

# 第六讲 函数插值



## 目录

- 6.1 多项式插值
- 6.2 Lagrange 插值
- 6.3 Newton 插值
- 6.4 Hermite 插值
- 6.5 分段低次插值
- 6.6 三次样条插值**

# 6-6 | 三次样条插值

## 6.6 三次样条插值

6.6.1 三次样条函数

6.6.2 边界条件

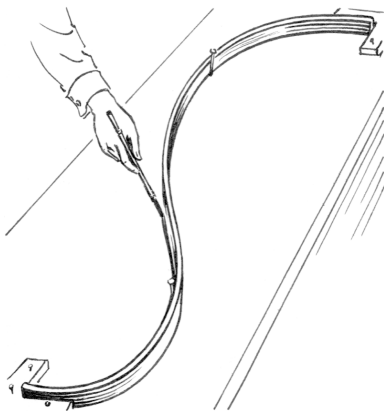
6.6.3 三次样条函数的计算

6.6.4 误差估计

## 为什么三次样条函数插值

为了增加分段插值函数的 **光滑性**, 我们可以采用 **样条函数** 进行插值.

比如目前常用的三次样条函数, 它具有二阶连续导数.



# 6-6-1 | 三次样条函数

**定义** 设  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$  为  $[a, b]$  上的互异节点, 已知  $f(x)$  在这些节点上的函数值为  $f(x_k) = f_k, k = 0, 1, \dots, n$ . 求插值函数  $S(x)$  满足

- (1)  $S(x) \in C^2[a, b]$ , 即二阶连续可导;
  - (2)  $S(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$ ;
  - (3)  $S(x)$  是分段三次函数, 即在每个小区间  $[x_{k-1}, x_k]$  上是三次多项式.
- 这就是**三次样条插值**,  $S(x)$  就称为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的**三次样条插值函数**.

# 三次样条函数

**定义 (三次样条函数)** 设  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$  为  $[a, b]$  上的互异节点, 若函数  $S(x) \in C^2[a, b]$ , 且在每个小区间  $[x_k, x_{k+1}]$  上是三次多项式, 则称其为**三次样条函数**.

 将  $S(x)$  在小区间  $[x_{k-1}, x_k]$  上的表达式记为  $s_k(x)$ , 即

$$S(x) = s_k(x), \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

其中  $s_k(x)$  是三次多项式, 且满足  $s_k(x_{k-1}) = f_{k-1}, \quad s_k(x_k) = f_k$ . 于是

$$S(x) = \begin{cases} s_1(x), & x \in [x_0, x_1] \\ s_2(x), & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots \\ s_n(x), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

## $s_k(x)$ 的表达式

由于  $S(x) \in C^2[a, b]$ , 所以  $S'(x_k^-) = S'(x_k^+)$ ,  $S''(x_k^-) = S''(x_k^+)$ , 即

$$s'_k(x_k^-) = s'_{k+1}(x_k^+), \quad s''_k(x_k^-) = s''_{k+1}(x_k^+), \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

- ▶ 每个  $s_k(x)$  均为三次多项式, 有 4 个待定系数, 所以共有  $4n$  个待定系数, 故需  $4n$  个方程.
- ▶ 由前面的插值条件可得  $2n + 2(n-1) = 4n - 2$  个方程, 还缺 2 个方程!

### 边界条件

实际问题中, 通常会对样条函数  $S(x)$  在两个端点  $x = a$  和  $x = b$  处的状态有一定的要求, 这就是边界条件.

# 6-6-2 | 边界条件

## 三类常用的边界条件

- (1) **第一类边界条件**: 指定函数在两端点处的一阶导数, 即

$$S'(x_0) = f'_0, \quad S'(x_n) = f'_n$$

- (2) **第二类边界条件**: 指定函数在端点处的二阶导数, 即

$$S''(x_0) = f''_0, \quad S''(x_n) = f''_n.$$

如果  $f''_0 = f''_n = 0$ , 则称为**自然边界条件**, 此时  $S(x)$  称为**自然样条函数**.

