

第六讲 函数插值



目录

- 6.1 多项式插值
- 6.2 Lagrange 插值
- 6.3 Newton 插值**
- 6.4 Hermite 插值
- 6.5 分段低次插值
- 6.6 三次样条插值

6-3 | Newton 插值

6.3 Newton 插值

6.3.1 差商

6.3.2 Newton 插值公式

6.3.3 差分

为什么 Newton 插值

- Lagrange 插值简单易用, 但若增加插值节点时, 全部基函数需重新计算, 很不方便!
- 解决办法: 寻找新的基函数组, 使得当节点增加时, 只需在原有基函数的基础上再增加一些新的基函数即可.

Newton 插值

构造可以逐次生成插值多项式的算法, 即

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + u_{n+1}(x),$$

其中 $p_{n+1}(x)$ 和 $p_n(x)$ 分别为 $f(x)$ 的 $n+1$ 次和 n 次插值多项式, 而且 $u_{n+1}(x)$ 可以很容易地给出.

Newton 插值基函数

设插值节点为 $x_0, x_1, \dots, x_n$, 考虑函数组

$$\phi_0(x) = 1$$

$$\phi_1(x) = x - x_0$$

$$\phi_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

$\dots \dots$

$$\phi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).$$

显然, $\phi_k(x)$ 是 k 次多项式且线性无关, 因此它们组成多项式线性空间 $\mathbb{H}_n(x)$ 的一组基.



这就是 **Newton 插值**所采用的基函数组.

Newton 插值

设 $p_n(x)$ 是 $f(x)$ 在节点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 上的 n 次插值多项式, 可以写成

$$p_n(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \cdots + a_n\phi_n(x).$$

需要解决两个问题

- (1) 怎样确定参数 $a_0, a_1, \dots, a_n$?
- (2) 如果得到从 $p_n(x)$ 到 $p_{n+1}(x)$ 的递推方法?

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + u_{n+1}(x)$$

 解决以上问题, 我们需要用到 **差商**.

6-3-1 | 差商

定义 设节点 $x_0, x_1, \dots, x_n$, 我们称

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$$

为 $f(x)$ 关于点 x_i, x_j 的**一阶差商**; 称

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i}$$

为 $f(x)$ 关于点 x_i, x_j, x_k 的**二阶差商**; 一般地, 称

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

为 $f(x)$ 关于点 $x_0, x_1, \dots, x_k$ 的 **k 阶差商**.

差商有时也称为 **均差**

差商基本性质

➤ 差商可以表示为函数值的线性组合, 即 (可以用归纳法证明)

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{\prod_{i=0, i \neq j}^k (x_j - x_i)} = \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{\omega'_{k+1}(x_j)},$$

其中 $\omega_{k+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_k)$.

由此可见, 差商与节点的排序无关, 即差商具有下面的 **对称性**:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}]$$

其中 $i_0, i_1, \dots, i_k$ 是 $0, 1, \dots, k$ 的一个任意排列.

➤ 根据差商的对称性, 我们可以给出差商的等价定义, 如:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_0, \dots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}.$$

差商基本性质 (续)

➤ 若 $h(x) = \alpha f(x)$, 其中 α 是常数, 则

$$h[x_0, x_1, \dots, x_k] = \alpha f[x_0, x_1, \dots, x_k].$$

➤ 若 $h(x) = f(x) + g(x)$, 则

$$h[x_0, x_1, \dots, x_k] = f[x_0, x_1, \dots, x_k] + g[x_0, x_1, \dots, x_k].$$

➤ k 阶差商与 k 阶导数之间的关系:

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有 k 阶导数, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}. \quad (\text{证明见后面的余项公式})$$

差商的计算: 差商表

利用差商的递推定义, 我们可以构造下面的差商表来计算差商.

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	$\cdots$	n 阶差商
x_0	$f(x_0)$					
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$				
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$			
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	
x_n	$f(x_n)$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$\cdots$	$f[x_0, x_1, \dots, x_n]$

例 已知 $y = f(x)$ 的函数值表如下, 试计算其各阶差商

(Interp_newton_dq.m)

i	0	1	2	3
x_i	-2	-1	1	2
$f(x_i)$	5	3	17	21

解. 通过计算可得差商表如下:

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
-2	5			
-1	3	-2		
1	17	7	3	
2	21	4	-1	-1

