

第八讲 数值积分与数值微分



目录

8.1 数值积分基本概念

8.2 插值型求积公式

8.3 Newton-Cotes 公式

8.4 复合求积公式

8.5 带导数的求积公式

8.6 Romberg 求积公式

8.7 Gauss 求积公式

8.8 多重积分

8.9 数值微分

<https://math.ecnu.edu.cn/~jypan/Teaching/NA>

8-8

多重积分

基本思想

计算多重积分的基本思想是化为累次积分, 然后逐个进行数值积分.

8-8 | 多重积分

基本思想

计算多重积分的基本思想是化为累次积分, 然后逐个进行数值积分.

二重积分: 矩形区域 $\Omega = [a, b] \times [c, d]$

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) \, dx.$$

二重积分

二重积分: x 型区域 $\Omega = [a, b] \times [y_1(x), y_2(x)]$

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

二重积分: y 型区域 $\Omega = [x_1(y), x_2(y)] \times [c, d]$

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

例 利用两点 Gauss 公式计算二重积分 $\int_{\Omega} (x^2 + 2y^2) dx$, 其中 $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$.
(留作课外练习)

 为了提高计算精度, 通常也使用复合求积公式.

8-9 | 数值微分



基本想法与数值积分类似, 即用函数值的线性组合来近似某点的导数值.

8-9 | 数值微分



基本想法与数值积分类似, 即用函数值的线性组合来近似某点的导数值.

插值型求导公式

设 $p_n(x)$ 是 $f(x)$ 基于节点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 的插值多项式, 则可用 $p_n(x)$ 的导数来近似 $f(x)$ 的导数, 即

$$f'(x) \approx p'_n(x).$$

这就是插值型求导公式.

误差

由插值余项公式可知

$$f'(x) - p'_n(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) \right)$$

误差

由插值余项公式可知

$$f'(x) - p'_n(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) \right)$$



假定 $f^{(n+1)}(\xi_x)$ 关于 x 可导, 则当 x 是节点时, 即 $x = x_i$, 有

$$f'(x_i) - p'_n(x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega'_{n+1}(x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{k=0, k \neq i}^n (x_i - x_k).$$



我们通常只考虑节点处的导数值, 其他点的导数可通过插值等手段获得.

一阶导数的差分近似: 两点公式

两点公式

设节点 x_0, x_1 , 记 $h = x_1 - x_0$, 则可得一次插值多项式

$$p_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1).$$

因此

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= p'_1(x_0) + \frac{f''(\xi_0)}{2}(x_0 - x_1) = \frac{1}{h}(f(x_1) - f(x_0)) - \frac{h}{2}f''(\xi_0), \\ f'(x_1) &= p'_1(x_1) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(x_1 - x_0) = \frac{1}{h}(f(x_1) - f(x_0)) + \frac{h}{2}f''(\xi_1). \end{aligned}$$

一阶导数的差分近似: 三点公式

考虑等距节点 $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$, 对应的二次 Lagrange 插值多项式为

$$p_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

一阶导数的差分近似: 三点公式

考虑等距节点 $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$, 对应的二次 Lagrange 插值多项式为

$$p_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

做变量代换: $x = x_0 + th$, 则

$$p_2(t) = \frac{1}{2}(t - 1)(t - 2)f(x_0) + t(t - 2)f(x_1) + \frac{1}{2}t(t - 1)f(x_2).$$

一阶导数的差分近似: 三点公式

考虑等距节点 $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$, 对应的二次 Lagrange 插值多项式为

$$p_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

做变量代换: $x = x_0 + th$, 则

$$p_2(t) = \frac{1}{2}(t - 1)(t - 2)f(x_0) + t(t - 2)f(x_1) + \frac{1}{2}t(t - 1)f(x_2).$$

于是

$$\frac{dp_2}{dt} = \frac{1}{2}((2t - 3)f(x_0) - 4(t - 1)f(x_1) + (2t - 1)f(x_2)).$$

一阶导数的差分近似: 三点公式

考虑等距节点 $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$, 对应的二次 Lagrange 插值多项式为

$$p_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

做变量代换: $x = x_0 + th$, 则

$$p_2(t) = \frac{1}{2}(t - 1)(t - 2)f(x_0) + t(t - 2)f(x_1) + \frac{1}{2}t(t - 1)f(x_2).$$

于是

$$\frac{dp_2}{dt} = \frac{1}{2}((2t - 3)f(x_0) - 4(t - 1)f(x_1) + (2t - 1)f(x_2)).$$

所以

$$\frac{dp_2}{dx} = \frac{dp_2}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2h}((2t - 3)f(x_0) - 4(t - 1)f(x_1) + (2t - 1)f(x_2)).$$

分别令 $x = x_0, x_1, x_2$, 即 $t = 0, 1, 2$, 可得

$$p_2'(x_0) = \frac{1}{2h}(-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)),$$

$$p_2'(x_1) = \frac{1}{2h}(f(x_2) - f(x_0)),$$

$$p_2'(x_2) = \frac{1}{2h}(f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)).$$

分别令 $x = x_0, x_1, x_2$, 即 $t = 0, 1, 2$, 可得

$$p_2'(x_0) = \frac{1}{2h}(-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)),$$

$$p_2'(x_1) = \frac{1}{2h}(f(x_2) - f(x_0)),$$

$$p_2'(x_2) = \frac{1}{2h}(f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)).$$

加上误差项, 于是有

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}(-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)) + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0),$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h}(f(x_2) - f(x_0)) - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1),$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{2h}(f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)) + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_2).$$

这就是 **三点求导公式**, 其中第二个是常用的 **中心差分公式**.

二阶导数的差分近似

计算 $p_2(x)$ 关于 x 的二阶导数可得

$$\frac{d^2 p_2}{dx^2} = \frac{1}{h^2} (f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)).$$

二阶导数的差分近似

计算 $p_2(x)$ 关于 x 的二阶导数可得

$$\frac{d^2 p_2}{dx^2} = \frac{1}{h^2} (f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)).$$

加上误差项, 于是有

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2} (f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi).$$

这就是计算二阶导数常用的 **中心差分公式**.

二阶导数的差分近似

计算 $p_2(x)$ 关于 x 的二阶导数可得

$$\frac{d^2 p_2}{dx^2} = \frac{1}{h^2} (f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)).$$

加上误差项, 于是有

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2} (f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi).$$

这就是计算二阶导数常用的 **中心差分公式**.

 事实上, 以上计算一阶导数和二阶导数的中心差分公式都可以从 Taylor 展开式得到.

其他方法

➤ 三次样条求导

➤ 外推算法

➤

谢谢
THANK YOU

