

## 第六讲 函数插值



### 目录

- 6.1 多项式插值
- 6.2 Lagrange 插值
- 6.3 Newton 插值
- 6.4 Hermite 插值
- 6.5 分段低次插值
- 6.6 三次样条插值

## 为什么插值

大多数实际问题都可用函数来表示某种内在规律的数量关系，但该函数通常无法给出，只有通过实验或观测得到的数据表，



如何根据这些数据推测或估计其它点的函数值？

**例** 已测得在某处海洋不同深度处的水温如下：

| 深度 (M)                    | 466  | 741  | 950  | 1422 | 1634 |
|---------------------------|------|------|------|------|------|
| 水温 ( $^{\circ}\text{C}$ ) | 7.04 | 4.28 | 3.40 | 2.54 | 2.13 |

根据这些数据，请合理地估计出其它深度（如 500, 600, 800 米 ...）处的水温。

# 什么是插值

**定义** 已知函数  $y = f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有定义, 且已经测得其在点

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b \quad (6.1)$$

处的值为  $y_0 = f(x_0), \cdots, y_n = f(x_n)$ . 如果存在一个简单易算的函数  $p(x)$ , 使得

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (6.2)$$

则称  $p(x)$  为  $f(x)$  的插值函数. 区间  $[a, b]$  称为插值区间,  $x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 称为插值节点, 条件 (6.2) 称为插值条件.

插值节点可以不按递增排列, 但必须确保互不相同!

# 插值法

## 插值法

求插值函数  $p(x)$  的方法就称为**插值法**. 常见的插值法有:

- **多项式插值**:  $p(x)$  为多项式, 多项式是常用的插值函数;
- **分段多项式插值**:  $p(x)$  为分段多项式, 用分段多项式插值是常用的插值法;
- **有理插值**:  $p(x)$  为有理函数;
- **三角插值**:  $p(x)$  为三角函数;
- ... ..

本讲主要介绍多项式插值和分段多项式插值.

# 6-1

## 多项式插值

### 多项式插值

已知函数  $y = f(x)$  在区间  $[a, b]$  上  $n + 1$  个点

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$$

处的函数值为  $y_0 = f(x_0), \cdots, y_n = f(x_n)$ . 多项式插值就是寻找一个次数不超过  $n$  的多项式的函数

$$p(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n, \quad (6.3)$$

使得

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

需要指出的是,  $p(x)$  的次数有可能小于  $n$ .

# 多项式插值存在唯一性

**定理** 满足插值条件的多项式  $p(x)$  存在且唯一.

(板书)

 该定理的证明过程事实上也给出了一种求  $p(x)$  的方法, 但这个方法比较复杂, 当插值点较多时, 需要解一个很大的线性方程组, 不实用, 后面将给出几个较简单的计算方法.

# 多项式插值举例: 线性插值

**例** 线性插值: 求一个一次多项式  $p(x)$ , 满足:

$$p(x_0) = y_0, \quad p(x_1) = y_1.$$

**简要求解过程.** 由于  $p(x)$  是一次多项式, 即代表一条直线. 因此由点斜式可知

$$p(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) = y_0 - \frac{y_0(x - x_0)}{x_1 - x_0} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

记  $l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$ ,  $l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$ , 则  $p(x)$  就可以表示成  $l_0(x)$  和  $l_1(x)$  的线性组合, 即

$$p(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x).$$

我们进一步观察可知

$$l_0(x_0) = 1, \quad l_0(x_1) = 0;$$

$$l_1(x_0) = 0, \quad l_1(x_1) = 1.$$

# 多项式插值举例: 抛物线插值

**例** 抛物线插值: 求一个二次多项式  $p(x)$ , 满足:

$$p(x_0) = y_0, \quad p(x_1) = y_1, \quad p(x_2) = y_2.$$

**简要求解过程.** 借鉴线性插值思想, 如果能构造出三个二次多项式  $l_0(x), l_1(x), l_2(x)$ , 满足

$$l_0(x_0) = 1, \quad l_0(x_1) = 0, \quad l_0(x_2) = 0;$$

$$l_1(x_0) = 0, \quad l_1(x_1) = 1, \quad l_1(x_2) = 0;$$

$$l_2(x_0) = 0, \quad l_2(x_1) = 0, \quad l_2(x_2) = 1.$$

则由插值条件可知,  $p(x)$  可以表示成

$$p(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x).$$



如何构造  $l_0(x), l_1(x), l_2(x) \rightarrow$  待定系数法

由于  $l_0(x)$  是二次多项式, 且满足  $l_0(x_1) = l_0(x_2) = 0$ , 因此  $l_0(x)$  可以设为

$$l_0(x) = \alpha(x - x_1)(x - x_2),$$

其中  $\alpha$  是待定系数. 将  $l_0(x_0) = y_0$  代入可得  $\alpha = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$ , 所以

