



专题选讲

定积分的近似计算 (数值积分)

为什么数值积分

为什么数值积分

$$I(f) = \int_a^b f(x) \, dx$$

数学方法：Newton-Leibniz 公式 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

● 但是在许多实际计算问题中

- (1) $F(x)$ 表达式可能比较复杂，计算困难，如 $f(x) = \frac{1}{1+x^6}$
- (2) $F(x)$ 难求！甚至有时不能用初等函数表示，如

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad f(x) = e^{-x^2}$$

- (3) $f(x)$ 表达式未知，只有通过测量或实验得来的数据表

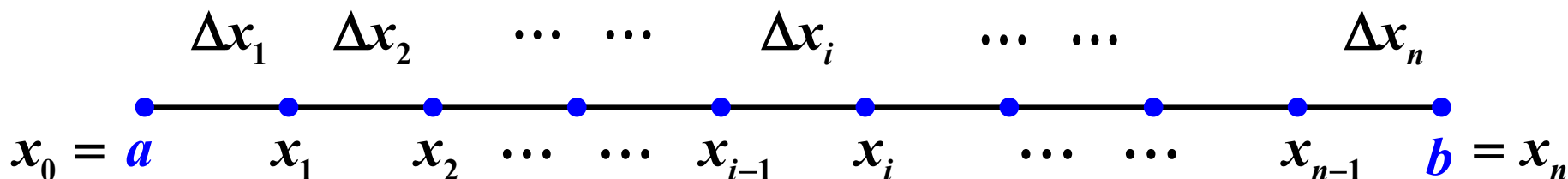
数值积分非常重要

- ❑ 数值积分是计算数学的**基础和核心**，很多连续问题都需要通过数值积分才能转化为离散问题。
- ❑ 数值积分内容**非常复杂**，也非常丰富，特别是弱奇异积分，奇异积分，超奇异积分，或者被积函数是急剧震荡或急剧衰减的。
- ❑ 对于高维积分，由于维数效应，计算复杂度往往随维数指数增长，如何高效地计算高维积分，仍然是计算数学的一大**难题**。

如何近似计算定积分

定积分的定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$



$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta x = \max_i \Delta x_i$$



$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

(n 充分大, Δx 充分小)

