

# 第三讲 线性最小二乘问题

- 1 问题介绍
- 2 初等变换矩阵
- 3 QR 分解
- 4 奇异值分解
- 5 线性最小二乘问题的求解方法
- 6 最小二乘问题的推广及其应用 \*



# 4 | 奇异值分解

4.1 奇异值，奇异向量和奇异值分解

4.2 奇异值基本性质

4.3 奇异值更多性质 \*



## 4.1 奇异值, 奇异向量和奇异值分解

奇异值分解 (SVD) 分解是矩阵计算中非常有用的工具之一.

**定理 (SVD)** 设  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  ( $m \geq n$ ), 则存在酉矩阵  $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$  和  $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$  使得

$$U^* A V = \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad A = U \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^*,$$

其中  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 且  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ .

上述分解称为  $A$  的**奇异值分解 (SVD)**,  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  称为  $A$  的**奇异值**, 它们是矩阵  $A^* A$  的特征值的平方根. (板书)

📌 在不做特别说明的情况下, 我们总是假定  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ .

📌 如果  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  是实矩阵, 则  $U, V$  也都可以是实矩阵.



## 奇异向量

矩阵  $U = [u_1, u_2, \dots, u_m]$  和  $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  的列向量分别称为  $A$  的

**左奇异向量** 和 **右奇异向量**, 即存在关系式

$$Av_i = \sigma_i u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$A^* u_i = \sigma_i v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$A^* u_i = 0, \quad i = n + 1, n + 2, \dots, m.$$



## SVD 的其他形式

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^* = \sigma_1 u_1 v_1^* + \sigma_2 u_2 v_2^* + \cdots + \sigma_n u_n v_n^*$$

记  $U_n = [u_1, u_2, \dots, u_n] \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , 则  $U_n$  是单位列正交矩阵, 且

$$A = U_n \Sigma V^* \quad (3.1)$$

这就是所谓的 **细 SVD** (thin SVD) 或 **降阶 SVD** (reduced SVD), 有的文献将 (3.1) 称为奇异值分解.

当  $k < n$  时, 我们称

$$A_k = \sigma_1 u_1 v_1^* + \sigma_2 u_2 v_2^* + \cdots + \sigma_k u_k v_k^*$$

为  $A$  的 **截断 SVD** (truncated SVD).



## 4.2 奇异值基本性质

**定理** 设  $A = U \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^*$  是  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  ( $m \geq n$ ) 的奇异值分解, 则

- (1)  $A^*A$  的特征值是  $\sigma_i^2$ , 对应的特征向量是  $v_i$
- (2)  $AA^*$  的特征值是  $\sigma_i^2$  和  $m - n$  个零, 对应的特征向量是  $u_i$
- (3)  $\|A\|_2 = \sigma_1$ ,  $\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2}$ ;
- (4) 若  $\text{rank}(A) = r \leq n$ , 则  $\text{Ran}(A) = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ ,  
 $\text{Ker}(A) = \text{span}\{v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n\}$
- (5) 设  $x \in \mathbb{C}^n$  且  $\|x\|_2 = 1$ , 则  $\sigma_n \leq \|Ax\|_2 \leq \sigma_1$ ;
- (6) (酉不变性) 设  $X \in \mathbb{C}^{m \times m}$  和  $Y \in \mathbb{C}^{n \times n}$  是酉矩阵, 则  $\sigma_i(X^*AY) = \sigma_i(A)$ .

(证明留作练习)



**定理** 设  $A = U\Sigma V^*$  是  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  的奇异值分解, 则:

(1)  $|\det(A)| = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$ ;

(2) 若  $A$  非奇异, 则  $\|A^{-1}\|_2 = \sigma_n^{-1}$ ,  $\kappa_2(A) = \sigma_1/\sigma_n$ ;

(3) 若  $A$  是 Hermite 的, 且  $A = U\Lambda U^*$  是  $A$  的西特征值分解, 设  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ , 则  $A = U\Sigma V$  是  $A$  的奇异值分解, 其中  $\sigma_i = |\lambda_i|$ ,  $v_i = \text{sign}(\lambda_i)u_i$ , 若  $\lambda_i = 0$ , 则取  $v_i = u_i$ ;

(4) 矩阵  $\begin{bmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{bmatrix}$  的特征值是  $\pm\sigma_i$ , 对应单位特征向量  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} v_i \\ \pm u_i \end{bmatrix}$ .