- (3) **第三类边界条件**: 假定  $f(x)$  是以  $x_n - x_0$  为周期的周期函数, 于是要求  $S(x)$  也是周期函数

$$S(x_0) = S(x_n), \quad S'(x_0^+) = S'(x_n^-), \quad S''(x_0^+) = S''(x_n^-).$$

此时  $S(x)$  称为**周期样条函数**.

# 6-6-3

## 三次样条函数

由于  $S(x)$  二阶可导, 所以可设

$$S''(x_k) = M_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

下面我们用  $M_k$  来表示  $S(x)$ . 考虑  $S(x)$  在区间  $[x_{k-1}, x_k]$  上的表达式  $s_k(x)$ , 满足

$$s_k''(x_{k-1}) = M_{k-1}, \quad s_k''(x_k) = M_k.$$

由于  $s_k(x)$  是三次多项式, 故  $s_k''(x)$  为线性函数, 由线性插值公式可知

$$s_k''(x) = \frac{x_k - x}{h_k} M_{k-1} + \frac{x - x_{k-1}}{h_k} M_k,$$

其中  $h_k = x_k - x_{k-1}$ . 两边在  $[x_{k-1}, x_k]$  上积分两次后可得

$$s_k(x) = \frac{(x_k - x)^3}{6h_k} M_{k-1} + \frac{(x - x_{k-1})^3}{6h_k} M_k + c_1 x + c_2, \quad (c_1, c_2 \text{ 为积分常数, 待定})$$

# 三次样条函数的计算

将  $s_k(x_{k-1}) = f_{k-1}$ ,  $s_k(x_k) = f_k$  代入后可得

$$c_1 = \frac{1}{h_k}(f_k - f_{k-1}) - \frac{h_k}{6}(M_k - M_{k-1}) = \frac{1}{h_k} \left[ \left( f_k - \frac{M_k h_k^2}{6} \right) - \left( f_{k-1} - \frac{M_{k-1} h_k^2}{6} \right) \right],$$
$$c_2 = f_{k-1} - \frac{M_{k-1} h_k^2}{6} - c_1 x_{k-1} = \frac{x_k}{h_k} \left( f_{k-1} - \frac{M_{k-1} h_k^2}{6} \right) - \frac{x_{k-1}}{h_k} \left( f_k - \frac{M_k h_k^2}{6} \right).$$

所以

$$s_k(x) = \frac{(x_k - x)^3}{6h_k} M_{k-1} + \frac{(x - x_{k-1})^3}{6h_k} M_k \\ + \frac{x_k - x}{h_k} \left( f_{k-1} - \frac{M_{k-1} h_k^2}{6} \right) + \frac{x - x_{k-1}}{h_k} \left( f_k - \frac{M_k h_k^2}{6} \right).$$

即  $s_k(x)$  可表示成  $x_k - x$  和  $x - x_{k-1}$  的奇次项的线性组合.

## 三次样条函数的计算 (续)

将  $x_k = x_{k-1} + h_k$  代入, 整理后可得

$$s_k(x) = \frac{M_k - M_{k-1}}{6h_k}(x - x_{k-1})^3 + \frac{M_{k-1}}{2}(x - x_{k-1})^2 \\ + \left( \frac{f_k - f_{k-1}}{h_k} - \frac{h_k(M_k + 2M_{k-1})}{6} \right) (x - x_{k-1}) + f_{k-1}.$$

现在, 问题转化为如何确定  $M_0, M_1, \dots, M_n$  的值?

# $M_k$ 的计算

由于  $S(x) \in C^2[a, b]$ , 所以在节点处的一阶导数存在, 故

$$S'(x_k^-) = S'(x_k^+), \quad \text{即} \quad s'_k(x_k^-) = s'_{k+1}(x_k^+), \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

所以可得方程

$$\frac{h_k}{6}M_{k-1} + \frac{h_k + h_{k+1}}{3}M_k + \frac{h_{k+1}}{6}M_{k+1} = \frac{f_{k+1} - f_k}{h_{k+1}} - \frac{f_k - f_{k-1}}{h_k}.$$

两边除以  $\frac{h_k + h_{k+1}}{6}$ , 上述方程改写为

$$\mu_k M_{k-1} + 2M_k + \lambda_k M_{k+1} = d_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

$$\text{其中 } \mu_k = \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}}, \lambda_k = 1 - \mu_k, d_k = \frac{6(f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k])}{h_k + h_{k+1}} = 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}].$$

►  $n+1$  个变量, 但只有  $n-1$  个方程, 需要通过边界条件增加两个方程.

