

第六讲 函数插值



目录

- 6.1 多项式插值
- 6.2 Lagrange 插值
- 6.3 Newton 插值
- 6.4 Hermite 插值
- 6.5 分段低次插值**
- 6.6 三次样条插值

6-5 | 分段低次插值

6.5 分段低次插值

6.5.1 分段线性插值

6.5.2 分段三次 Hermite 插值

为什么分段插值

➤ 由 Runge 现象可知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 插值多项式 $L_n(x)$ 并不一定收敛于 $f(x)$.

怎样才能构造出收敛的插值方法 (即插值误差趋于零)?

➤ 从插值余项入手, 包括两部分: $f(x)$ 的 $n+1$ 阶导数和 $\omega_{n+1}(x)$, 即

$$\max_{a \leq x \leq b} |R_n(x)| = \max_{a \leq x \leq b} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) \right| \leq \max_{a \leq x \leq b} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \right| \max_{a \leq x \leq b} |\omega_{n+1}(x)|$$

尽可能降低 $\max_{a \leq x \leq b} |\omega_{n+1}(x)|$ 的大小! $\rightarrow$ 减小插值区间 $[a, b]$ 的长度.

分段插值

分段插值

将插值区间分割成若干小区间, 然后在每个小区间上进行插值, 这样就可以降低每个小区间上的插值误差, 从而减小在整个区间上插值的误差.

两类常用的分段插值方法

- ▶ 分段线性插值
- ▶ 分段三次 Hermite 插值

6-5-1 | 分段线性插值

定义 设 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 为 $[a, b]$ 上的互异节点, 已知 $f(x)$ 在这些节点上的函数值为 $f_0, f_1, \dots, f_n$, 求分段函数 $I_h(x)$ 满足

- (1) $I_h(x) \in C[a, b]$;
- (2) $I_h(x_k) = f_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$;
- (3) $I_h(x)$ 在每个小区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上是线性多项式, $k = 1, 2, \dots, n$.

这就是**分段线性插值**, $I_h(x)$ 就称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的**分段线性插值函数**.

 **注意:** 这里要求 x_i 按顺序排列.

分段线性插值

由定义可知 $I_h(x)$ 在小区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的表达式为

$$I_h(x) = \frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k} f_{k-1} + \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} f_k, \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

且在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上满足

$$\|f(x) - I_h(x)\|_\infty \leq \frac{1}{2!} \|f''(x)\|_\infty \|(x - x_{k-1})(x - x_k)\|_\infty \leq \frac{h_k^2}{8} \max_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} |f''(x)|,$$

其中 $h_k = x_k - x_{k-1}$.

分段线性插值的收敛性

定理 若 $f(x) \in C^2[a, b]$, 则分段线性插值函数 $I_h(x)$ 的误差满足

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - I_h(x)| \leq \frac{M_2}{8} h^2,$$

其中 $M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$, $h = \max_{1 \leq k \leq n} \{h_k\}$. 所以

$$\lim_{h \rightarrow 0} I_h(x) = f(x)$$

在 $[a, b]$ 上一致成立, 即 $I_h(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $f(x)$.

注记

- ▶ 分段线性插值的优点: 简单易用, 关于 h 二阶收敛
- ▶ 分段线性插值的缺点: 插值函数 $I_h(x)$ 在插值节点处不可导.

 思考: 如何构造分段抛物线插值函数? 误差是多少?

6-5-2

分段三次 Hermite 插值

定义 设 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 为 $[a, b]$ 上的互异节点, 已知 $f(x)$ 在这些节点上的函数值和导数分别为 $f_0, f_1, \dots, f_n$ 和 $f'_0, f'_1, \dots, f'_n$, 求分段函数 $I_h(x)$ 满足

- (1) $I_h(x) \in C^1[a, b]$;
- (2) $I_h(x_k) = f_k, I'_h(x_k) = f'_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$;
- (3) $I_h(x)$ 在每个小区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上是三次多项式.

这就是**分段三次 Hermite 插值**, $I_h(x)$ 就称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的**分段三次 Hermite 插值函数**.

分段三次 Hermite 插值

由两点三次 Hermite 插值公式可知, $I_h(x)$ 在小区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的表达式为

$$\begin{aligned} I_h(x) = & \left(1 + 2\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\right) \left(\frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k}\right)^2 f_{k-1} \\ & + \left(1 + 2\frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k}\right) \left(\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\right)^2 f_k \\ & + (x - x_{k-1}) \left(\frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k}\right)^2 f'_{k-1} + (x - x_k) \left(\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\right)^2 f'_k, \\ & x \in [x_{k-1}, x_k]. \end{aligned}$$

误差满足 $\max_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} |f(x) - I_h(x)| \leq \frac{h_k^4}{384} \max_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} |f^{(4)}(x)|$, 其中 $h_k = x_k - x_{k-1}$.

分段三次 Hermite 插值的收敛性

定理 若 $f(x) \in C^4[a, b]$, 则分段三次 Hermite 插值函数 $I_h(x)$ 的误差满足

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - I_h(x)| \leq \frac{M_4}{384} h^4,$$

其中 $M_4 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$, $h = \max_{1 \leq k \leq n} \{h_k\}$.

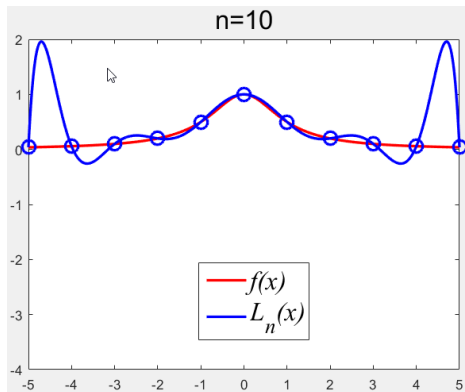
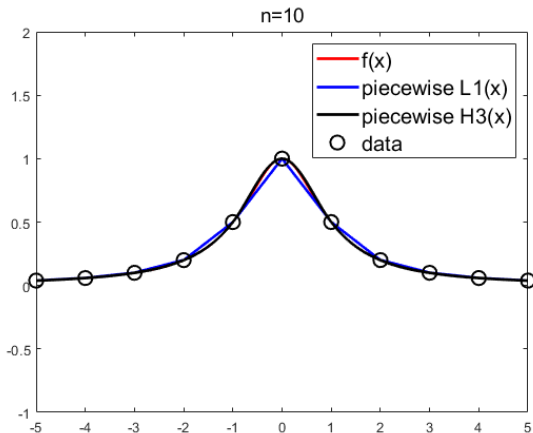
所以, $I_h(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛到 $f(x)$.

注记

- 分段三次 Hermite 插值关于 h 四阶收敛;
- 但需要知道 $f(x)$ 在插值节点处的导数值, 而且插值函数只有一阶导数, 光滑度不高.

例 设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [-5, 5]$, 取等距插值节点 $x_k = -5 + k$ (即 10 等分插值区间). 试分别用分段线性插值和分段三次 Hermite 插值画出 $f(x)$ 的近似图像.

(Interp_piecewise_poly.m)



谢谢
THANK YOU