(证明留作练习)

🔴 矩阵条件数取决于奇异值, 不是特征值, 见讲义上的例子

(特征值都是 1, 但其谱条件数却随着矩阵规模的增长而快速变大).



## 4.3 奇异值更多性质\*

**定理 (低秩逼近)** 设  $A = U_n \Sigma V^*$  是  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  的细奇异值分解. 令

$$A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^*,$$

则  $A_k$  是

$$\min_{B \in \mathbb{C}^{m \times n}, \text{rank}(B)=k} \|A - B\|_2$$

的一个解, 且

$$\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

此时, 我们称  $A_k$  是  $A$  的一个**秩  $k$  逼近**.

 对于 Frobenius 范数, 我们有类似的结论。

---

\* 本小节内容只需了解



**引理 (交错不等式)** 设  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ,  $A_r$  是由  $A$  去除  $r$  列 (或  $r$  行) 后得到的子矩阵, 则

$$\sigma_i(A) \geq \sigma_i(A_r) \geq \sigma_{i+r}(A), \quad i = 1, 2, \dots, \min\{m, n\}.$$

这里, 当下标  $k$  大于矩阵的维数时, 我们令  $\sigma_k = 0$ .

更进一步, 如果  $B \in \mathbb{C}^{(m-r) \times (n-s)}$  是  $A$  的子矩阵, 则

$$\sigma_i(A) \geq \sigma_i(B) \geq \sigma_{i+r+s}(A).$$



**引理** 设  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , 则对任意的单位列正交矩阵  $U_k \in \mathbb{C}^{n \times k}$  和  $V_k \in \mathbb{C}^{n \times k}$ , 有

$$\sigma_i(U_k^* A V_k) \leq \sigma_i(A), \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.2)$$

因此,

$$|\det(U_k^* A V_k)| \leq \sigma_1(A) \sigma_2(A) \cdots \sigma_k(A). \quad (3.3)$$

**定理 (Weyl 不等式, 1949)** 设  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 其奇异值和特征值分别为  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$  和  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ . 则

$$|\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_k| \leq \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

且当  $k = n$  时, 等号成立.



# 5 | 线性最小二乘问题的求解方法

5.1 正规方程法

5.2 QR 分解法

5.3 奇异值分解法



## 5.1 正规方程法

**定理** 设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ( $m \geq n$ ), 则  $x_* \in \mathbb{R}^n$  是线性最小二乘问题的解当且仅当残量  $r = b - Ax_*$  与  $\text{Ran}(A)$  正交, 即  $x_*$  是下面的**正规方程**的解

$$A^T(b - Ax) = 0 \quad \text{或} \quad A^T Ax = A^T b.$$

(板书)



由于

$$A^T b \in \text{Ran}(A^T) = \text{Ran}(A^T A)$$

因此正规方程  $A^T A x = A^T b$  总是相容的, 即**最小二乘解总是存在的**, 且当  $A$  满秩时, 这个解也是唯一的.

**定理** 设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ( $m > n$ ). 则  $A^T A$  对称正定当且仅当  $A$  是列满秩的, 即  $\text{rank}(A) = n$ . 此时, 线性最小二乘问题存在唯一解:

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

 当  $A$  列满秩时, 可以使用 Cholesky 分解来求解正规方程, 总运算量大约为  $mn^2 + \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ , 其中大部分 ( $mn^2$ ) 是用来计算  $A^T A$ .

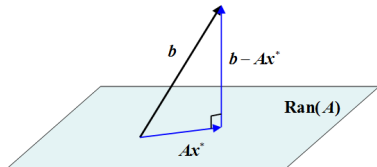


## 最小二乘解的几何含义

我们可以把  $b$  写成

$$b = Ax_* + r, \quad \text{其中 } r \perp \text{Ran}(A). \quad (3.4)$$

所以  $Ax_*$  就是  $b$  在  $\text{Ran}(A)$  上的正交投影:



 最小二乘解可能并不唯一, 但分解 (3.4) 总是唯一的.



## 5.2 QR 分解法

假定  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ( $m \geq n$ ) 满秩, 用三种不同方法来推导.

