

第六讲 函数插值



目录

6.1 多项式插值

6.2 Lagrange 插值

6.3 Newton 插值

6.4 分段低次插值

6.5 三次样条插值

<https://math.ecnu.edu.cn/~jypan/Teaching/SC>

6-3 | Newton 插值

6.3 Newton 插值

6.3.1 差商

6.3.2 Newton 插值公式

为什么 Newton 插值

- Lagrange 插值简单易用, 但若增加插值节点时, 全部基函数需重新计算, 很不方便!
- 解决办法: 寻找新的基函数组, 使得当节点增加时, 只需在原有基函数的基础上再增加一些新的基函数即可.

为什么 Newton 插值

- Lagrange 插值简单易用, 但若增加插值节点时, 全部基函数需重新计算, 很不方便!
- 解决办法: 寻找新的基函数组, 使得当节点增加时, 只需在原有基函数的基础上再增加一些新的基函数即可.

Newton 插值

构造可以逐次生成插值多项式的算法, 即

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + u_{n+1}(x),$$

其中 $p_{n+1}(x)$ 和 $p_n(x)$ 分别为 $f(x)$ 的 $n+1$ 次和 n 次插值多项式, 而且 $u_{n+1}(x)$ 可以很容易地给出.

Newton 插值基函数

设插值节点为 $x_0, x_1, \dots, x_n$, 考虑函数组

$$\phi_0(x) = 1$$

$$\phi_1(x) = x - x_0$$

$$\phi_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

$$\dots \dots$$

$$\phi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).$$

显然, $\phi_k(x)$ 是 k 次多项式且线性无关, 因此它们组成多项式线性空间 $\mathbb{H}_n(x)$ 的一组基.



这就是 **Newton 插值**所采用的基函数组.

Newton 插值

设 $p_n(x)$ 是 $f(x)$ 在节点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 上的 n 次插值多项式, 可以写成

$$p_n(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \cdots + a_n\phi_n(x).$$

Newton 插值

设 $p_n(x)$ 是 $f(x)$ 在节点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 上的 n 次插值多项式, 可以写成

$$p_n(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \cdots + a_n\phi_n(x).$$

需要解决两个问题

- (1) 怎样确定参数 $a_0, a_1, \dots, a_n$?
- (2) 如果得到从 $p_n(x)$ 到 $p_{n+1}(x)$ 的递推方法?

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + u_{n+1}(x)$$

Newton 插值

设 $p_n(x)$ 是 $f(x)$ 在节点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 上的 n 次插值多项式, 可以写成

$$p_n(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \cdots + a_n\phi_n(x).$$

需要解决两个问题

- (1) 怎样确定参数 $a_0, a_1, \dots, a_n$?
- (2) 如果得到从 $p_n(x)$ 到 $p_{n+1}(x)$ 的递推方法?

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + u_{n+1}(x)$$

 解决以上问题, 我们需要用到 **差商**.

6-3-1 | 差商

定义 6.1 设节点 $x_0, x_1, \dots, x_n$, 我们称

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$$

为 $f(x)$ 关于点 x_i, x_j 的**一阶差商**; 称

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i}$$

为 $f(x)$ 关于点 x_i, x_j, x_k 的**二阶差商**; 一般地, 称

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

为 $f(x)$ 关于点 $x_0, x_1, \dots, x_k$ 的 **k 阶差商**.

差商有时也称为 **均差**

差商的计算: 差商表

利用差商的递推定义, 我们可以构造下面的差商表来计算差商.

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	$\cdots$	n 阶差商
x_0	$f(x_0)$					
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$				
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$			
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	
x_n	$f(x_n)$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$\cdots$	$f[x_0, x_1, \dots, x_n]$

例 6.1 已知 $y = f(x)$ 的函数值表如下, 试计算其各阶差商

(Interp_newton_dq.m)

i	0	1	2	3
x_i	-2	-1	1	2
$f(x_i)$	5	3	17	21

解. 通过计算可得差商表如下:

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
-2	5			
-1	3	-2		
1	17	7	3	
2	21	4	-1	-1

6-3-2 | Newton 插值公式

► 根据差商的定义 $f[x, x_0] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 可得 $f(x) = f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0)$

6-3-2 | Newton 插值公式

- ▶ 根据差商的定义 $f[x, x_0] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 可得 $f(x) = f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0)$
- ▶ 同理, 由 $f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x, x_0] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}$ 可得 $f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1)$