## (1) 第一类边界条件: 指定两端点处的一阶导数

$$S'(x_0) = f'_0, \quad S'(x_n) = f'_n \quad \longrightarrow \quad s'_1(x_0^+) = f'_0, \quad s'_n(x_n^-) = f'_n$$

可得:  $2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_1}(f[x_0, x_1] - f'_0), \quad M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_n}(f'_n - f[x_{n-1}, x_n]).$

令  $d_0 = \frac{6}{h_1}(f[x_0, x_1] - f'_0), d_n = \frac{6}{h_n}(f'_n - f[x_{n-1}, x_n]),$  与前面  $n - 1$  个方程联立可得

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

(严格对角占优)

## (2) 第二类边界条件: 指定两 endpoint 处的二阶导数

$$S''(x_0) = f_0'', \quad S''(x_n) = f_n'' \quad \longrightarrow \quad M_0 = f_0'', \quad M_n = f_n''$$

可得方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - \mu_1 f_0'' \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} f_n'' \end{bmatrix}$$

(严格对角占优)

### (3) 第三类边界条件: 要求 $S(x)$ 是周期函数

$$S'(x_0^+) = S'(x_n^-), \quad S''(x_0^+) = S''(x_n^-) \quad \longrightarrow \quad s'_1(x_0^+) = s'_n(x_n^-), \quad s''_1(x_0^+) = s''_n(x_n^-)$$

可得  $\lambda_n M_1 + \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n, \quad M_0 = M_n$

其中  $\lambda_n = \frac{h_0}{h_0 + h_{n-1}}, \quad \mu_n = \frac{h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}}, \quad d_n = \frac{6(f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n])}{h_1 + h_n}.$

方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

(严格对角占优)

## 三弯矩方程

由于  $M_k$  在力学中解释为细梁在  $x_k$  截面处的弯矩, 因此前面的方程组在工程中称为**三弯矩方程**.

## 具体计算过程

由上面的分析可知, 三次样条插值的具体计算过程如下:

- (1) 根据给定的插值条件和边界条件写出关于  $M_0, M_1, \dots, M_n$  的线性方程组;
- (2) 解线性方程组, 求得  $M_k$ ;
- (3) 将  $M_k$  代入  $s_k(x)$  的表达式, 得到  $S(x)$  在插值区间  $[a, b]$  上的分段表达式.

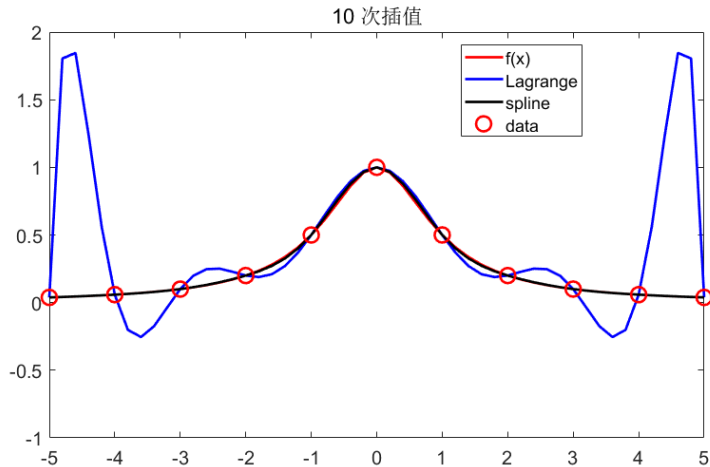
三次样条插值的优点: 二阶连续可导, 且只需利用插值节点上的函数值, 加上边界条件.