(1) 将  $Q$  的扩充成一个正交矩阵, 记为  $[Q, \hat{Q}] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . 于是有

$$\begin{aligned}\|Ax - b\|_2^2 &= \left\| [Q, \hat{Q}]^\top (Ax - b) \right\|_2^2 = \left\| [Q, \hat{Q}]^\top (QRx - b) \right\|_2^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} Rx - Q^\top b \\ -\hat{Q}^\top b \end{bmatrix} \right\|_2^2 \\ &= \|Rx - Q^\top b\|_2^2 + \|\hat{Q}^\top b\|_2^2 \geq \|\hat{Q}^\top b\|_2^2,\end{aligned}$$

等号成立当且仅当  $Rx = Q^\top b$ . 所以最小二乘解为

$$x_* = R^{-1}Q^\top b$$



(2) 将  $b$  写成  $b = (QQ^\top + I - QQ^\top)b$ , 则

$$\begin{aligned} Ax - b &= Ax - (QQ^\top + I - QQ^\top)b \\ &= (Ax - QQ^\top b) - (I - QQ^\top)b. \end{aligned}$$

由于  $QQ^\top$  是  $\text{Ran}(A)$  上的正交投影, 因此  $Ax - QQ^\top b$  与  $(I - QQ^\top)b$  正交. 所以

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_2^2 &= \|Ax - QQ^\top b\|_2^2 + \|(I - QQ^\top)b\|_2^2 \\ &= \|Rx - Q^\top b\|_2^2 + \|(I - QQ^\top)b\|_2^2 \geq \|(I - QQ^\top)b\|_2^2, \end{aligned}$$

等号成立当且仅当  $Rx = Q^\top b$ . 所以最小二乘解为

$$x_* = R^{-1}Q^\top b$$



(3) 解正规方程. 由正规方程法可知, 最小二乘解为

$$\begin{aligned}x_* &= (A^T A)^{-1} A^T b = (R^T Q^T Q R)^{-1} R^T Q^T b \\&= (R^T R)^{-1} R^T Q^T b \\&= R^{-1} Q^T b.\end{aligned}$$

✎ 用 QR 分解来求最小二乘解的运算量大约为  $2mn^2$  (如果采用 Householder 变换的话, 运算量大约为  $2mn^2 - \frac{2}{3}n^3$ ).

✎ 当  $m \gg n$  时, 大约为正规方程的两倍. 当  $m = n$  时, 几乎相同.

✎ 通常 QR 算法比较稳定, 是求解最小二乘问题的首选方法, 特别是当  $A$  条件数较大 (病态) 时.



## 5.3 奇异值分解法

设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  列满秩,  $A = U \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^\top$  是奇异值分解,  $U = [U_n, \tilde{U}]$ , 则

$$\begin{aligned}\|Ax - b\|_2^2 &= \left\| U \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^\top x - b \right\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^\top x - [U_n, \tilde{U}]^\top b \right\|_2^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} \Sigma V^\top x - U_n^\top b \\ -\tilde{U}^\top b \end{bmatrix} \right\|_2^2 \\ &= \|\Sigma V^\top x - U_n^\top b\|_2^2 + \|\tilde{U}^\top b\|_2^2 \geq \|\tilde{U}^\top b\|_2^2,\end{aligned}$$

等号当且仅当  $\Sigma V^\top x - U_n^\top b = 0$  时成立, 即

$$x = (\Sigma V^\top)^{-1} U_n^\top b = V \Sigma^{-1} U_n^\top b \implies \text{线性最小二乘问题的解}$$



# 6 | 最小二乘问题的推广及其应用 \*

6.1 正则化与加权正则化

6.2 约束最小二乘

6.3 多项式数据拟合

6.4 线性预测

6.5 信号恢复

6.6 SVD：图像压缩 — 截断 SVD

6.7 SVD：图像配准 Rigid Alignment / Shape Registration

---

\* 本节内容只需了解。



## 6.1 正则化与加权正则化

对于欠定最小二乘, 由于解不唯一, 我们往往还需要极小化  $\|x\|_2^2$ , 合起来就是

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2, \quad \text{其中 } \alpha > 0 \text{ 是正则化系数}$$

将目标函数记为

$$J(x) = \frac{1}{2} (\|Ax - b\|_2^2 + \alpha \|x\|_2^2).$$

由于  $J(x)$  是严格凸的二次函数, 因此存在唯一的最小值点.

对  $x$  求导, 并令其等于零可得

$$(A^T A + \alpha I)x = A^T b \implies \text{唯一解}$$

$$x_* = (A^T A + \alpha I)^{-1} A^T b$$



## 加权正则化

一类应用更广泛的问题是下面的加权正则化问题

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \frac{\alpha}{2} \|Wx\|_2^2,$$

其中  $W \in \mathbb{R}^{p \times n}$  是广义加权矩阵, 可以是非负对角矩阵, 对称正定矩阵, 也可以是一般矩阵 (如一阶差分算子, 二阶差分算子等). 注意,  $W$  不一定要是方阵.