6-3-2

Newton 插值公式

- ▶ 根据差商的定义 $f[x, x_0] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 可得 $f(x) = f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0)$
- ▶ 同理, 由 $f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x, x_0] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}$ 可得 $f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1)$
- ▶ 以此类推, 我们有

$$f[x, x_0, x_1] = f[x_0, x_1, x_2] + f[x, x_0, x_1, x_2](x - x_2)$$

$$f[x, x_0, x_1, x_2] = f[x_0, x_1, x_2, x_3] + f[x, x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_3)$$

$$\vdots$$

$$f[x, x_0, \dots, x_{n-2}] = f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] + f[x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}](x - x_{n-1})$$

$$f[x, x_0, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}] = f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n] + f[x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n](x - x_n)$$

依次将后面一式代入前面一式, 可得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \\ &\quad + f[x, x_0, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n) \\ &= N_n(x) + R_n(x) \end{aligned}$$

其中 (令 $a_0 = f(x_0), a_i = f[x_0, x_1, \dots, x_i], \quad i = 1, 2, \dots, n$)

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

$$R_n(x) = f[x, x_0, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n).$$

Newton 插值多项式



直接验证可知

$$R_n(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

所以

$$f(x_i) = N_n(x_i) + R_n(x_i) = N_n(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

即 $N_n(x)$ 是满足插值条件 $N_n(x_i) = f(x_i)$ 的 n 次插值多项式.

这就是 **Newton 插值多项式**.

递推公式

根据 $N_n(x)$ 的表达式, 我们立即可以得到下面的递推公式:

$$N_{n+1}(x) = N_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}] \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$



由插值多项式的存在唯一性可知:

$$N_n(x) \equiv L_n(x),$$



插值余项也一样:

$$f[x, x_0, \dots, x_n] \prod_{i=0}^n (x - x_i) \equiv \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

定理 设 $f(x) \in C^n[a, b]$ (n 阶连续可导), 且 $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a, b) 内存在. 则对 $\forall x \in [a, b]$, 存在 $\xi_x \in (a, b)$ 使得

$$f[x, x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}.$$

注记

- Newton 插值余项更具实用性, 因为它仅涉及插值点与插值节点的差商, 而不需要计算导数, 因此在导数不存在的情况下仍然可以使用.
- 但在计算差商 $f[x, x_0, \dots, x_n]$ 时, 由于 $f(x)$ 未知, 只能使用插值得到的近似值, 因此得到的差商可能存在一定的偏差.

例 已知函数 $f(x) = \ln(x)$ 的函数值如下:

(Interp_newton_01.m)

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	-0.9163	-0.6931	-0.5108	-0.3567	-0.2231

试分别用 Newton 线性插值和抛物线插值计算 $\ln(0.54)$ 的近似值.

解. 取插值节点 $x_0 = 0.5, x_1 = 0.6, x_2 = 0.4$, 做差商表:

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商
0.5	-0.6931		
0.6	-0.5108	1.8230	
0.4	-0.9163	2.0275	-2.0450

于是可得, Newton 线性插值在 $x = 0.54$ 上的近似值为

$$N_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) \approx -0.6931 + 1.8230(x - 0.5) \approx -0.6202.$$

Newton 抛物线插值在 $x = 0.54$ 上的近似值为

$$N_2(x) = N_1(x) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \approx -0.6153.$$

Newton 插值的优点

可以看出, 当增加一个节点时, Newton 插值公式只需在原来的基础上增加一项, 前面的计算结果仍然可以使用. 与 Lagrange 插值相比, Newton 插值具有灵活增加插值节点的优点!

几点注记

- 选取插值节点时, 遵循就近原则
- 插值节点无需按大小顺序排列
- Newton 插值只需要使用差商表中对角线部分的值
- 增加插值节点时, 新增的插值点必须排在已有插值节点的后面

6-3-3 | 差分

在实际应用中, 为了计算方便, 我们通常采用等距节点, 即:

$$x_i = x_0 + i h, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

这里 $h > 0$ 为 **步长**. 此时, 我们可以用 **差分** 简化 Newton 插值公式.

向前差分

定义 (向前差分) 设 $x_i = x_0 + ih$ 是等距节点, 则函数 $f(x)$ 在 x_i 处以 h 为步长的一阶(向前)差分定义为

$$\Delta f_i = f(x_{i+1}) - f(x_i) = f(x_i + h) - f(x_i).$$

类似地, 称

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$$

为 x_i 处的二阶差分. 一般地, 称

$$\Delta^n f_i = \Delta(\Delta^{n-1} f_i) = \Delta^{n-1} f_{i+1} - \Delta^{n-1} f_i$$

为 x_i 处的 n 阶差分.

