

第二讲 非线性方程数值解法

目录

2.1 对分法

2.2 不动点迭代法

2.3 Steffensen 迭代法

2.4 Newton 迭代法

2.5 割线法与抛物线法

<https://math.ecnu.edu.cn/~jypan/Teaching/SC>

2-4 | Newton 迭代法

2.4 Newton 迭代法

2.4.1 基本思想与迭代格式

2.4.2 收敛性

2.4.3 简化 Newton 法

2.4.4 Newton 下山法

2.4.5 重根情形

2-4-1 | 基本思想与迭代格式

Newton 迭代法基本思想: 线性化

将 $f(x)$ 在 x_k 处 Taylor 展开可得

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_k)^2.$$

忽略二次项, 可得 $f(x) \approx P(x)$, 其中

$$P(x) \triangleq f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

用 $P(x)$ 的零点来近似 $f(x)$ 的零点, 并将其记为 x_{k+1} .

2-4-1 | 基本思想与迭代格式

Newton 迭代法基本思想: 线性化

将 $f(x)$ 在 x_k 处 Taylor 展开可得

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_k)^2.$$

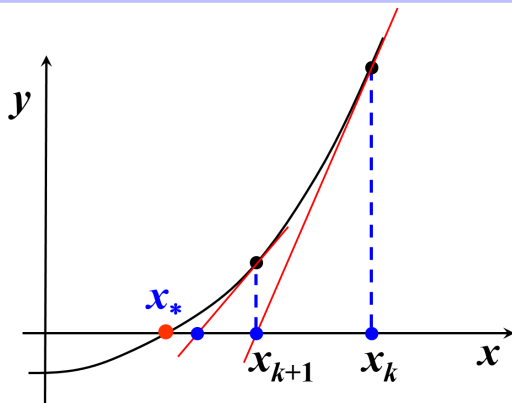
忽略二次项, 可得 $f(x) \approx P(x)$, 其中

$$P(x) \triangleq f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

用 $P(x)$ 的零点来近似 $f(x)$ 的零点, 并将其记为 x_{k+1} .

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

几何意义



以切线近似曲线, 要求 $f'(x) \neq 0$.

Newton 算法

算法 Newton 算法

- 1: 给定迭代初值 x_0 , 精度要求 ε 和最大迭代步数 IterMax
 - 2: **if** $|f(x_0)| < \varepsilon$, **then**
 - 3: 输出近似解 x_0 , 停止迭代
 - 4: **end if**
 - 5: **for** $k = 1$ to IterMax **do**
 - 6: 计算 $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
 - 7: **if** $|x_1 - x_0| < \varepsilon$ 或 $|f(x_1)| < \varepsilon$, **then**
 - 8: 输出近似解 x_1 , 停止迭代 % 算法收敛
 - 9: **end if**
 - 10: $x_0 = x_1$
 - 11: **end for**
-

2-4-2 | Newton 法的收敛性

Newton 法对应的迭代函数为

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

直接计算可得

$$\varphi'(x_*) = 1 - \frac{f'(x_*)f'(x_*) - f(x_*)f''(x_*)}{(f'(x_*))^2} = 0, \quad \varphi''(x_*) = \frac{f''(x_*)}{f'(x_*)}.$$

2-4-2

Newton 法的收敛性

Newton 法对应的迭代函数为

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

直接计算可得

$$\varphi'(x_*) = 1 - \frac{f'(x_*)f'(x_*) - f(x_*)f''(x_*)}{(f'(x_*))^2} = 0, \quad \varphi''(x_*) = \frac{f''(x_*)}{f'(x_*)}.$$

定理 设 x_* 是 $f(x)$ 的零点, 且 $f'(x_*) \neq 0$, 则 Newton 法 **至少二阶局部收敛**, 且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - x_*}{(x_k - x_*)^2} = \frac{\varphi''(x_*)}{2} = \frac{f''(x_*)}{2f'(x_*)}.$$

例 编写程序, 用 Newton 法求 $f(x) = xe^x - 1$ 的零点.

(NLS_Newton_01.m)

解. 迭代格式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k e^{x_k} - 1}{e^{x_k}(x_k + 1)}.$$

取初值 $x_0 = 0.5$, 迭代结果见下表.

k	x	$ f(x) $
	0.50000000	1.76e-01
1	0.57102044	1.07e-02
2	0.56715557	3.39e-05
3	0.56714329	3.41e-10
4	0.56714329	2.22e-16

从表中数据可以看出, Newton 法迭代 4 步就达到机器精度了, 收敛速度非常快.