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}.$$

同理可得

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \quad l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

为什么  $p(x)$  可以写成  $l_0(x)$ ,  $l_1(x)$  和  $l_2(x)$  的线性组合  $\rightarrow l_0(x), l_1(x), l_2(x)$  组成了

$$\mathbb{H}_2(x) \triangleq \{\text{次数不超过 2 的多项式的全体}\}$$

的一组基, 而  $p(x) \in \mathbb{H}_2(x)$ .

这种利用基函数来计算插值函数的方法就是**基函数插值法**.

# 多项式插值的基函数插值法

记  $\mathbb{H}_n(x) \triangleq \{\text{所有次数不超过 } n \text{ 的实系数多项式组成的集合}\} \rightarrow n+1 \text{ 维线性空间}$

✿  $n$  次多项式插值就是在  $\mathbb{H}_n$  中寻找一个多项式  $p(x)$ , 使得插值条件成立.

✿ 设  $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)\}$  是  $\mathbb{H}_n$  的一组基, 则  $p(x)$  可以表示成

$$p(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \cdots + a_n\phi_n(x),$$

## 多项式插值的两个关键问题

- (1) 寻找合适的基函数;
- (2) 确定插值多项式在这组基下的线性表出系数.

# 6-2 | Lagrange 插值

## 6.2 Lagrange 插值

6.2.1 Lagrange 基函数

6.2.2 插值余项

6.2.3 Lagrange 基函数的性质

# 6-2-1 | Lagrange 基函数

**定义** 设  $l_k(x)$  是  $n$  次多项式, 且在插值节点  $x_0, x_1, \dots, x_n$  上满足

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad i, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

则称  $l_k(x)$  为节点  $x_0, x_1, \dots, x_n$  上的  $n$  次 **Lagrange 基函数**.

## $l_k(x)$ 的表达式

根据定义可知  $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$  是  $l_k(x)$  的零点, 故可设

$$l_k(x) = \alpha(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)$$

▶ 将条件  $l_k(x_k) = 1$  代入可得  $\alpha = \frac{1}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$

▶ 所以

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

➤ 容易证明:  $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$  线性无关, 因此它们构成  $\mathbb{H}_n(x)$  的一组基.

➤  $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$  与插值节点有关, 但与  $f(x)$  无关.

# 基于 Lagrange 基函数的插值多项式

插值多项式  $p(x)$  可以写成

$$p(x) = a_0 l_0(x) + a_1 l_1(x) + \cdots + a_n l_n(x).$$

▶ 将插值条件  $p(x_i) = y_i$  代入可得

$$a_i = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

▶ 所以  $p(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x)$ .



我们将这个多项式记为  $L_n(x)$ , 它就是 **Lagrange 插值多项式**, 即

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x) = \sum_{k=0}^n y_k \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

**例** 已知函数  $f(x) = \ln(x)$  的函数值如下:

(Interp\_Lagrange\_01.m)

| $x$    | 0.4     | 0.5     | 0.6     | 0.7     | 0.8     |
|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $f(x)$ | -0.9163 | -0.6931 | -0.5108 | -0.3567 | -0.2231 |

试分别用线性插值和抛物线插值计算  $\ln(0.54)$  的近似值.

**解.** 为了减小截断误差, 通常选取离插值点  $x$  比较近的点作为插值节点.

**线性插值:** 取  $x_0 = 0.5, x_1 = 0.6$ , 根据 Lagrange 插值公式, 可得  $f(x)$  在区间  $[0.5, 0.6]$  上的线性插值为

$$L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \approx 0.1823x - 1.6046.$$

将  $x = 0.54$  代入可得  $\ln(0.54) \approx -0.6202$ .

**抛物线插值:** 取  $x_0 = 0.4, x_1 = 0.5, x_2 = 0.6$ . 根据 Lagrange 插值公式, 可得  $f(x)$  在 0.54 处的近似值为

$$\begin{aligned} \ln(0.54) &\approx L_2(0.54) \\ &= y_0 \frac{(0.54 - x_1)(0.54 - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(0.54 - x_0)(0.54 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(0.54 - x_0)(0.54 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &\approx -0.6153. \end{aligned}$$

## 几点注记

- $L_n(x)$  的最高次项可能会低于  $n$ , 如抛物线插值中, 三点共线时  $L_2(x)$  是一次多项式.
- 我们将需要插值的点称为 **插值点**, 比如上面例题中的 0.54.  
在实际计算中, 一般不需要给出插值多项式的具体表达式, 可以直接将插值点代入进行计算, 得到近似值.
- Lagrange 插值简单方便, 只要给定插值节点就可写出基函数, 易于计算机实现.