**例** 函数  $f(x)$  定义在  $[27.7, 30]$  上, 插值节点及相应函数值下表, 试求三次样条插值多项式  $S(x)$ , 满足边界条件  $S'(27.7) = 3.0, S'(30) = -4.0$ . (Interp\_spline\_01.m)

|        |      |     |     |     |
|--------|------|-----|-----|-----|
| $x$    | 27.7 | 28  | 29  | 30  |
| $f(x)$ | 4.1  | 4.3 | 4.1 | 3.0 |

(板书)

**例** 函数  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , 插值区间  $[-5, 5]$ , 取 11 个等距节点 (10 等分), 试画出 10 次插值多项式  $L_{10}(x)$  与三次样条插值多项式  $S(x)$  的函数图形. (Interp\_spline\_02.m)

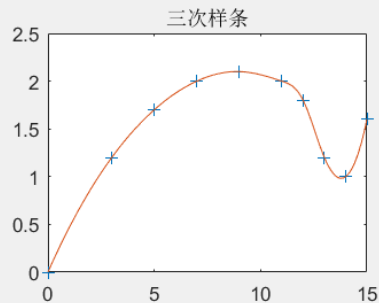
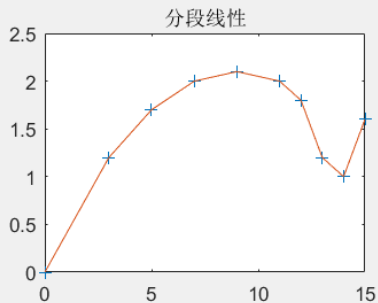
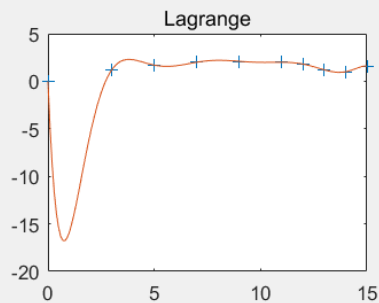
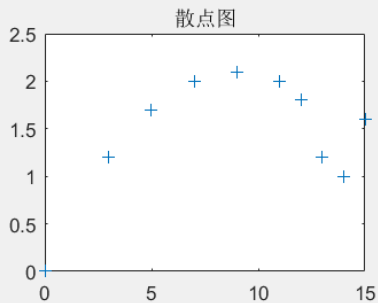


### 例 机床加工.

待加工零件的外形根据工艺要求由一组数据  $(x, y)$  给出, 用程控铣床加工时每一刀只能沿  $x$  方向和  $y$  方向走非常小的一步, 这就需要从已知数据得到加工所要求的步长很小的  $(x, y)$  坐标. 下表中给出的  $x, y$  数据位于机翼断面的下轮廓线上, 假设需要得到  $x$  坐标每改变 0.1 时的  $y$  坐标. 试完成加工所需数据, 画出曲线. 要求用 Lagrange, 分段线性和三次样条三种插值方法计算.

(Interp\_spline\_03.m)

|     |   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $x$ | 0 | 3   | 5   | 7   | 9   | 11  | 12  | 13  | 14  | 15  |
| $y$ | 0 | 1.2 | 1.7 | 2.0 | 2.1 | 2.0 | 1.8 | 1.2 | 1.0 | 1.6 |



# 6-6-4 | 误差估计

**定理** 设  $f(x) \in C^4[a, b]$ ,  $S(x)$  为满足第一类或第二类边界条件的三次样条函数, 则

$$\begin{aligned}\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - S(x)| &\leq \frac{5}{384} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| h^4, \\ \max_{a \leq x \leq b} |f'(x) - S'(x)| &\leq \frac{1}{24} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| h^3, \\ \max_{a \leq x \leq b} |f''(x) - S''(x)| &\leq \frac{3}{8} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| h^2,\end{aligned}$$

其中  $h = \max_{0 \leq k \leq n-1} \{h_k\}$ .

(证明可参见相关资料)

 该定理说明, 当  $h \rightarrow 0$  时,  $S(x)$  及其一阶导数  $S'(x)$  和二阶导数  $S''(x)$  均收敛到  $f(x)$  及其一阶导数  $f'(x)$  和二阶导数  $f''(x)$ .

谢谢  
THANK YOU

