

第四讲 线性方程组迭代解法



目录

4.1 定常迭代法

4.2 收敛性分析

4.3 经典迭代法的收敛性

4.4 共轭梯度法

<https://math.ecnu.edu.cn/~jypan/Teaching/NA>

4-2 | 收敛性分析

4.2 收敛性分析

4.2.1 向量序列与矩阵序列的收敛性

4.2.2 迭代法的收敛性

4.2.3 迭代法的收敛速度

<https://math.ecnu.edu.cn/~jypan/Teaching/NA>

4-2-1

向量序列与矩阵序列的收敛性

定义 (向量序列的收敛) 设 $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个向量序列. 如果存在向量 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

其中 $x_i^{(k)}$ 表示 $x^{(k)}$ 的第 i 个分量. 则称 $\{x^{(k)}\}$ (按分量) 收敛到 x , 记为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x.$$

我们称 x 为序列 $\{x^{(k)}\}$ 的极限.

矩阵序列的收敛性

定义 (矩阵序列的收敛) 设 $\left\{A^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{ij}^{(k)} \end{bmatrix}\right\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 中的一个矩阵序列. 如果存在矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

则称 $A^{(k)}$ 收敛到 A , 记为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = A.$$

我们称 A 为 $A^{(k)}$ 的 **极限**.

矩阵序列收敛举例

例 设 $0 < |a| < 1$, 考虑矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$, 其中

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

易知当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

收敛性定理

定理 设向量序列 $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, 矩阵序列 $\{A^{(k)} = [a_{ij}^{(k)}]\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$, 则

(1) $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)} - x\| = 0$, 其中 $\|\cdot\|$ 为任一向量范数;

(2) $\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = A \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^{(k)} - A\| = 0$, 其中 $\|\cdot\|$ 为任一矩阵范数;

(板书)

该结论将向量 (矩阵) 序列的收敛性转化为数列的收敛性.

两种特殊的矩阵序列

收敛到 0 的矩阵序列

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^{(k)}\| = 0$$

矩阵的幂组成的序列

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$$

更多判别方法

定理 设矩阵序列 $\left\{ A^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{ij}^{(k)} \end{bmatrix} \right\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$, 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

(板书)

更多判别方法 (续)

定理 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 若存在矩阵范数使得 $\|A\| < 1$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$.

(板书)

定理 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$ 当且仅当 $\rho(A) < 1$.

(板书)

推论 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$ 的充要条件是存在某个矩阵范数 $\|\cdot\|$, 使得 $\|A\| < 1$.

4-2-2 | 迭代法的收敛性

定义 对任意初始向量 $x^{(0)}$, 设 $\{x^{(k)}\}$ 是由迭代法

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + g, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

生成的向量序列, 如果 $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$ 存在, 则称迭代法 **收敛**, 否则就称为 **发散**.

引理 设迭代序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x_*$, 则 x_* 是原方程组的真解.

(板书)

定常迭代法基本收敛性定理

定理 对任意初始向量 $x^{(0)}$, 迭代法 $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + g$ 收敛的充要条件是 $\rho(G) < 1$.

(板书)

充分条件

定理 若存在算子范数使得 $\|G\| < 1$, 则迭代法 $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + g$ 收敛

注记

- 由于计算 $\rho(G)$ 通常比较复杂, 而 $\|G\|_1, \|G\|_\infty$ 相对比较容易计算, 因此在判别迭代方法收敛性时, 可以先验算一下迭代矩阵的 1-范数或 ∞ -范数是否小于 1.
- 该定理中的条件是充分条件, 但不是必要条件, 因此判断一个迭代方法不收敛仍然需要使用基本收敛定理.

例 讨论迭代法 $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + g$ 的收敛性, 其中 $G = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$.

解 由于 G 是下三角矩阵, 因此其特征值分别为 $\lambda_1 = 0.9, \lambda_2 = 0.8$.
所以 $\rho(G) = 0.9 < 1$. 故该迭代方收敛.

误差估计

定理 若存在算子范数使得 $q \triangleq \|G\| < 1$, 则

- (1) $\|x^{(k)} - x_*\| \leq q^k \|x^{(0)} - x_*\|;$
- (2) $\|x^{(k)} - x_*\| \leq \frac{q}{1-q} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|;$
- (3) $\|x^{(k)} - x_*\| \leq \frac{q^k}{1-q} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$

(板书)

4-2-3

迭代方法的收敛速度

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + g$$

第 k 步的误差为

$$\varepsilon^{(k)} \triangleq x^{(k)} - x_* = G^k(x^{(0)} - x_*) = G^k \varepsilon^{(0)}.$$

所以

$$\frac{\|\varepsilon^{(k)}\|}{\|\varepsilon^{(0)}\|} \leq \|G^k\|.$$

因此平均每次迭代后误差的压缩率为

$$\|G^k\|^{1/k}.$$

平均收敛速度

定义 定常迭代法 $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + g$ 的 **平均收敛速度** 定义为

$$R_k(G) \triangleq -\ln \|G^k\|^{\frac{1}{k}},$$

渐进收敛速度 定义为

$$R(G) \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} R_k(G) = -\ln \rho(G).$$

如果 $0 < \rho(G) < 1$, 则迭代法 **线性** 收敛; 如果 $\rho(G) = 0$, 则迭代法 **超线性** 收敛.