经过类似的推导, 问题的解满足

$$(A^T A + \alpha W^T W)x = A^T b.$$

如果  $A^T A + \alpha W^T W$  非奇异, 则存在唯一解

$$x_* = (A^T A + \alpha W^T W)^{-1} A^T b$$



## 6.2 约束最小二乘

考虑带有约束的最小二乘问题

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & Bx = f \end{aligned}$$

其中  $Bx = f$  是约束条件. 对应的 Lagrange 函数为

$$J(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda^\top (Bx - f).$$

分别对  $x$  和  $\lambda$  求一阶导数, 并令其等于零, 可得

$$\begin{bmatrix} A^\top A & B^\top \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^\top b \\ f \end{bmatrix}.$$



## 6.3 多项式数据拟合

已知  $n$  个点  $\{(t_i, f_i)\}_{i=1}^n$ , 寻找一个低次多项式来拟合这些数据.

设拟合多项式为

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_m t^m$$

通常  $m \ll n$ . 将上述  $n$  个点代入可得

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^m \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^m \end{bmatrix}_{n \times (m+1)} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad Ax = f,$$

其中  $A \in \mathbb{R}^{n \times (m+1)}$ ,  $x = [a_0, a_1, \dots, a_m]^\top$ .



由于  $m \ll n$ , 该方程组是超定的, 解通常是不存在的. 因此, 我们寻找一个近似解, 使得残量  $\|f - Ax\|_2$  最小, 即求解最小二乘问题

$$\min_{x \in \mathbb{R}^{m+1}} \|f - Ax\|_2^2$$



## 6.4 线性预测

预测一个时间序列的未来走向, 一个常用方法就是线性预测. 假定在  $t_k$  时刻的值  $f_k$  线性依赖于其前  $m$  个时刻的值  $f_{k-1}, \dots, f_{k-m}$ , 即

$$f_k = a_1 f_{k-1} + a_2 f_{k-2} + \cdots + a_m f_{k-m}. \quad (3.5)$$

现已测得前  $n$  个值  $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ , 其中  $n \gg m$ , 如何预测未来的值?

将现有的数据代入关系式 (3.5) 可得

$$\begin{bmatrix} f_{m-1} & f_{m-2} & f_{m-3} & \cdots & f_0 \\ f_m & f_{m-1} & f_{m-2} & \cdots & f_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n-2} & f_{n-3} & f_{n-4} & \cdots & f_{n-m-1} \end{bmatrix}_{(n-m) \times m} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_m \\ f_{m+1} \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{或 } Ax = f,$$

这这也是一个超定问题, 因此需要求解最小二乘  $\min_{x \in \mathbb{R}^m} \|f - Ax\|_2^2$



## 6.5 信号恢复

### 信号去噪

在获取数字信号时, 由于各种各样的原因, 最后得到的信号总会带有一定的噪声, 即

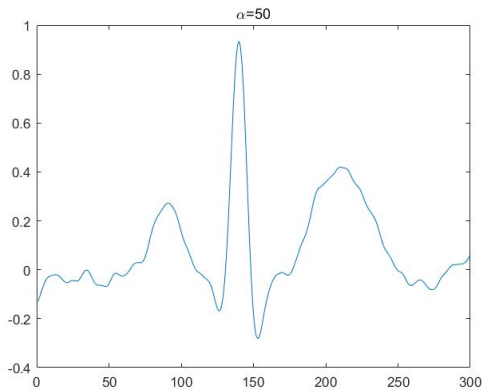
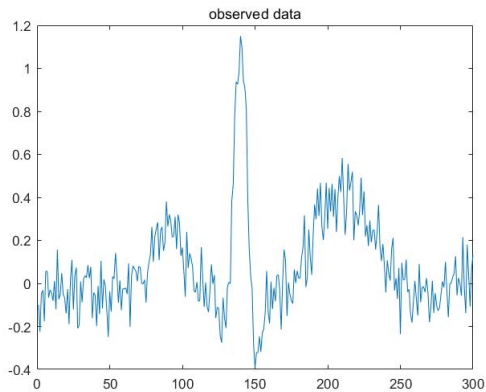
$$b = x + \eta$$

其中  $x$  是真实的信号,  $b$  是观察到的信号,  $\eta$  是噪声.