例 用 Newton 法求 $f(x) = x^2 - C = 0$ 的正根, 并判断收敛性, 其中 $C > 0$.

(板书)

例 用 Newton 法求 $f(x) = x^2 - C = 0$ 的正根, 并判断收敛性, 其中 $C > 0$.

(板书)

 **思考:** 思考: 如果 $x_0 < 0$, 则结果会怎样?

例 用 Newton 法求 $f(x) = x^2 - C = 0$ 的正根, 并判断收敛性, 其中 $C > 0$.

(板书)

 **思考:** 思考: 如果 $x_0 < 0$, 则结果会怎样?

 一般来说 Newton 法只是局部收敛, 如果初值离真解太远可能就不收敛, 因此初值的选取很重要但也比较困难. 幸运得是, 对于计算平方根, Newton 法是全球收敛的, 因此是安全的.

几点说明

Newton 法的优点是收敛速度快 (至少二阶局部收敛), 特别是当迭代点充分靠近精确解时.

缺点是:

- 对重根收敛速度较慢, 只有线性收敛
- 对初值的选取比较敏感, 要求初值相当接近真解
- 每一次迭代都需要计算导数, 难度和工作量都可能会比较大

2-4-3 | 简化 Newton 法

简化 Newton 法: 避免每次的求导运算

用 $f'(x_0)$ 替代所有的 $f'(x_k)$, 这样就只需计算一次导数.

✿ 对应的迭代格式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

2-4-3 | 简化 Newton 法

简化 Newton 法: 避免每次的求导运算

用 $f'(x_0)$ 替代所有的 $f'(x_k)$, 这样就只需计算一次导数.

✿ 对应的迭代格式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

这样做的代价是收敛速度只有 **线性收敛**

2-4-4 | Newton 下山法

Newton 下山法: 克服 Newton 法局部收敛的缺点

要求每一步迭代满足下降条件

$$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$$

即保持函数的绝对值是下降的, 这样就能保证全局收敛性.

2-4-4

Newton 下山法

Newton 下山法: 克服 Newton 法局部收敛的缺点

要求每一步迭代满足下降条件

$$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$$

即保持函数的绝对值是下降的, 这样就能保证全局收敛性.



具体做法是加入一个下山因子 λ , 即

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

► 下山因子 λ 的取法: 从 $\lambda = 1$ 开始, 逐次减半, 直到满足下降条件为止.

2-4-5 | 重根情形

设 x_* 是 $f(x) = 0$ 的 m ($m \geq 2$) 重根, 即

$$f(x) = (x - x_*)^m g(x), \quad g(x_*) \neq 0$$

2-4-5 | 重根情形

设 x_* 是 $f(x) = 0$ 的 m ($m \geq 2$) 重根, 即

$$f(x) = (x - x_*)^m g(x), \quad g(x_*) \neq 0$$

方法一: 直接使用 Newton 法

迭代函数为 $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, 可得 $\varphi'(x_*) = 1 - \frac{1}{m} \neq 0$.

😞 只是局部线性收敛.

重根情形: 方法二

方法二: 改进的 Newton 法

选取迭代函数为

$$\varphi(x) = x - m \frac{f(x)}{f'(x)},$$

则可得

$$\varphi'(x_*) = 0,$$

因此, 至少二阶局部收敛.

😞 缺点是需要知道 m 的值.

重根情形: 方法三

方法三: 构造等价方程, 使得 x_* 是该等价方程的单重根

一种简单的构造方法是令

$$\mu(x) \triangleq \frac{f(x)}{f'(x)},$$

则 x_* 是 $\mu(x)$ 的单重零点.

然后用 Newton 法求解, 迭代函数为

$$\varphi(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = x - \frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}.$$

易知, 该迭代格式至少二阶局部收敛.

☹️ 缺点是计算二阶导数.

