

第六讲 函数插值



目录

6.1 多项式插值

6.2 Lagrange 插值

6.3 Newton 插值

6.4 Hermite 插值

6.5 分段低次插值

6.6 三次样条插值

6-4 | Hermite 插值

6.4 Hermite 插值

6.4.1 重节点差商与 Taylor 插值

6.4.2 两个典型的 Hermite 插值

Hermite 插值

为什么 Hermite 插值

在许多实际应用中, 不仅要求函数值相等, 而且还要求若干阶导数也相等, 如机翼设计.



设插值节点为 $x_0, x_1, \dots, x_n$, 如果要求插值多项式满足

$$p(x_i) = f(x_i), p'(x_i) = f'(x_i), p''(x_i) = f''(x_i), \dots, p^{(m)}(x_i) = f^{(m)}(x_i).$$

则计算这类插值多项式的方法就称为 **Hermite 插值**.



在有些情况下, 可能只需要在 **部分插值点** 上的导数值相等即可.

6-4-1

重节点差商与 Taylor 插值

差商的一个重要性质

设 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 为 $[a, b]$ 上的互异节点, $f(x) \in C^n[a, b]$, 则 $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ 关于 x_i 连续

例如 $f[x, y] = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ 关于 x 和 y 都连续, 且

$$f[x, x] \triangleq \lim_{y \rightarrow x} f[x, y] = f'(x)$$

这就是 f 在 x 点的 **一阶重节点差商**.

一般地, f 在点 x 的 **n 阶重节点差商** 定义为

$$f[\underbrace{x, x, \dots, x}_{n+1 \text{ 个}}] \triangleq \lim_{x_i \rightarrow x} f[x, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x).$$

Taylor 插值

在 Newton 插值公式中, 令 $x_i \rightarrow x_0, i = 1, 2, \dots, n$, 则

$$\begin{aligned} N_n(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ &\quad + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

这就是 **Taylor 插值**, 也即是 $f(x)$ 在 x_0 点的 Taylor 展开式的前 $n + 1$ 项之和.

► 余项为

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}.$$

Taylor 插值就是在一个插值点 x_0 的 n 次 Hermite 插值

6-4-2

两个典型的 Hermite 插值

(1) 三点三次 Hermite 插值

三个插值节点为 x_0, x_1, x_2 , 三次插值多项式 $p(x)$, 满足插值条件:

$$p(x_0) = f(x_0), \quad p(x_1) = f(x_1), \quad p(x_2) = f(x_2), \quad p'(x_1) = f'(x_1)$$

(2) 两点三次 Hermite 插值

两个插值节点为 x_0, x_1 , 三次插值多项式 $p(x)$, 满足插值条件:

$$p(x_0) = f(x_0), \quad p(x_1) = f(x_1), \quad p'(x_0) = f'(x_0), \quad p'(x_1) = f'(x_1)$$

(1) 三点三次 Hermite 插值

插值条件

$$p(x_0) = f(x_0), \quad p(x_1) = f(x_1), \quad p(x_2) = f(x_2), \quad p'(x_1) = f'(x_1)$$



仿照 Newton 插值多项式, 设

$$\begin{aligned} p(x) = & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ & + a(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2). \end{aligned} \quad (6.1)$$

将 $p'(x_1) = f'(x_1)$ 代入, 可得

$$a = \frac{f'(x_1) - f[x_0, x_1] - f[x_0, x_1, x_2](x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}.$$

插值余项

根据插值条件, 我们可以将插值余项写成

$$R_3(x) = f(x) - p(x) = K(x)(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2),$$

▶ 与 Lagrange 插值余项公式的推导过程类似, 可得

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2),$$

其中 ξ_x 位于由 x_0, x_1, x_2 和 x 所界定的区间内.

例 已知函数 $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, 插值条件为

$$f(1/4) = 1/8, \quad f(1) = 1, \quad f(9/4) = 27/8, \quad f'(1) = 3/2,$$

是给出三次 Hermite 插值多项式, 并写出余项. (计算过程中不要做近似计算)

解 做差商表

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商
1/4	1/8		
1	1	7/6	
9/4	27/8	19/10	11/30

三次插值多项式可设为 $p(x) = \frac{1}{8} + \frac{7}{6} \left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{11}{30} \left(x - \frac{1}{4}\right) (x - 1) + \alpha \left(x - \frac{1}{4}\right) (x - 1) \left(x - \frac{9}{4}\right)$.