**去噪** 是数字信号和图像处理中的一个基本问题, 其中一个有效方法就是加权最小二乘法, 即

$$\min_x \frac{1}{2} \|x - b\|_2^2 + \frac{1}{2} \alpha \|Dx\|_2^2$$

其中  $D$  是离散的二阶导算子或 TV 算子.





# 数字图像去噪与去模糊

数字图像的获取模型

$$f = \mathcal{B}(x) + \eta$$

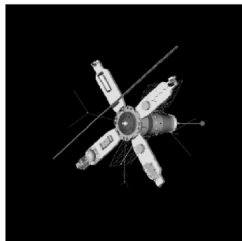
其中  $x$  是真实图像,  $f$  是观察到的图像,  $\mathcal{B}(\cdot)$  是卷积算子 (模糊机制),  $\eta$  是噪声.

## Tikhonov regularization model

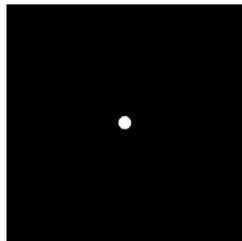
$$\min \|\mathcal{B}(x) - f\|_2^2 + \mu^2 \|x\|_2^2$$

## Weighted regularization model

$$\min \|\mathcal{B}(x) - f\|_2^2 + \mu^2 \|Dx\|_2^2, \quad \text{with } D \text{ being a diagonal matrix}$$

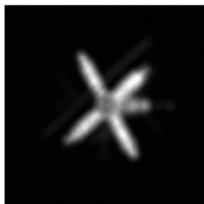


(a)



(b)

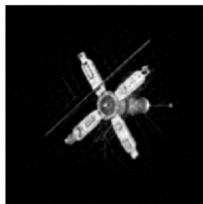
(a) The original satellite image; (b) the out-of-focus blurring function.



(a)



(b)



(c)

(a) The blurred and noisy image (b) the restored image using the spatial invariant model;  
(c) the restored image using the spatial variant model

举例：由于对焦不准而造成图像模糊 (此时  $\mathcal{B}$  是一个线性算子), 噪声为高斯白噪声.

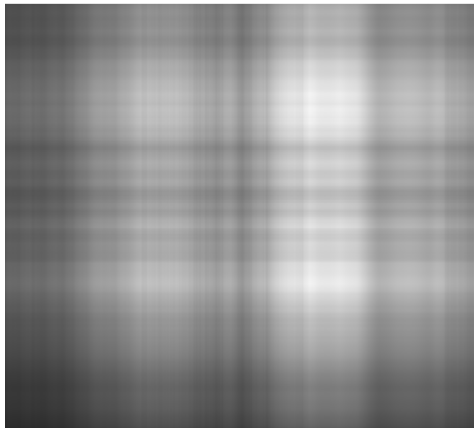


## 6.6 SVD: 图像压缩 — 截断 SVD

original image



k=1, relerr=3e-01

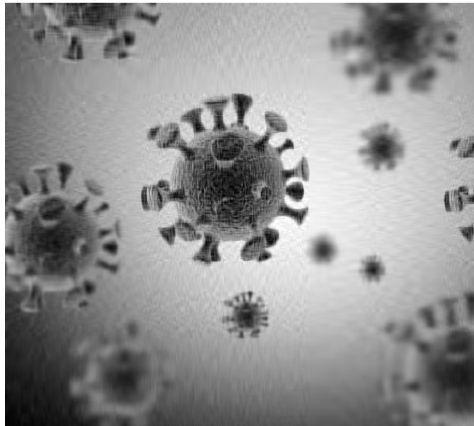


 原图像素:  $809 \times 900$

original image



k=50, relerr=5e-02



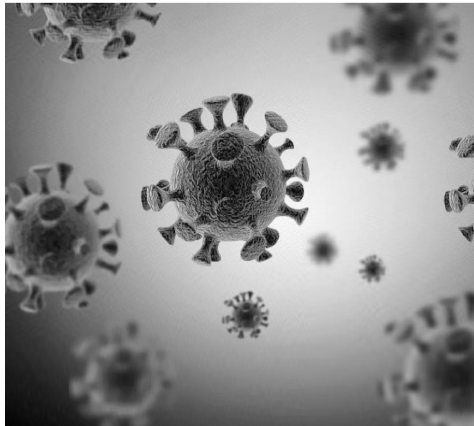
 原图像素:  $809 \times 900$



original image



k=150, relerr=2e-02



 原图像素：809 × 900

original image



k=200, relerr=1e-02



 原图像素:  $809 \times 900$



original image



$k=50$ ,  $\text{relerr}=1\text{e-}02$



 原图像素:  $512 \times 512$



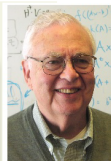
## Professor SVD

BY CLEVE MOLER

Stanford computer science professor Gene Golub has done more than anyone to make the singular value decomposition one of the most powerful and widely used tools in modern matrix computation.