重根举例

例 编写程序, 分别用以上三种方法计算 $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ 的二重根 $x_* = \sqrt{2}$.
(NLS_Newton_02.m)

2-5 | Newton 迭代法

2.5 割线法与抛物线法

2.5.1 割线法

2.5.2 抛物线法

2-5-1 | 割线法

出发点: 避免计算导数, 并且尽可能地保持较高的收敛性 (即超线性收敛)

2-5-1 | 割线法

出发点: 避免计算导数, 并且尽可能地保持较高的收敛性 (即超线性收敛)

割线法 (Secant Method) 也称 **弦截法**, 主要思想是 **用差商代替微商**, 即

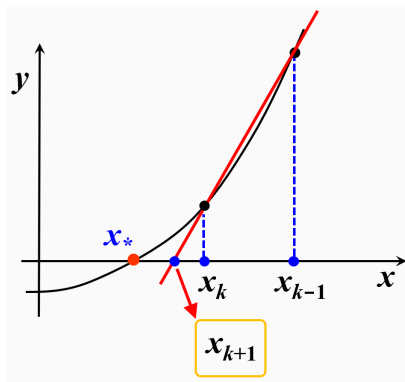
$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

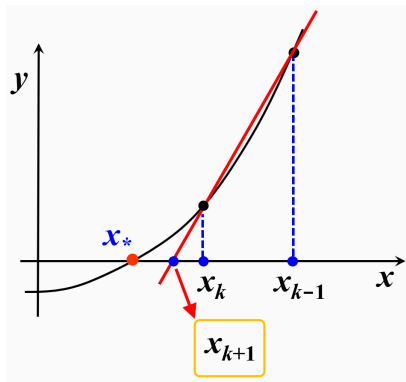
代入 Newton 法即可得 **割线法** 迭代格式:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \quad k = 1, 2, \dots$$



割线法需要提供两个迭代初始值.





定理 设 x_* 是 $f(x)$ 的零点, $f(x)$ 在 x_* 的某邻域 $U(x_*, \delta)$ 内二阶连续可导, 且 $f'(x) \neq 0$. 若初值 $x_0, x_1 \in U(x_*, \delta)$, 则当 δ 充分小时, 割线法具有 p 阶收敛性, 其中

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618,$$

即 p 是 $p^2 - p - 1 = 0$ 的一个根.

2-5-2 | 抛物线法

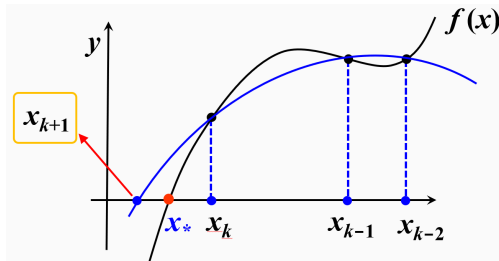
抛物线法的主要思想: 用抛物线来近似 $f(x)$

2-5-2 | 抛物线法

抛物线法的主要思想: 用抛物线来近似 $f(x)$

抛物线法

假定已知三个相邻的迭代值 x_{k-2}, x_{k-1}, x_k , 构造过点 $(x_{k-2}, f(x_{k-2})), (x_{k-1}, f(x_{k-1})), (x_k, f(x_k))$ 的二次曲线 $p_2(x)$, 然后用 $p_2(x)$ 的零点作为下一步的迭代值 x_{k+1} .



- (1) 二次曲线 $p_2(x)$ 可通过函数插值公式实现
- (2) 零点的选取: 此时 $p_2(x)$ 有两个零点, 取靠近 x_k 的那个零点作为 x_{k+1} .
- (3) 在一定条件下可以证明: 抛物线法的局部收敛阶为

$$p \approx 1.840. \quad (p^3 - p^2 - p - 1 = 0)$$

- (1) 二次曲线 $p_2(x)$ 可通过函数插值公式实现
- (2) 零点的选取: 此时 $p_2(x)$ 有两个零点, 取靠近 x_k 的那个零点作为 x_{k+1} .
- (3) 在一定条件下可以证明: 抛物线法的局部收敛阶为

$$p \approx 1.840. \quad (p^3 - p^2 - p - 1 = 0)$$

几点注记

- (1) 与割线法相比, 抛物线法具有更高的收敛阶.
- (2) 抛物线法可能涉及复数运算, 可以用来求复根.
- (3) 抛物线法需提供三个初始值.
- (4) 抛物线法也称为 **Muller 法**.

谢谢
THANK YOU