迭代步数的估计

如果事先给定一个精度要求, 比如要求相对误差满足

$$\frac{\|x^{(k)} - x_*\|}{\|x^{(0)} - x_*\|} < \varepsilon,$$

则可根据下面的公式估计所需迭代步数 k :

$$\|G^k\| < \varepsilon \implies \ln \|G^k\|^{1/k} \leq \frac{1}{k} \ln(\varepsilon) \implies k \geq \frac{-\ln(\varepsilon)}{-\ln \|G^k\|^{1/k}} \approx \frac{-\ln(\varepsilon)}{R(G)}$$

4-3

经典迭代法的收敛性

4.3 经典迭代法的收敛性

4.3.1 不可约与对角占优情形

4.3.2 对称正定情形

<https://math.ecnu.edu.cn/~jypan/Teaching/NA>

基本准则

充要条件: $\rho(G) < 1$, 充分条件: $\|G\| < 1$

4-3-1 | 不可约与对角占优

定义 (不可约) 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 若存在置换矩阵 P , 使得 PAP^T 为块上三角矩阵, 即

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

其中 $A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ($1 \leq k < n$), 则称 A 为**可约矩阵**, 否则称为**不可约矩阵**.

引理 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是三对角矩阵, 且三条对角线上的元素都非零, 则 A 不可约.

(证明可参见相关资料)

不可约矩阵

可约矩阵

- 考虑线性方程组 $Ax = b$, 若 A 可约, 即存在置换矩阵 P , 使得 $PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$, 因此 $Ax = b$ 等价于 $(PAP^T)(Px) = Pb$. 记 $y \triangleq Px$, $f \triangleq Pb$, 则

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}.$$

所以原方程组就转化为两个更小规模的子方程组.

- 对于特征值问题, A 的特征值就是 A_{11} 和 A_{22} 的特征值的并.
- 如果 A_{22} 或 A_{11} 仍然是可约的, 则可以转化为更小规模的子问题.

在研究线性方程组或计算矩阵特征值时, 可以假定 A 不可约.

对角占优矩阵

定义 (对角占优) 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 若

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

对所有 $i = 1, 2, \dots, n$ 都成立, 且至少有一个不等式严格成立, 则称 A 为**弱行对角占优**, 简称**对角占优**. 若对所有 $i = 1, 2, \dots, n$ 不等式都严格成立, 则称 A 是**严格行对角占优**, 简称**严格对角占优**.

 类似地, 可以定义**列对角占优**和**严格列对角占优**.

不可约与对角占优矩阵基本性质

定理 若 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是严格对角占优矩阵, 则 A 非奇异.

(板书)

定理 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是不可约对角占优矩阵, 则 A 非奇异.

(证明可参见相关资料)

不可约对角占优: Jacobi 和 G-S

定理 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 若 A 严格对角占优, 则 Jacobi 和 G-S 迭代法都收敛.

(板书)

定理 若 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 不可约对角占优, 则 Jacobi 方法和 G-S 迭代法都收敛.

(留作课外自习, 可参见相关资料)

不可约对角占优: SOR

定理 若 SOR 迭代法收敛, 则 $0 < \omega < 2$.

(板书)

定理 若 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 严格对角占优 (或不可约对角占优), 且 $0 < \omega \leq 1$, 则 SOR 收敛.

(留作课外自习, 可参见相关资料)

4-3-2 | 对称正定情形

引理 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 对称, $A = M - N$, 其中 M 非奇异. 如果 $M^T + N$ 是正定的, 则 $\rho(M^{-1}N) < 1$ 当且仅当 A 正定. (留作课外自习, 参见讲义)

定理 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 对称且 $2D - A$ 正定, 则 Jacobi 收敛的充要条件是 A 正定.

定理 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 对称且 D 正定, 则 G-S 收敛的充要条件是 A 正定.

对称正定情形: Jacobi

定理 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 对称且 D 正定, 则 Jacobi 收敛的充要条件是 A 和 $2D - A$ 都正定.

(板书)

对称正定情形: SOR

定理 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 对称且 D 正定,

- (1) 若 A 正定且 $0 < \omega < 2$, 则 SOR 收敛;
- (2) 若存在 ω 使得 SOR 收敛, 则 A 正定.

推论 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 对称且 D 正定, 则 SOR 收敛的充要条件是 A 正定且 $0 < \omega < 2$.

例 考虑线性方程组 $Ax = b$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$. 试给出 Jacobi, G-S 和 SOR 收敛的充要条件.

解 易知 A 对称且对角线部分都为正, 因此 Jacobi 收敛当且仅当 A 和 $2D - A$ 都正定. 通过计算 A 的各阶顺序主子式可知, A 正定的充要条件是

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \right) = 1 - a^2 > 0, \quad \det(A) = 1 + 2a^3 - 3a^2 = (a - 1)^2(2a + 1) > 0,$$

即 $-\frac{1}{2} < a < 1$.

类似地, $2D - A$ 正定的充要条件是 $-1 < a < \frac{1}{2}$.

所以 Jacobi 收敛的充要条件是 $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$,

G-S 收敛的充要条件是 A 正定, 即 $-\frac{1}{2} < a < 1$,

SOR 收敛的充要条件是 A 正定且 $0 < \omega < 2$, 即 $-\frac{1}{2} < a < 1$, $0 < \omega < 2$.

谢谢
THANK YOU