将 $p'(1) = f'(1) = \frac{3}{2}$ 代入, 可得 $\alpha = -\frac{14}{225}$, 所以三次 Hermite 插值多项式为

$$p(x) = \frac{1}{8} + \frac{7}{6} \left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{11}{30} \left(x - \frac{1}{4}\right) (x - 1) - \frac{14}{225} \left(x - \frac{1}{4}\right) (x - 1) \left(x - \frac{9}{4}\right) = -\frac{14}{225} x^3 + \frac{263}{450} x^2 + \frac{233}{450} x - \frac{1}{25}.$$

$$\text{余项为 } R(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!} \left(x - \frac{1}{4}\right) (x - 1)^2 \left(x - \frac{9}{4}\right) = \frac{9\xi_x^{-5/2}}{16 \times 4!} \left(x - \frac{1}{4}\right) (x - 1)^2 \left(x - \frac{9}{4}\right)$$

(2) 两点三次 Hermite 插值

插值条件

$$p(x_0) = f(x_0), \quad p(x_1) = f(x_1), \quad p'(x_0) = f'(x_0), \quad p'(x_1) = f'(x_1)$$



仿照 Lagrange 插值思想, 设

$$H_3(x) = a_0\alpha_0(x) + a_1\alpha_1(x) + b_0\beta_0(x) + b_1\beta_1(x),$$

其中 $\alpha_0(x), \alpha_1(x), \beta_0(x), \beta_1(x)$ 均为三次多项式, 且满足

$$\alpha_0(x_0) = 1, \alpha_0(x_1) = 0, \alpha'_0(x_0) = 0, \alpha'_0(x_1) = 0;$$

$$\alpha_1(x_0) = 0, \alpha_1(x_1) = 1, \alpha'_1(x_0) = 0, \alpha'_1(x_1) = 0;$$

$$\beta_0(x_0) = 0, \beta_0(x_1) = 0, \beta'_0(x_0) = 1, \beta'_0(x_1) = 0;$$

$$\beta_1(x_0) = 0, \beta_1(x_1) = 0, \beta'_1(x_0) = 0, \beta'_1(x_1) = 1.$$

根据插值条件可得

$$H_3(x) = f(x_0)\alpha_0(x) + f(x_1)\alpha_1(x) + f'(x_0)\beta_0(x) + f'(x_1)\beta_1(x).$$

$\alpha_0(x)$ 与 $\alpha_1(x)$ 的表达式

由于 $\alpha_0(x_1) = 0, \alpha'_0(x_1) = 0$, 所以可设 $\alpha_0(x) = (ax + b) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right)^2$.

将 $\alpha_0(x_0) = 1, \alpha'_0(x_0) = 0$ 代入可得

$$a = \frac{2}{x_1 - x_0}, \quad b = \frac{x_1 - 3x_0}{x_1 - x_0} = 1 - \frac{2x_0}{x_1 - x_0}.$$

所以

$$\alpha_0(x) = \left(1 + 2 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right)^2$$

同理可得

$$\alpha_1(x) = \left(1 + 2 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^2$$

$\beta_0(x)$ 与 $\beta_1(x)$ 的计算

根据插值条件 $\beta_0(x_0) = 0, \beta_0(x_1) = 0, \beta'_0(x_1) = 0$, 可设

$$\beta_0(x) = a(x - x_0) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right)^2.$$

将 $\beta'_0(x_0) = 1$ 代入可得 $a = 1$, 所以

$$\beta_0(x) = (x - x_0) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right)^2$$

同理可得

$$\beta_1(x) = (x - x_1) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^2$$

$H_3(x)$ 与插值余项

$$\begin{aligned} H_3(x) = & f(x_0) \left(1 + 2 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right)^2 + f(x_1) \left(1 + 2 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^2 \\ & + f'(x_0)(x - x_0) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right)^2 + f'(x_1)(x - x_1) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^2. \end{aligned}$$



插值余项为

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!} (x - x_0)^2 (x - x_1)^2.$$

谢谢
THANK YOU