6-3-2

Newton 插值公式

- ▶ 根据差商的定义 $f[x, x_0] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 可得 $f(x) = f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0)$
- ▶ 同理, 由 $f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x, x_0] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}$ 可得 $f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1)$
- ▶ 以此类推, 我们有

$$f[x, x_0, x_1] = f[x_0, x_1, x_2] + f[x, x_0, x_1, x_2](x - x_2)$$

$$f[x, x_0, x_1, x_2] = f[x_0, x_1, x_2, x_3] + f[x, x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_3)$$

$$\vdots$$

$$f[x, x_0, \dots, x_{n-2}] = f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] + f[x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}](x - x_{n-1})$$

$$f[x, x_0, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}] = f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n] + f[x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n](x - x_n)$$

依次将后面一式代入前面一式, 可得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \\ &\quad + f[x, x_0, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n) \\ &= N_n(x) + R_n(x) \end{aligned}$$

其中 (令 $a_0 = f(x_0), a_i = f[x_0, x_1, \dots, x_i], \quad i = 1, 2, \dots, n$)

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

$$R_n(x) = f[x, x_0, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n).$$

Newton 插值多项式



直接验证可知

$$R_n(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

所以

$$f(x_i) = N_n(x_i) + R_n(x_i) = N_n(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

即 $N_n(x)$ 是满足插值条件 $N_n(x_i) = f(x_i)$ 的 n 次插值多项式.

这就是 **Newton 插值多项式**.

递推公式

根据 $N_n(x)$ 的表达式, 我们立即可以得到下面的递推公式:

$$N_{n+1}(x) = N_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}] \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

递推公式

根据 $N_n(x)$ 的表达式, 我们立即可以得到下面的递推公式:

$$N_{n+1}(x) = N_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}] \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$



由插值多项式的存在唯一性可知:

$$N_n(x) \equiv L_n(x),$$



插值余项也一样:

$$f[x, x_0, \dots, x_n] \prod_{i=0}^n (x - x_i) \equiv \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

定理 6.1 设 $f(x) \in C^n[a, b]$ (n 阶连续可导), 且 $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a, b) 内存在. 则对 $\forall x \in [a, b]$, 存在 $\xi_x \in (a, b)$ 使得

$$f[x, x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}.$$

注记

- ▶ Newton 插值余项更具实用性, 因为它仅涉及插值点与插值节点的差商, 而不需要计算导数, 因此在导数不存在的情况下仍然可以使用.
- ▶ 但在计算差商 $f[x, x_0, \dots, x_n]$ 时, 由于 $f(x)$ 未知, 只能使用插值得到的近似值, 因此得到的差商可能存在一定的偏差.

例 6.2 已知函数 $f(x) = \ln(x)$ 的函数值如下: (Interp_newton_01.m)

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	-0.9163	-0.6931	-0.5108	-0.3567	-0.2231

试分别用 Newton 线性插值和抛物线插值计算 $\ln(0.54)$ 的近似值.

解. 取插值节点 $x_0 = 0.5, x_1 = 0.6, x_2 = 0.4$, 做差商表:

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商
0.5	-0.6931		
0.6	-0.5108	1.8230	
0.4	-0.9163	2.0275	-2.0450

于是可得, Newton 线性插值在 $x = 0.54$ 上的近似值为

$$N_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) \approx -0.6931 + 1.8230(x - 0.5) \approx -0.6202.$$

Newton 抛物线插值在 $x = 0.54$ 上的近似值为

$$N_2(x) = N_1(x) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \approx -0.6153.$$

Newton 插值的优点

可以看出, 当增加一个节点时, Newton 插值公式只需在原来的基础上增加一项, 前面的计算结果仍然可以使用. 与 Lagrange 插值相比, Newton 插值具有灵活增加插值节点的优点!

几点注记

- 选取插值节点时, 遵循就近原则
- 插值节点无需按大小顺序排列
- Newton 插值只需要使用差商表中对角线部分的值
- 增加插值节点时, 新增的插值点必须排在已有插值节点的后面

Hermite 插值

注记: Hermite 插值

在许多实际应用中, 不仅要求函数值相等, 而且还要求若干阶导数也相等, 如机翼设计等. 设插值节点为 $x_0, x_1, \dots, x_n$, 如果要求插值多项式满足

$$p(x_i) = f(x_i), p'(x_i) = f'(x_i), p''(x_i) = f''(x_i), \dots, p^{(m)}(x_i) = f^{(m)}(x_i).$$

则计算这类插值多项式的方法就称为 **Hermite 插值**.

 在 Hermite 插值中, 并不一定需要在所有插值节点上的导数都相等, 在有些情况下, 可能只需要在部分插值点上的导数值相等即可.

谢谢
THANK YOU