*Gene Golub's license plate, photographed by Professor P. M. Kroonenberg of Leiden University.*



### Gene Golub

Popularized numerical computing with matrices via the informal "Golub thesis"

"anything worth computing can be stated as a matrix problem"

THE "\$25,000,000,000" EIGENVECTOR  
THE LINEAR ALGEBRA BEHIND GOOGLE

KURT BRYAN<sup>1</sup> AND TANYA LEISE<sup>2</sup>

### William Kahan

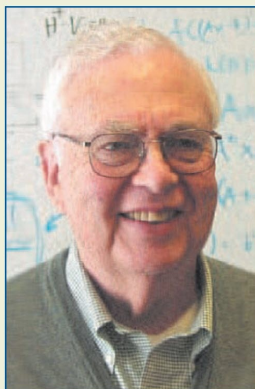
Formalized IEEE-754 floating point arithmetic.

Make it possible to compute with probabilities as "real numbers" instead of discrete counts.

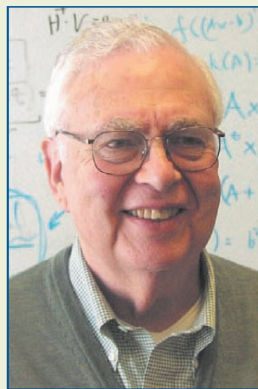




**12**



**50**

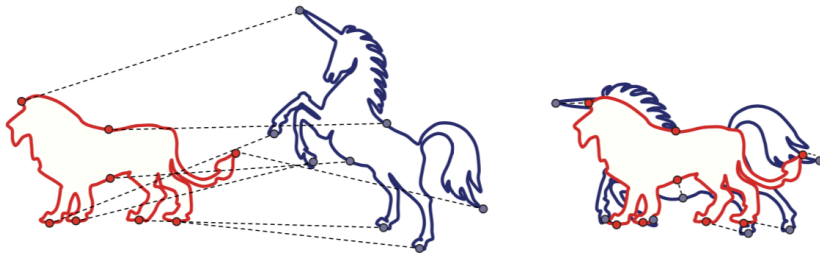
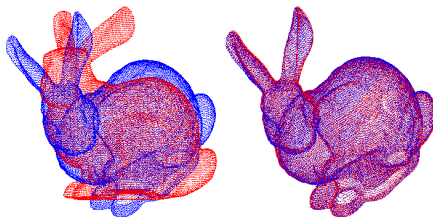


**120**

*Rank 12, 50, and 120 approximations to a rank 598 color photo of Gene Golub.*



## 6.7 SVD: 图像配准 Rigid Alignment / Shape Registration





### Problem Formulation:

1. Given two sets of points:  $\{x_i\}, \{y_i\}, i = 1..n$  in  $\mathbb{R}^3$ . Find the rigid transform:

$\mathbf{R}, t$  that minimizes:

$$\sum_{i=1}^N \|\mathbf{R}x_i + t - y_i\|_2^2$$

2. Closed form solution with rotation matrices:

1. Construct:  $C = \sum_{i=1}^N (y_i - \mu^Y)(x_i - \mu^X)^T$ , where  $\mu^X = \frac{1}{N} \sum_i x_i$ ,

2. Compute the SVD of C:  $C = U \Sigma V^T$   $\mu^Y = \frac{1}{N} \sum_i y_i$

1. If  $\det(UV^T) = 1, R_{\text{opt}} = UV^T$

2. Else  $R_{\text{opt}} = U \tilde{\Sigma} V^T, \tilde{\Sigma} = \text{diag}(1, 1, \dots, -1)$

3. Set  $t_{\text{opt}} = \mu^Y - R_{\text{opt}} \mu^X$

Note that C is a 3x3 matrix. SVD is very fast.

Arun et al., Least-Squares Fitting  
of Two 3-D Point Sets

 [http://www.lix.polytechnique.fr/~maks/Verona\\_MPAM/TD/TD1/index.html](http://www.lix.polytechnique.fr/~maks/Verona_MPAM/TD/TD1/index.html)