差分与函数值

为了表示方便, 我们引入 **不变算子** ($\mathbf{I}f_i = f_i$) 和 **位移算子** ($\mathbf{E}f_i = f_{i+1}$)

于是

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i = \mathbf{E}f_i - \mathbf{I}f_i = (\mathbf{E} - \mathbf{I})f_i$$

所以

$$\Delta^n f_i = (\mathbf{E} - \mathbf{I})^n f_i = \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \mathbf{E}^{n-k} \right] f_i = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} f_{n-k+i}$$

反之, 有

$$f_{n+i} = \mathbf{E}^n f_i = (\mathbf{I} + \Delta)^n f_i = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k f_i$$

差分与差商

 由差商定义可知, 对于任意两个相邻的节点, 有

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{1}{h} \Delta f_k$$

 对于任意三个相邻的节点, 有

$$\begin{aligned} f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] &= \frac{f[x_{k+2}, x_{k+1}] - f[x_{k+1}, x_k]}{x_{k+2} - x_k} \\ &= \frac{1}{2h} \left(\frac{1}{h} \Delta f_{k+1} - \frac{1}{h} \Delta f_k \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{h^2} \Delta^2 f_k \end{aligned}$$

 一般地, 对于任意 $m+1$ 个相邻的节点, 有

$$f[x_k, \dots, x_{k+m}] = \frac{1}{m!} \frac{1}{h^m} \Delta^m f_k \implies \Delta^m f_k = h^m m! f[x_k, \dots, x_{k+m}] = h^m f^{(m)}(\xi)$$

差分的计算

与差商表类似, 我们也可以通过下面的差分表来计算差分.

x_i	$f(x_i)$	一阶差分	二阶差分	三阶差分	...	n 阶差分
x_0	$f(x_0)$	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	...	$\Delta^n f_0$
x_1	$f(x_1)$	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
x_{n-2}	$f(x_{n-2})$	Δf_{n-2}	$\Delta^2 f_{n-2}$			
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	Δf_{n-1}				
x_n	$f(x_n)$					

 MATLAB 中计算差分的函数为: `diff(x)`, 可以计算高阶差分, 如: `diff(x,k)`.

Newton 向前插值公式

如果采用等距插值节点 $x_i = x_0 + i h$, 则可以用差分来简化 Newton 插值公式.

 设 $x = x_0 + th$, 则

$$\begin{aligned} N_n(x) &= N_n(x_0 + th) \\ &= f(x_0) + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \cdots \\ &\quad + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0. \end{aligned}$$

这就是 **Newton 向前插值公式**.

 插值余项为

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} t(t-1)\cdots(t-n)h^{n+1}.$$

例 给定 $f(x) = \cos(x)$ 在等距节点 $0 : 0.1 : 0.5$ 处的函数值, 试用 4 次 Newton 向前插值公式计算 $f(0.048)$ 的近似值, 并估计误差. (Interp_newton_02.m)

解. 取等距节点 $x = 0 : 0.1 : 0.4$ 做差分表

x_i	$f(x_i)$	一阶差分	二阶差分	三阶差分	四阶差分
0.0	1.00000	-0.00500	-0.00993	-0.00013	-0.00012
0.1	0.99500	-0.01493	-0.00980	-0.00025	
0.2	0.98007	-0.02473	-0.00955		
0.3	0.95534	-0.03428			
0.4	0.92106				

插值点 $x = 0.048$, 则 $t = (x - x_0)/h = 0.48$. 所以由 Newton 向前插值公式可知, $f(0.048)$ 的近似值为

$$\begin{aligned}
 N_4(0.048) &= 1.00000 + 0.48(-0.00500) + \frac{1}{2!}0.48(0.48 - 1)(-0.00993) \\
 &\quad + \frac{1}{3!}0.48(0.48 - 1)(0.48 - 2)(-0.00013) \\
 &\quad + \frac{1}{4!}0.48(0.48 - 1)(0.48 - 2)(0.48 - 3)(-0.00012) \approx 0.99884.
 \end{aligned}$$

误差:

$$|R_4(0.048)| = \left| \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} t(t-1) \cdots (t-4) h^5 \right| \leq \frac{h^5}{5!} |t(t-1) \cdots (t-4)| \max_{0 \leq x \leq 0.4} |f^{(5)}(x)| \approx 1.09212 \times 10^{-7}$$

向后差分与中心差分

向后差分

$$\begin{aligned}\nabla f_i &= f(x_i) - f(x_{i-1}), \\ \nabla^k f_i &= \nabla(\nabla^{k-1} f_i) = \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1}, \quad k = 2, 3, \dots\end{aligned}$$

中心差分

$$\begin{aligned}\delta f_i &= f(x_{i+\frac{1}{2}}) - f(x_{i-\frac{1}{2}}), \\ \delta^k f_i &= \delta(\delta^{k-1} f_i) = \delta^{k-1} f_{i+\frac{1}{2}} - \delta^{k-1} f_{i-\frac{1}{2}}, \quad k = 2, 3, \dots\end{aligned}$$

谢谢
THANK YOU

