任意的微分方程。

然后用这些不变量解决微分方程的问题。庞加莱和潘勒维关心的问题如下。

庞加莱问题：是否可以判断一个微分方程的代数可积性？

潘勒维问题：亏格是否是微分方程的不变量？ 代数可积的微分方程的解参数曲线的亏格是否可以由微分方程确定？

希尔伯特关注的是微分方程的极限环问题，所以提出了希尔伯特第 16 问题。问题的第一部分是参数曲线的拓扑问题，第二部分是微分方程极限环的个数与位置问题。希尔伯特说，他是和庞加莱交流后提出这个问题的。这时我完全明白了张芷芬教授说的代数几何方法。

100 多年后，庞加莱的问题才再次引起人们的注意。上世纪末，受到森重文极小模型理论的影响（森重文因为这项工作获得菲尔兹奖），人们开始用参数曲线理论研究微分方程，这个理论被称为代数曲面叶层化（Foliation），将代数曲面的纤维化理论推广到代数曲面的叶层化。

参数曲线的极小正常交模型	推广为	微分方程的极小模型
参数曲线的模典范除子	推广为	微分方程的典范除子
参数曲线的小平维数	推广为	微分方程的小平维数
参数曲线的多重几何亏格	推广为	微分方程的多重几何亏格
参数曲线的陈省身数	推广为	微分方程的陈省身数

最后一项推广是我们的工作。近 30 年来，人们依据小平维数把微分方程分为 4 类。前三类了解得比较清楚，最后一类，也是最大的一类，称为一般型的微分方程，人们一点办法都没有。类比代数曲面的分类问题，现在知道，是因为缺乏陈省身数这个不变量，缺乏诺特不等式等。一般型参数曲线最简单的情形就是肖刚分类的亏格 2 纤维化，如何将肖刚的这项工作推广到微分方程将是近 20 年要研究的核心问题。我们申请了国家自然科学基金重点项目专门研究这个问题。

2004 年，Lins Neto 构造了反例，说明有些微分方程的代数可积性不能由不变量决定，亏格也不是微分方程的不变量。

另一方面，我们利用引进的微分方程的陈数和肖刚斜率不等式，发现对某些类型的微分方程，庞加莱问题和潘勒维问题的答案是肯定的，就是代数可积性可以用陈数来判断，亏格也可以用肖刚的斜率不等式来确定。

四、在微分方程研究上的最新成果。2013 年开始，在研究雅可比猜想的同时，我又开始用参数曲线研究微分方程，只要把陈数公式转化到正常交模型，很快就发现公式可用微分方程的量表示出来，因此马上得到了一个结果，

1）**微分方程的陈省身数**。参数曲线的陈省身数是微分方程的不变量，因此，对任何微分方程 $\alpha = 0$ 可以定义它的陈省身数， $c_1^2(\alpha), c_2(\alpha)$, $\chi(\alpha)$， 它们是非负有理数，双有理不变量，满足诺特公式 $c_1^2(\alpha) + c_2(\alpha) = 12\,\chi(\alpha)$. 因此可以定义微分方程的“肖刚斜率”，

$$\lambda(\alpha) = \frac{c_1^2(\alpha)}{\chi(\alpha)}.$$

2）**微分方程的斜率**。因为代数可积的微分方程有肖刚的斜率不等式，

$$\lambda(\alpha) \geq 4 - \frac{4}{g} \geq 2\,.$$

问题：非代数可积的微分方程的斜率不等式是什么样的？ $\lambda(\alpha) \geq\ ?.$

我们首先是希望找到斜率尽可能小的例子。2014 年之后入学的博士生就开始用纤维化研究微分方程。

- （与洪杰，陆俊合作）利用二次覆盖，构造了斜率最小为 4 的非代数可积的微分方程，2020 年发表。

- （与凌浩，陆俊合作）计算了 Lins Neto 的反例的陈数和斜率：要么陈数都为零， $c_1^2(\alpha) = c_2(\alpha) = 0$ ，要么斜率 $\lambda(\alpha) \geq 6$.（2023 年发表）

3）**部分解决庞加莱问题**。虽然 Lins Neto 有反例，和吕鑫合作研究发现，在很多时候，庞加莱问题的答案是肯定的。例如，

- 斜率小于 2 的微分方程不是代数可积的，这样的例子存在。
- 满足 $c_1^2(\alpha) = 0$, $c_2(\alpha) > 0$ 的微分方程是代数可积的，解是亏格 1 参数曲线，不是常模的。

  注意，Lins Neto 的反例说明，满足 $c_1^2(\alpha) = 0$, $c_2(\alpha) = 0$ 的微分方程的代数可积性不能用不变量来判断。

4）**部分解决潘勒维问题**。和吕鑫合作研究发现，在斜率小的时候可以决定亏格。肖刚的斜率不等式就给出了亏格好的限制。

- 斜率在 2 和 8/3 之间的代数可积微分方程，解是亏格 2 参数曲线。
- 斜率在 8/3 和 3 之间的代数可积微分方程，解是亏格 2 或 3 的参数曲线。
- 斜率 $\lambda(\alpha) < 4$ 的代数可积微分方程，解的亏格有上界

$$g \le \frac{4}{4-\lambda(\alpha)}.$$

注意，Lins Neto 的反例说明，斜率 $\lambda(\alpha) \ge 6$ 的代数可积微分方程的亏格不能由微分方程的不变量来确定。实际上，肖刚在 1987 年就构造了例子说明 $\lambda(\alpha) \ge 4$ 时，斜率固定，亏格可以任意大，因此，不可能有亏格的上界不等式。