# 6-2-2 | 插值余项

记 Lagrange 插值多项式的余项为

$$R_n(x) \triangleq f(x) - L_n(x)$$

**定理** 设  $f(x) \in C^n[a, b]$  且  $f^{(n+1)}(x)$  在  $(a, b)$  内存在, 则对  $\forall x \in [a, b]$ , 都存在  $\xi_x \in (a, b)$  使得

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x),$$

其中  $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$ .

(板书)

余项中的  $\xi_x$  与  $x$  是相关的

# 线性插值与抛物线插值的余项

线性插值的余项 (假定  $x_0 < x_1$ )

$$R_1(x) = \frac{1}{2}f''(\xi_x)(x - x_0)(x - x_1), \quad \xi_x \in (x_0, x_1).$$

抛物线插值的余项 (假定  $x_0 < x_1 < x_2$ )

$$R_2(x) = \frac{1}{6}f'''(\xi_x)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \quad \xi_x \in (x_0, x_2).$$

## 几点注记

- ▶ 余项公式只有当  $f(x)$  的高阶导数存在时才能使用;
- ▶  $\xi_x$  与  $x$  有关, 通常无法确定, 因此在实际应用中, 通常是估计其上界, 即

$$\text{如果有 } \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| = M_{n+1}, \quad \text{则 } |R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|.$$

- ▶ 在利用插值方法计算插值点  $x$  上的近似值时, 应尽量选取与  $x$  相近的插值节点.



如果  $f(x)$  是一个次数不超过  $n$  的多项式, 则  $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$ , 因此  $R_n(x) \equiv 0$ .

**推论** 当  $f(x)$  为一个次数不超过  $n$  的多项式时, 其  $n$  次插值多项式是精确的.

**例** 试估计前面例子中线性插值和抛物线插值计算  $\ln(0.54)$  时的误差.

| $x$                      | 0.4     | 0.5     | 0.6     | 0.7     | 0.8     |
|--------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $f(x) \triangleq \ln(x)$ | -0.9163 | -0.6931 | -0.5108 | -0.3567 | -0.2231 |

**解. 线性插值:** 取插值节点  $x_0 = 0.5, x_1 = 0.6$ , 则插值余项

$$\begin{aligned}|R_1(x)| &= \left| \frac{f^{(2)}(\xi_x)}{2!} (x - x_0)(x - x_1) \right| = \left| \frac{\xi_x^{-2}}{2} (0.54 - 0.5)(0.54 - 0.6) \right| & (\xi_x \in (x_0, x_1)) \\ &\leq 2 \times 0.04 \times 0.06 = 0.048.\end{aligned}$$

**抛物线插值:** 取插值节点  $x_0 = 0.4, x_1 = 0.5, x_2 = 0.6$ , 插值余项:

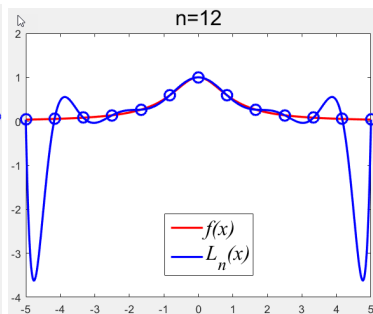
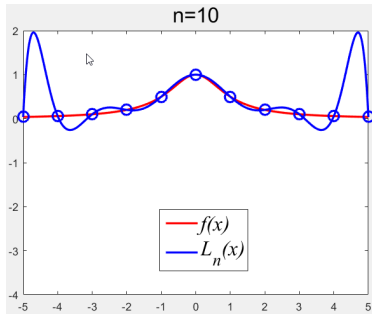
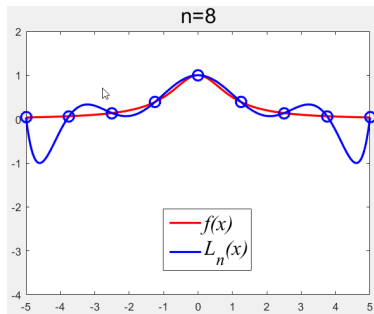
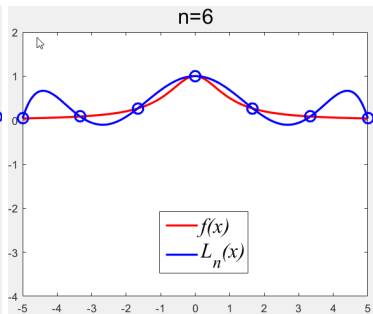
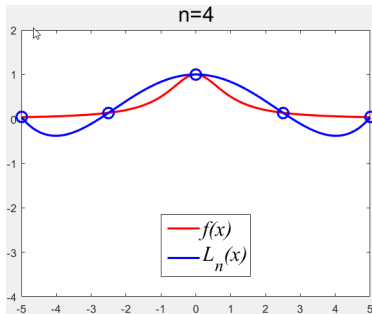
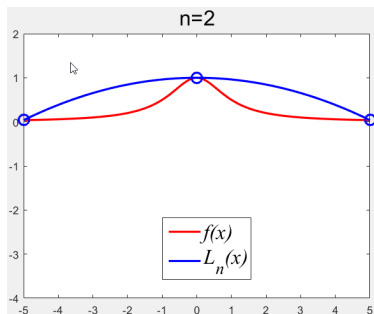
$$\begin{aligned}|R_2(x)| &= \left| \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \right| \\ &= \left| \frac{2\xi_x^{-3}}{3!} (0.54 - 0.4)(0.54 - 0.5)(0.54 - 0.6) \right| & (\xi_x \in (x_0, x_2)) \\ &\leq \frac{125}{8} \times 0.14 \times 0.04 \times 0.06 = 0.00175.\end{aligned}$$