矩形公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$



怎么选取 ξ_i ? 不同的选取方法 $\longrightarrow$ 不同的求积方法

矩形公式

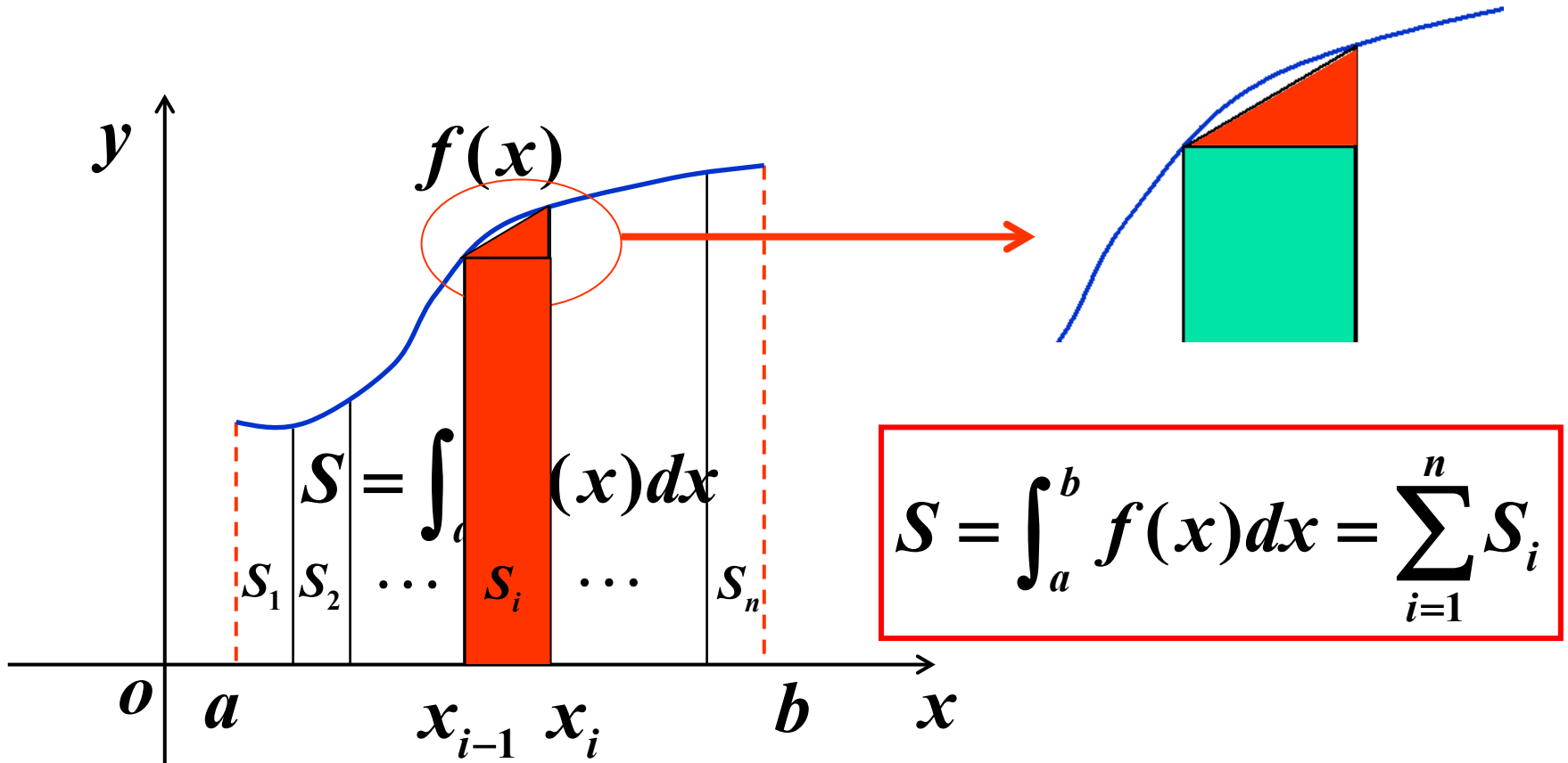
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(\mathbf{x}_{i-1})\Delta x_i \quad \longrightarrow \quad \text{左矩形公式, 左点法}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(\mathbf{x}_i)\Delta x_i \quad \longrightarrow \quad \text{右矩形公式, 右点法}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f\left(\frac{\mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{x}_i}{2}\right)\Delta x_i \quad \longrightarrow \quad \text{中矩形公式, 中点法}$$

几何意义及改进

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x_i$$



$$S = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n S_i$$

复合梯形法

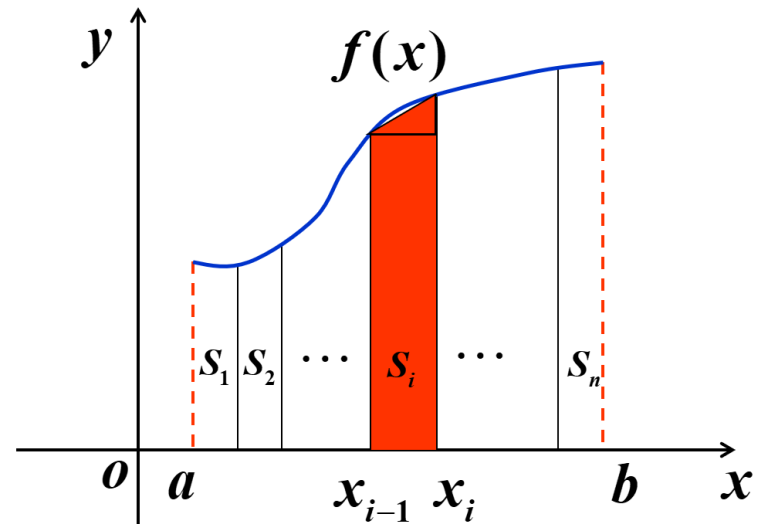
曲边小梯形的面积可以由直边小梯形的面积来近似

$$S_i \approx \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta x_i \quad (y_i = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n)$$



整个曲边梯形的面积:

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b f(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n S_i \approx \sum_{i=1}^n \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta x_i \end{aligned}$$



复合梯形法（续）



如何对积分区间进行分割？

一种简单易用的方法： n 等分

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n \underline{=} h = \frac{b-a}{n}$$

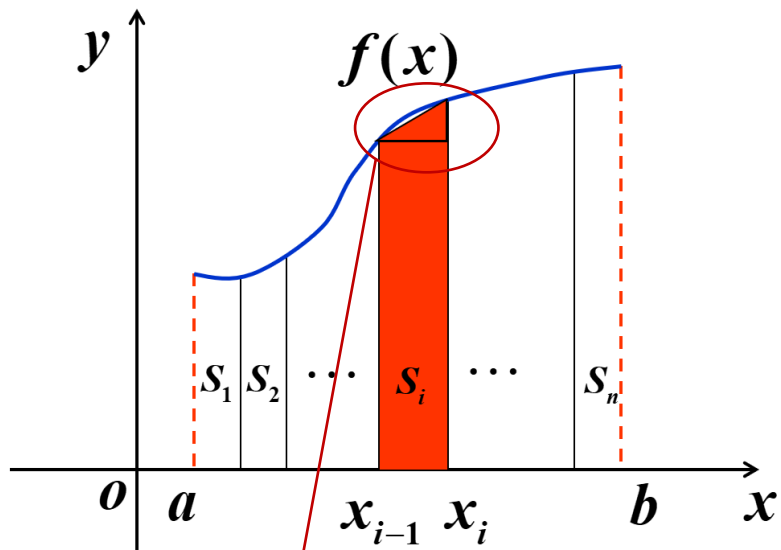


$$S = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n S_i \approx \sum_{i=1}^n \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta x_i = h \sum_{i=1}^n \frac{y_{i-1} + y_i}{2}$$

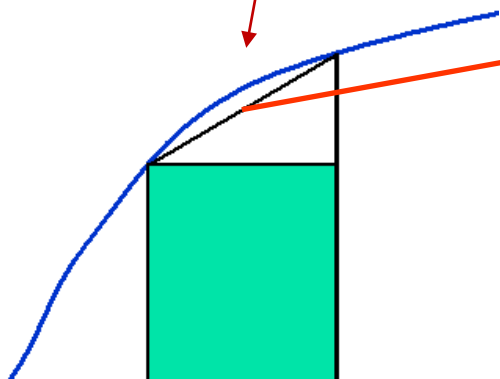
$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right)$$

复合梯形法

复合抛物线法

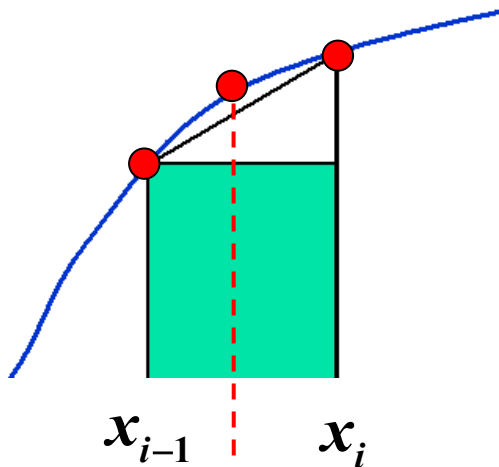


用抛物线代替该直线，是否会更好？



问题：怎么构造合适的抛物线？

复合抛物线法（续）



$$\frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$$

在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上, 用过以下三点

$$(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_{i-1/2}, y_{i-1/2}), (x_i, y_i)$$

的抛物线来近似原函数 $f(x)$ 。

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{6n} (y_{i-1} + 4y_{i-1/2} + y_i)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n} [y_0 + y_n + 4(y_{1/2} + \cdots + y_{n-1/2}) + 2(y_1 + \cdots + y_{n-1})]$$

复合抛物线法（也称复合 Simpson 公式）

其他方法

除了复合梯形和复合抛物线方法外，其他方法还有

- **Newton-Cotes** 公式
- **Gauss** 型求积公式
- **Romberg** 外推求积方法
- **Monte Carlo** 方法
- 数论方法、点阵逼近法等等

详细介绍可参考相关资料