5）**建立了微分方程的诺特不等式**。和吕鑫合作，发现了参数曲线和微分方程的两个诺特不等式，并且都是最佳的。

从代数几何分类的经验看，这是一般型微分方程分类的第一步，即使在代数几何中，参数曲线的诺特不等式也没发现过。（十年前，由于没有陈省身数这样的不变量，一般型微分方程的分类问题如何推进一直是一个困扰大家的难题。）

评注： 代数曲面纤维化不变量的系统研究是肖刚开创的具有华东师大特色的研究领域，肖刚的斜率不等式及其独特的研究方法在国内外产生了广泛影响，国内多个团队的研究工作直接受到该项工作的影响，例如，1）高维斜率不等式。2）高维诺特不等式。3）Severi 不等式。4）代数曲面的分类。5）正特征代数曲面。6）动力系统。7）微分方程。8）Arakelov 几何，等。2024 年 5 月份，受张伟平教授的邀请，我在南开陈省身数学研究所做了题为《陈省身数：从代数几何到微分方程》的演讲，当听到肖刚的斜率不等式有这么大的影响后，张教授说，以前知道肖刚很厉害，没想到他这么厉害。

微分方程不变量的研究是肖刚特色研究的传承，他的斜率不等式在这个领域中仍然占有重要的地位，斜率很有可能是对庞加莱问题和潘勒维问题影响最大的不变量。通过微分方程，代数几何中的重要结果将在数学应用、人工智能、信息安全等领域中得到重要应用。近年来，代数几何中的霍奇分解与微分方程的不变量已经在博弈论等领域中得到应用。

2025 年 7 月，我在厦门的天元西南中心开设了 10 小时的课程，为非代数几何专业的学生讲授参数曲线和微分方程的不变量的计算，说明不是代数几何专业的学生同样可以学习和使用这些不变量。我正在将课程内容整理成 101 教材《人工智能的数学基础》中的一部分，方便学生学习。

16. 雅可比猜想的研究和 101 课程的建设

2012 年，我将之前研究雅可比猜想的部分结果进行了整理，作为该项研究的副产品，推动了代数几何在微分方程中的应用。担任院长期间，由于工作繁忙，加上微分方程的研究是一个新领域，雅可比猜想的研究就搁置了近 10 年。

2022 年 1 月，卸任院长后，我继续整理和重新检查以前的计算结果，大部分是关于有限覆盖的典范除子和奇点解消的计算，对不变量只计算过第二陈数，发现计算基本是正确的。接着就开始研究纤维化不变量的计算。

2023 年初，秦厚荣教授打电话给我，说是教育部 101 计划中有一门课，叫代数几何，他建议让我来负责课程和教材的建设。我很高兴地接受了，第一直觉就是这次课程改革创新力度非常大，在国际上也是领先的改革，一定要把任务完

成好。由于从 1996 年开始就开设这门课程，在四川大学和香港中文大学讲授过，已经形成了教材初稿，但要使教材能够满足全国各种不同类型学校的需要，教材的内容，结构，讲法，严密性等都得重新研究，还得配备大量习题。因此，我再次放下了雅可比猜想的研究，把工作重心放在代数几何课程和教材的建设上。一直到 2025 年 2 月，初稿提交到出版社，我才继续原来的计算。

继续整理原来的计算结果，发现已经对 Keller 映射和 Keller 纤维化有了很好的分类结果，但不变量的计算还不够。原始记录中有第二陈数的计算，就是代数曲面的拓扑欧拉示性数的计算，它建立了覆盖次数与分歧点的分歧指数的关系。1986 年，莫斯科的 S. Yu. Orevkov 计算过这个不变量。这次不光是要检查计算的正确性，还要计算出有用的信息。关于第二陈数的计算最终成功了，得到一个关于覆盖次数的公式，它的一个推论就是

1）Keller 映射是满射，即雅可比猜想中的存在性部分得到证明。

当两个 Keller 纤维化有一个的亏格为 0 时，我计算了这个纤维化的第二个不变量：Mordell-Weil 秩，因此，得到了第二个结论，

2）如果有一个 Keller 纤维化的亏格为 0，那么弱雅可比猜想成立。

当两个 Keller 纤维化有一个的亏格为 1 时，我利用小平邦彦的典范除子计算公式，计算出这个纤维化的典范除子（注意，大部分不变量来自典范除子），比较有限覆盖典范除子的计算结果，可以推出矛盾，因此得到了第三个结论，

3）如果有一个 Keller 纤维化的亏格为 1，那么弱雅可比猜想成立。

结论 1）说明 Keller 覆盖是两个平面之间满的且没有分歧的覆盖，我曾经错误的以为这就是一个拓扑覆盖，再由平面的单连通性，马上就得到覆盖次数为 1 的结论，这样就完成了雅可比猜想的证明。

6 月初，我的两个代数专家朋友吴教授和周教授指出这个结论不正确，覆盖不一定是拓扑覆盖。我赶在公开发布之前，从预印本网站上撤下稿件，从杂志编辑那里撤回投稿。

因此，还得回到不变量的计算，排除亏格大于 1 的情形。因为有了结论 2）和 3)，雅可比猜想成立的可能性大增。希望尽快完成手头的事情，再次沉浸于计算之中。

传承导师肖刚教授的精神：没有辛苦的计算，哪有惊奇的发现！

8 月 3 日开始动笔，依据回忆，一气呵成，暂时告一段落。

2025 年 8 月 16 日（凌晨）