# Runge 现象

由上例可知, 抛物线插值要优于线性插值.

❓ 是不是插值多项式次数越高, 插值精度就越好?

**例** Runge 现象: 已知函数  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , 插值区间  $[-5, 5]$ , 取等距插值节点, 即  $x_i = -5 + \frac{10i}{n}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , 画出当  $n = 2, 4, 6, 8, 10, 12$  时, 插值多项式  $L_n$  的图像. 并由  
此说明, 插值多项式并不一定是次数越高就越好! (Interp\_Lagrange\_Runge.m)



**例** 设  $f(x) \in C^2[a, b]$ , 证明:

$$\max_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] \right| \leq \frac{1}{8} M_2 (b - a)^2,$$

其中  $M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$ .

**简要证明.** 记  $L_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ , 则  $L_1(a) = f(a)$ ,  $L_1(b) = f(b)$ .

因此,  $L_1(x)$  是  $f(x)$  关于插值节点  $x_0 = a, x_1 = b$  的线性插值多项式. 由多项式插值的余项公式可知

$$R_1(x) = f(x) - L_1(x) = \frac{f''(\xi_x)}{2!}(x - a)(x - b), \quad \xi_x \in (a, b).$$

因此当  $x \in [a, b]$  时, 有

$$\begin{aligned} |f(x) - L_1(x)| &= \frac{|f''(\xi_x)|}{2} |(x - a)(x - b)| \\ &\leq \frac{M_2}{2} (x - a)(b - x) \\ &\leq \frac{M_2}{2} \left( \frac{(x - a) + (b - x)}{2} \right)^2 = \frac{1}{8} M_2 (b - a)^2. \end{aligned}$$

# 6-2-3

## Lagrange 基函数的性质

设  $f(x) = x^m$ , 其中  $0 \leq m \leq n$ , 则  $f(x) = L_n(x)$ .

**推论** 当  $l_k(x)$  是 Lagrange 基函数, 则有

$$\sum_{k=0}^n x_k^m l_k(x) = x^m, \quad 0 \leq m \leq n.$$

特别地, 当  $m = 0$  时, 有

$$\sum_{k=0}^n l_k(x) = 1.$$

**例** 设  $l_i(x)$  是关于点  $x_0, x_1, \dots, x_5$  的 Lagrange 插值基函数. 证明:

$$\sum_{i=0}^5 (x_i - x)^2 l_i(x) = 0.$$

**简要证明.** 直接展开可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^5 (x_i - x)^2 l_i(x) &= \sum_{i=0}^5 (x_i^2 - 2x_i x + x^2) l_i(x) \\ &= \sum_{i=0}^5 x_i^2 l_i(x) - 2x \sum_{i=0}^5 x_i l_i(x) + x^2 \sum_{i=0}^5 l_i(x) \end{aligned} \quad (6.4)$$

根据 Lagrange 基函数的性质可知

$$\sum_{i=0}^5 x_i^2 l_i(x) = x^2, \quad \sum_{i=0}^5 x_i l_i(x) = x, \quad \sum_{i=0}^5 l_i(x) = 1,$$

代入 (6.4), 即可知结论成立.

谢谢  
THANK YOU

